C.B.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1305-1385 C.B.U. Journal of Science
5.1 (2009) 5 – 10 5.1 (2009) 5 – 10

# BİR IMPULSIVE GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN ASİMPTOTİK SABİTLİĞİ

**Fatma KARAKOÇ***

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara , TÜRKİYE

**Özet :** Bu çalışmada birinci basamaktan lineer bir impulsive gecikmeli diferensiyel denklem sisteminin çözümünün $t \to \infty$ halinde yakınsadığı vektör formüle edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** *Impulsive Gecikmeli Diferensiyel Denklem, Asimptotik Sabitlik, Adjoint Denklem.*

# ASYMPTOTIC CONSTANCY FOR THE SOLUTION OF AN IMPULSIVE DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEM

**Abstract :** In this paper a first order linear impulsive delay differential equations system is considered and the constant vector that the solution convergences, as $t \to \infty$, is formulated.

**Keywords :** *Impulsive Delay Differential Equation, Asymptotic Constancy, Adjoint Equation.*

**MOS Clasification**: 34K06, 34K45

---

***Sorumlu yazar**

karakoc@science.ankara.edu.tr

## 1. Giriş

Bu makalede birinci basamaktan lineer impulsive gecikmeli diferensiyel

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)[x(t) - x(t-\tau)] + f(t), \ t \geq t_0, \ t \neq \theta_i, \\ \Delta x(\theta_i) = B_i x(\theta_i) + D_i, \ i \in Z^+ = \{1, 2, ...\}, \end{cases} \qquad (1)$$

denklem sistemi ele alınmıştır, burada $i \in Z^+$ için $\theta_i = t_0 + i\tau, \ t_0 \geq 0, \ \tau > 0,$

$\Delta x(\theta_i) = x(\theta_i^+) - x(\theta_i^-), \ x(\theta_i^+) = \lim_{t \to \theta_i^+} x(t),$

$x(\theta_i^-) = \lim_{t \to \theta_i^-} x(t)$ dir.

Ayrıca aşağıdaki koşullar kabul edilmektedir:

$(H1)$ $A : [t_0, \infty) \to R^{n \times n}$ sürekli bir matris fonksiyondur,

$(H2)$ $f : [t_0, \infty) \to R^n$ sürekli bir vektör fonksiyondur,

$(H3)$ $B_i \in R^{n \times n}, \ \det(I + B_i) \neq 0, \ i \in Z^+;$ burada $I$, $n \times n$ boyutlu birim matristir,

$(H4)$ $D_i \in R^n, \ i \in Z^+.$

**Uyarı 1.** $\theta_i = t_0 + i\tau$ için $\lim_{i \to \infty} \theta_i = \infty$ ve $t_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_i < \theta_{i+1} < ...$ dir.

(1) denklemi

$$x(t) = \phi(t), \ t \in [t_0 - \tau, t_0], \qquad (2)$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alınmaktadır; burada $\phi : [t_0 - \tau, t_0] \to R^n$ sürekli bir başlangıç fonksiyonu olup

$\|\phi\|_r = \sup_{t_0 - r \leq t \leq t_0} \|\phi(t)\|, \ r \geq 0,$ $\xi \in R^n$ için

$\|\xi\| = |\xi_1| + |\xi_2| + ... + |\xi_n|$ ve $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$

için $\|A\| = \max_{i=1,2,...,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ dir.

Impulsive ve gecikmeli diferensiyel denklemler fizik, mühendislik, biyoloji alanlarında ortaya çıkan çok sayıda problem için model teşkil ederler. Uygulama alanlarının çokluğu özellikle gecikmeli diferensiyel denklemleri matematiğin en hızlı gelişen dallarından biri haline getirmiştir. [1] de nüfus dinamiğinde önemli yere sahip olan gecikmeli diferensiyel denklemlerin kalitatif özellikleri incelenmiştir. [2] ve [3] impulsive diferensiyel denklemlerin incelenmesinde temel kaynak niteliğinde olan kitaplardır. Impulsive gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği ile ilgili sonuçlar [4] de ispatlanmıştır. Son yıllarda lineer gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin yakınsaklığı ve asimptotik gösterimi problemi yoğun bir şekilde incelenmektedir [5,6,7,8,9].

[10] da birinci basamaktan lineer impulsive gecikmeli diferensiyel

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)[x(t-\sigma) - x(t-\tau)] + f(t), \ t \geq t_0, \ t \neq t_i, \\ \Delta x(t_i) = B_i x(t_i) + D_i, \ i \in Z^+ = \{1, 2, ...\}, \end{cases}$$

denklem sistemi ve bir başlangıç fonksiyonundan meydana gelen başlangıç değer problemi ele alınmış ve çözümün $t \to \infty$ halinde yakınsak olduğu gösterilmiştir. Ancak çözümün yakınsadığı vektör $B_i = 0, \ i \in Z^+,$ durumunda hesaplanabilmiştir.

Bu çalışmadaki amaç (1)-(2) başlangıç değer probleminin çözümünün yakınsadığı vektörü formüle etmektir.

$a, b \in R$ olmak üzere $PLC([a,b], R^n)$ uzayı $t \in [a,b], \ t \neq \theta_i, \ i \in Z^+,$ için sürekli ve $\theta_i \in [a,b]$ noktalarında birinci çeşit süreksizliğe sahip soldan sürekli $\varphi : [a,b] \to R^n$ fonksiyonların sınıfını göstermektedir.

**Tanım 1.** Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $x \in PLC([t_0 - \tau, t_0 + \beta), D), \ \beta > 0, \ D \subset R^n,$ fonksiyonuna (1)-(2) başlangıç değer probleminin *çözümüdür* denir:

$(A1)$ $t \neq \theta_i, \ i \in Z^+,$ olmak üzere $t \in [t_0, t_0 + \beta)$ için $x$ in türevi mevcut ve süreklidir,

$(A2)$ $x$, $t\in[t_0,t_0+\beta)$, $t\neq\theta_i$, için (1) deki gecikmeli diferensiyel denklemi sağlar,
$(A3)$ $x$, $t=\theta_i$, $i\in Z^+$, noktalarında (1) deki impulse koşullarını sağlar,
$(A4)$ $t\in[t_0-\tau,t_0]$ için $x(t)=\phi(t)$.

## 2. Esas Sonuçlar

Aşağıdaki teoremde (1)-(2) başlangıç değer probleminin çözümünün yakınsaklığı için yeter koşullar ifade edilmektedir, ispatı [10] da verilmiştir.

**Teorem 1.** $(H1)-(H4)$ hipotezlerine ek olarak aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$(i)\ \int_{t_0}^{\infty}\|A(s)\|\,ds\le K_1<\infty,$$

$$(ii)\ \int_{t_0}^{\infty}\|f(s)\|\,ds\le K_2<\infty,$$

$$(iii)\ \prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\|B_i\|\right)\le L_1<\infty,$$

$$(iv)\ \prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\|D_i\|\right)\le L_2<\infty.$$

Bu durumda (1)-(2) probleminin $x(t)$ çözümü $t\to\infty$ halinde sabit bir vektöre yakınsar, yani, $\lim_{t\to\infty}x(t)=l(\phi)\in R^n$ dir.

$l(\phi)$ vektörü hesaplanmadan önce bazı yardımcı sonuçlar ispatlanacaktır.
Şimdi $t\ge t_0$ için

$$Y(t)=I+\int_t^{t+\tau}Y(s)A(s)ds+\sum_{t\le\theta_k}Y(\theta_k)B_k(I+B_k)^{-1} \tag{3}$$

integral denklemini göz önüne alalım; burada $I$, $n\times n$ boyutlu birim matristir.

**Teorem 2.** $(H1),(H3)$ hipotezleri ve

$$(v)\ \int_t^{t+\tau}\|A(s)\|\,ds+\sum_{t\le\theta_k}\left\|B_k(I+B_k)^{-1}\right\|\le\rho<1,$$

$t\ge t_0$, koşulu sağlansın.

Bu durumda (3) sağlanacak şekilde bir tek sınırlı $Y\in PLC([t_0,\infty),R^{n\times n})$ matris fonksiyonu vardır.

**İspat.**

$$B=\left\{Y\in PLC([t_0,\infty),R^{n\times n}):\ \|Y\|_B\le\lambda,\ \lambda\ge\frac{1}{1-\rho}\right\}$$

uzayı

$$\|Y\|_B=\sup_{t\ge t_0}\|Y(t)\|,\ Y\in B,$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. $Y\in B$ ve $t\ge t_0$ için

$$TY(t)=I+\int_t^{t+\tau}Y(s)A(s)ds+\sum_{t\le\theta_k}Y(\theta_k)B_k(I+B_k)^{-1}$$

operatörünü tanımlayalım.

$$TY(\theta_i^-)=\lim_{t\to\theta_i^-}TY(t)=TY(\theta_i)$$

ve

$$TY(\theta_i^+)=\lim_{t\to\theta_i^+}TY(t)=TY(\theta_i)-Y(\theta_i)B_i(I+B_i)^{-1}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.
Diğer taraftan $t_1\in(\theta_i,\theta_{i+1})$, $i\in Z^+$, için

$$TY(t_1^+)=TY(t_1^-)=TY(t_1)$$

dir. Böylece $TY\in PLC([t_0,\infty),R^{n\times n})$ dir.
Ayrıca $t\ge t_0$ için $(v)$ koşulundan,

$$\begin{aligned}\|TY\|_B&\le 1+\rho\|Y\|_B\\&\le\lambda\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $T$, $B$ yi $B$ ye dönüştürür. Diğer taraftan $Y$, $Z\in B$ için tekrar $(v)$ koşulu göz önüne alınırsa,

$$\|TY-TZ\|_B\le\rho\|Y-Z\|_B$$

elde edilir. $\rho < 1$ olduğundan, $T : B \to B$ bir daralma dönüşümüdür. O halde Banach sabit nokta teoremi gereği $TY = Y$ denkleminin tek $Y \in B$ matris çözümü (3) integral denkleminin sınırlı olan tek $Y \in PLC([t_0, \infty), R^{n\times n})$ çözümüdür.

**Lemma 1.** Teorem 2 nin hipotezleri altında (3) ün $Y$ matris çözümü $i \in Z^+$ için aşağıdaki adjoint denklemi sağlar:

$$\begin{cases} Y'(t) = Y(t+\tau)A(t+\tau) - Y(t)A(t), \ t \ge t_0, \ t \ne \theta_i, \\ \Delta Y(\theta_i) = -Y(\theta_i)B_i(I+B_i)^{-1}, \ \theta_i = t_0 + i\tau. \end{cases} \quad (4)$$

**İspat.** $t \in (\theta_i, \theta_{i+1}), \ i \in Z^+,$ için (3) ün iki yanı türevlenirse,

$$Y'(t) = Y(t+\tau)A(t+\tau) - Y(t)A(t)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \Delta Y(\theta_i) &= Y(\theta_i^+) - Y(\theta_i^-) \\ &= \sum_{\theta_i^+ \le \theta_k} Y(\theta_k)B_k(I+B_k)^{-1} \\ &\quad - \sum_{\theta_i^- \le \theta_k} Y(\theta_k)B_k(I+B_k)^{-1} \\ &= -Y(\theta_i)B_i(I+B_i)^{-1} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. Şimdi

$$C(t) = Y(t)x(t) - \int_t^{t+\tau} Y(s)A(s)x(s-\tau)ds, \ t \ge t_0, \quad (5)$$

vektör değerli fonksiyonunu göz önüne alalım; burada $Y$, Teorem 2 deki gibidir ve $x$, (1)-(2) probleminin çözümüdür.

**Lemma 2.** $(H1)-(H4)$ hipotezleri ve $(v)$ koşulu sağlansın. Bu durumda

$$\begin{cases} C'(t) = Y(t)f(t), \ t \ge t_0, \ t \ne \theta_i, \\ \Delta C(\theta_i) = Y(\theta_i^+)D_i, \ \theta_i = t_0 + i\tau, \ i \in Z^+. \end{cases} \quad (6)$$

**İspat.** (5) in $t \in (\theta_i, \theta_{i+1}), \ i \in Z^+,$ için türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} C'(t) &= Y'(t)x(t) + Y(t)x'(t) - Y(t+\tau)A(t+\tau)x(t) \\ &\quad + Y(t)A(t)x(t-\tau) \end{aligned} \quad (7)$$

bulunur. (1) ve (4), (7) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$C'(t) = Y(t)f(t), \ t \ge t_0, \ t \ne \theta_i,$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \Delta C(\theta_i) &= C(\theta_i^+) - C(\theta_i^-) \\ &= Y(\theta_i^+)x(\theta_i^+) - Y(\theta_i^-)x(\theta_i^-) \end{aligned} \quad (8)$$

dir.

$$x(\theta_i^+) = (I+B_i)x(\theta_i) + D_i$$

ve

$$Y(\theta_i^+) = Y(\theta_i) - Y(\theta_i)B_i(I+B_i)^{-1}$$

eşitlikleri (8) de yerlerine yazılırsa,

$$\Delta C(\theta_i) = Y(\theta_i^+)D_i, \ i \in Z^+,$$

elde edilir.

**Sonuç 1.** Lemma 2 nin hipotezleri altında (5) ile verilen $C(t)$ fonksiyonu $t \ge t_0$ için

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(s)f(s)ds + \sum_{t_0 < \theta_i < t} Y(\theta_i^+)D_i, \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir.

Artık (1)-(2) başlangıç değer probleminin $t \to \infty$ halinde yakınsadığı vektör başlangıç fonksiyonu ve (3) integral denkleminin matris çözümü yardımı ile formüle edilebilir:

**Teorem 3.** Teorem 1 in hipotezleri ve $(v)$ koşulu sağlansın. (1)-(2) probleminin $x(t)$ çözümünün $t \to \infty$ için limiti $l(\phi)$ olsun. Bu durumda

$$l(\phi) = Y(t_0)\phi(t_0) - \int_{t_0}^{t_0+\tau} Y(s)A(s)\phi(s-\tau)ds + \int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds + \sum_{t_0<\theta_k} Y(\theta_k^+)D_k \qquad (10)$$

dır; burada $Y$, (3) integral denkleminin tek çözümüdür.

**İspat.** $x$, (1)-(2) probleminin tek çözümü olsun. İspat için

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds + \sum_{t_0<\theta_k} Y(\theta_k^+)D_k \qquad (11)$$

olduğunu göstermek yeterlidir; burada $C$, (5) deki gibidir.
(9) dan, $t \ge t_0$ için

$$\begin{aligned} x(t) - C(t_0) - \int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t_0<\theta_k} Y(\theta_k^+)D_k &= x(t) - \left[ C(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(s)f(s)ds + \sum_{t_0<\theta_k<t} Y(\theta_k^+)D_k \right] \\ &\quad - \int_{t}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t\le\theta_k} Y(\theta_k^+)D_k \\ &= x(t) - C(t) - \int_{t}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t\le\theta_k} Y(\theta_k^+)D_k \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik ve (5) birlikte ele alındığında, $t \ge t_0$ için

$$\begin{aligned} x(t) - C(t_0) - \int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t_0<\theta_k} Y(\theta_k^+)D_k &= x(t) - Y(t)x(t) + \int_{t}^{t+\tau} Y(s)A(s)x(s-\tau)ds \\ &\quad - \int_{t}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t\le\theta_k} Y(\theta_k^+)D_k \qquad (12) \end{aligned}$$

bulunur. (3) ün her iki yanı $x(t)$ ile çarpıldığında, $t \ge t_0$ için

$$x(t) = Y(t)x(t) - \int_{t}^{t+\tau} Y(s)A(s)x(t)ds - \sum_{t\le\theta_k} Y(\theta_k)B_k(I+B_k)^{-1}x(t) \qquad (13)$$

elde edilir. (13) eşitliği (12) de yerine konulursa, $t \ge t_0$ için

$$\begin{aligned} x(t) - C(t_0) - \int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t_0<\theta_k} Y(\theta_k^+)D_k &= \int_{t}^{t+\tau} Y(s)A(s)[x(s-\tau) - x(t)]ds \\ &\quad - \sum_{t\le\theta_k} Y(\theta_k)B_k(I+B_k)^{-1}x(t) \\ &\quad - \int_{t}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t\le\theta_k} Y(\theta_k^+)D_k \qquad (14) \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan Teorem 1 ve başlangıç fonksiyonu göz önüne alınırsa

$$\|x(t)\| \le K,\ t \ge t_0 - \tau, \qquad (15)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabitinin mevcut olduğu anlaşılır. (15) kestirimi ve $Y(t)$ nin $[t_0, \infty)$ üzerinde sınırlı olduğu gerçeği (14) de göz önüne alınırsa, $t \ge t_0$ için

$$\begin{aligned} &\left\| x(t) - C(t_0) - \int_{t_0}^{\infty} Y(s)f(s)ds - \sum_{t_0<\theta_k} Y(\theta_k{}^+)D_k \right\| \\ &\le 2K\|Y\|_B \int_{t}^{t+\tau} \|A(s)\|ds + K\|Y\|_B \sum_{t\le\theta_k} \|B_k\| \|(I+B_k)^{-1}\| \\ &\quad + \|Y\|_B \int_{t}^{\infty} \|f(s)\|ds + \|Y\|_B \sum_{t\le\theta_k} \|D_k\| \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (11) gerçeklenmiş olur. (2) ve (5) birlikte göz önüne alındığı zaman (11) deki limit (10) a indirgenir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

**Uyarı 2.** Her $i \in Z^+$ için $B_i = 0$ ise, bu durumda (3) integral denklemi [10] daki (6) denklemini $\sigma = 0$ durumuna indirger. Bu denkleminin çözümü olan $Y(t)$ matris fonksiyonu süreklidir. Bu durumda (10) limit ifadesi [10] daki (5) limit ifadesinin $\sigma = 0$ özel durumu olur.

## Kaynaklar


[1] Kuang, Y., Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, Academic Press, USA, 398 p., (1993).

[2] Bainov, D.D., Simeonov, P.S., Impulsive Differential Equations, Asymptotic Properties of the Solutions, World Scientific, Singapore,

227 p., (1995).

[3] Samoilenko, A.M., Perestyuk, N.A., Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, 459 p., (1995).

[4] Ballinger, G., Liu, X., Existence and uniqueness results for impulsive delay differential equations, Dynamics of Continuous, Discrete Impulsive Sys., 5; 579- 591, (1999).

[5] Atkinson, F.V., Haddock, J.R., Criteria for asymptotic constancy of solutions of functional differential equations, J. Math. Anal. Appl., 91; 410-423, (1983).

[6] Bastinec, J., Diblik, J., Smarda, Z., Convergence tests for one scalar differential equation with vanishing delay, Arch. Math. (Brno), 36; 405- 414, (2000).

[7] Bereketoğlu, H., Pituk, M., Asymptotic constancy for nonhomogeneous linear differential equations with unbounded delays. Discrete and Cont. Dyn. Sys. Supp. Vol., 100-107, (2003).

[8] Diblik, J., Asymptotic representation of solutions of equation
$y'(t) = \beta(t)[y(t) - y(t-\tau(t))]$, J.Math.Anal. Appl., 217;200-215, (1998).

[9] Diblik, J., A criterion for convergence of solutions of homogeneous delay linear differential equations, Anal. Polon. Mat. 72; 115-130, (1999).

[10] Bereketoğlu, H., Karakoç, F., Asymptotic constancy for impulsive delay differential equations, Dynamic Systems and Applications 17, 71-84, (2008)


*Geliş Tarihi: 20/10/2008* *Kabul Tarihi: 22/01/2009*