

Kesir Türevli Diferansiyel Denklemlerin Kollokasyon Yöntemi ile Çözümü**Birkan DURAK¹, Mehmet Şirin DEMİR^{2*}, Hasan Ömür ÖZER³**¹İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler MYO, Motorlu Araçlar ve Ulaştırma Teknolojileri Bölümü, İstanbul, Türkiye²İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 34320, İstanbul, Türkiye³İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler MYO, Elektrik ve Enerji Bölümü, İstanbul, Türkiye¹<https://orcid.org/0000-0002-8196-5407>²<https://orcid.org/0000-0002-3965-4760>³<https://orcid.org/0000-0002-6388-4638>

*Sorumlu yazar: demirms@iuc.edu.tr

Araştırma Makalesi**Makale Tarihçesi:**

Geliş tarihi: 30.01.2025

Kabul tarihi:12.05.2025

Online Yayınlanma: 16.09.2025

Anahtar Kelimeler:

Sayısal çözüm

Kollokasyon yöntemi

Lineer kesirli diferansiyel denklemler

Lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemler

ÖZ

Mühendislik problemlerini ve doğa olaylarını bir diferansiyel denklem aracılığıyla matematiksel bir formda yazmak ve ardından bu denklemi çözerek olgu hakkında bazı sonuçlara ulaşmak bilimsel uğraşının önemli bir kısmıdır. Özellikle değişimin göz önüne alındığı olayların incelemesinde tam sayılı veya kesir türevli denklemler kullanılır. Kesir türevli denklemleri içeren bazı çalışmalar termoelastisite, titreşim ve difüzyon süreçleri, biyomühendislik konularında verilmiştir. Ayrıca fizik, genetik, biyoloji, ekonomi ve istatistik gibi bilim dallarındaki çeşitli problemler bu tip denklemlerle incelenmiştir. Kesir türevli denklemler, sönümün frekansa bağlı olduğu malzemeli modelleri tahmin etmekte ve ayrıca gerçek fiziksel sistemlerin hareketini tanımlamada, viskoz bir akışkan içine daldırılmış rijit bir plakanın veya bir akışkan içindeki bir gazın hareketinin modellenmesinde kullanılmaktadır. Bu tür denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunması hala önemli bir çalışma sahasıdır. Bu çalışmada ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden olan kollokasyon, kesir türevli denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmak amacıyla önerilmiştir. Yöntem sayesinde incelenen problemlerin çözümleri indirgendikleri denklem sisteminin çözümüyle bulunmuştur. Kollokasyon ile seçilen test problemlerine basit işlem ve programlama adımlarıyla yaklaşık çözümler bulunmuştur. Yöntemin çalışma algoritması verilerek, lineer olan veya olmayan, sınır ve başlangıç değer problemlerine uygulanması tartışılmıştır. Kollokasyonla bulunan değerler ile diğer araştırmacıların sonuçları arasında uyum yöntemin basit ve etkili bir yaklaşık çözüm yöntemi olduğunu göstermektedir.

Solution of Fractional Differential Equations by Collocation Method**Research Article****Article History:**

Received: 30.01.2025

Accepted: 12.05.2025

Published online:16.09.2025

Keywords:

Numerical solution

Collocation method

Linear fractional differential equations

Nonlinear fractional differential equations

ABSTRACT

The formulation of engineering problems and natural phenomena in terms of differential equations and the subsequent solution of these equations to obtain information is a major activity of the scientific effort. Such problems, especially in which variations have to be considered, are analyzed utilizing integer-order or fractional-order differential equations. Applications involving fractional order differential equations have been related to thermoelasticity, vibration analysis, diffusion processes, and biomedical engineering. Aside from that, some problems across the wide multidisciplinary of physics, genetics, biology, economics, and statistics have also been addressed via fractional kinds of equations. Fractional order differential equations perfectly fitting in considering certain frequency-dependent damping materials modeling and more accurate detailing of the real physical phenomenon, say,

the mechanical motion of a rigid plate immersed into the viscous medium, or the realistic collective behavior of gas particles submerged in the liquid. The quest to find approximate solutions for such equations remains a hot area of research. This paper proposes the collocation method, one of the weighted residual techniques, to determine approximate solutions for fractional-order differential equations. Using this method, the solutions to the examined problems are obtained by solving the reduced systems of equations. Approximate solutions to some test problems have been obtained by the collocation method using some simple computational and programming steps. The working algorithm of the method is given, as well as its application to linear or non-linear, boundary value and initial value problems. The agreement between the present results and those of other researchers shows that the method is simple and effective for generating approximate solutions.

To Cite: Durak B., Demir MŞ., Özer HÖ. Kesir Türevli Diferansiyel Denklemlerin Kollokasyon Yöntemi ile Çözümü. Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 2025; 8(4): 1816-1828.

1. Giriş

Birçok bilim alanında ve mühendislikte, karşılaşılan bir problemi ifade etmek ve bu problemle ilgili başlangıç ve sınır şartlarını ortaya koyabilmek gerekmektedir. Söz konusu şartların sağlandığı fonksiyonlar bulunarak çözüme gidilir. Problemi ifade etmekte yararlanılan söz konusu fonksiyonlar, bir veya daha yüksek mertebeden türevler ya da kesirli türevler içerebilir.

Bir veya daha fazla değişkenin kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli diferansiyel denklem denir. Kesirli diferansiyel denklemler, tam sayı türevleri yerine, kesirli türevlere sahip olan diferansiyel denklemlerdir (Benghorbal, 2004).

Kesirli diferansiyel denklemler, matematik, fizik ve kimya gibi temel bilimlerde kullanılmasının yanı sıra diğer bilim dallarında da araştırmalarda yer bulmaktadır. Sivalingam ve ark. (2023) kesirli diferansiyel türevler için sinir ağları tabanlı nümerik bir çözüm geliştirmişlerdir. Cardone ve Conte (2020) söz konusu denklemler için kararlılık analizini irdilemiştir. Wang ve ark. (2020) otomatik siber güvenlik konusunda bulanık mantık içeren kesirli diferansiyel denklemler uygulamasını incelemişlerdir. Günümüze gelene kadar bazı matematikçiler çok farklı kesir türevli diferansiyel denklem tanımları veya yaklaşımları yapılmıştır. Karcı (2015) çalışmasında bunlardan üç tanesi olan Euler, Riemann-Liouville ve Caputo yaklaşımlarının yetersizliklerini tartıştıktan sonra bu denklemlere kendi tanımını vermiştir. Γ (Gama) fonksiyonunu göstermek üzere literatürde sıklıkla karşılaşılan iki adet kesir türev tanımı Khalil ve ark. (2014) tarafından verilmiştir. Bunlardan birincisi olan Riemann-Liouville tanımına göre kesir türev,

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dx \quad (1)$$

olarak verilirken, Caputo tarafından verilen tanım ise;

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dx \quad (2)$$

şeklindedir. Her iki tanımda α türevin mertebesini göstermek üzere $[n-1, n)$ aralığındadır.

Kesir türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için literatürde çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Arıkoğlu ve Özkol (2007) Kesir Türevli Diferansiyel Dönüşüm (FDTM) yöntemini, Momani ve Odibat (2007) Adomian Ayırıklaştırma Yöntemini (ADM), Odibat ve Momani (2008) Uyarlanmış Homotopi Pertürbasyon Yöntemini, Hosseinnia ve ark. (2008) İyileştirilmiş Homotopi pertürbasyon Yöntemini, Cang ve ark. (2009) Homotopi Analiz Yöntemini, Li ve Sun (2011) Genelleştirilmiş Blok Darbe İşlem Matrisi Yöntemini, Li ve ark. (2014) Haar Dalgacık İşlem Matrisi Yöntemini, Albadarneh ve ark. (2016) Kesirli Sonlu Farklar Yöntemini, Zhijunve ark. (2018) Legendre polinomlarını, Daraghme ve ark. (2020) Homotopi Pertürbasyon ve Matris yaklaşımı yöntemlerini, Fathy ve Abdelgaber (2022) Galerkin yöntemini, kullanarak çeşitli kesir türevli denklemleri çözmüşlerdir.

Bu çalışmada ise kollokasyon yöntemi kullanılarak, lineer ve lineer olmayan yedi farklı kesir türevli diferansiyel denklemin sayısal çözümleri bulunmuş ve literatürde mevcut sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bulunan sonuçlar, kollokasyon yönteminin kesir türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için etkili, güvenilir ve yüksek doğruluk sağlayan bir yaklaşım olduğunu göstermektedir.

2. Materyal ve Metot

Kesir türevli bir sınır değer problemi $f(x)$ homojenliği bozan terimler olmak üzere,

$$D^\alpha y(x) - f(x) = 0$$

$$y(x_1) = a \tag{3}$$

$$y(x_2) = b$$

şeklinde gösterilebilir. Burada D^α kesir türev operatörüdür. Bu denklemin yaklaşık çözümü;

$$\hat{y}(x) = \sum_{n=1}^N C_n x^n \tag{4}$$

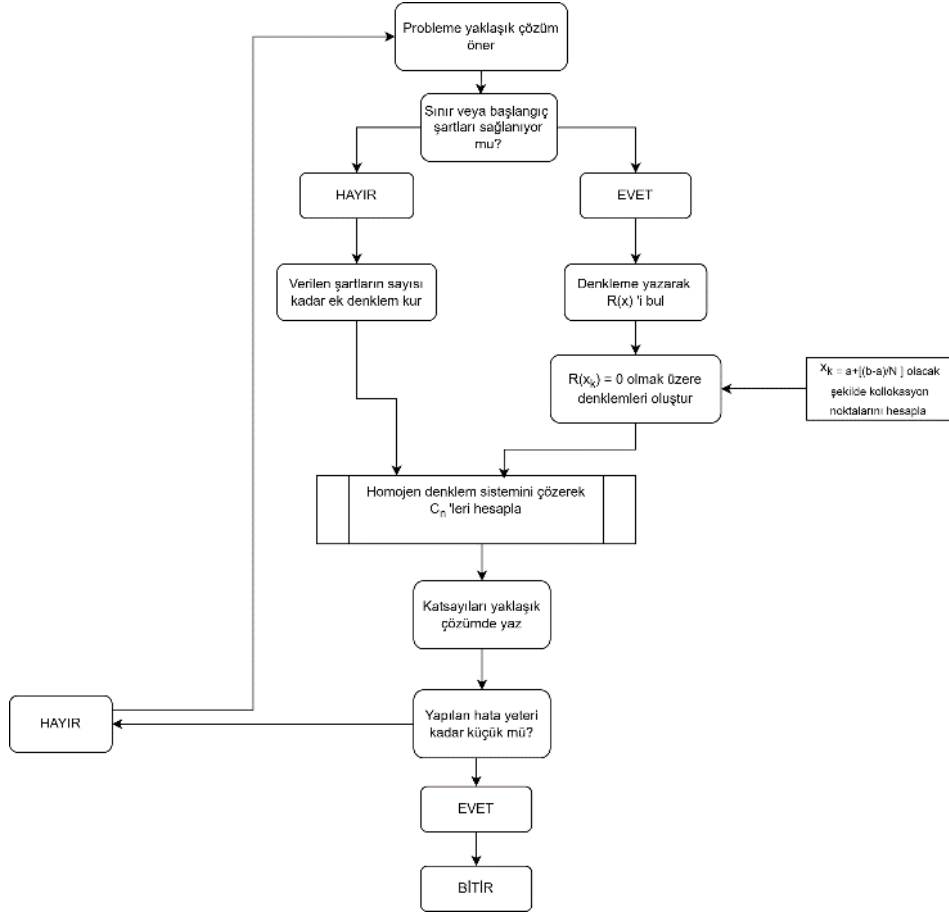
şeklinde olsun. Denklem (4), denklem (3)' te yerine yazılırsa kalan (residual) $R(x)$ ifadesini veren denkleme ulaşılır.

$$R(x) = D^\alpha \hat{y}(x) - f(x) = D^\alpha [\sum_{n=1}^N C_n x^n] - f(x). \tag{5}$$

Kollokasyon yönteminde, $R(x)$ kalan ifadesi belirlenen ve kollokasyon noktası olarak adlandırılan noktalarda sıfıra eşitlenerek çözümü denklem (5)'teki bilinmeyen katsayıları verecek olan bir denklem sistemi kurulur. x_k kollokasyon noktaları olmak üzere bu sistem,

$$R(x_k) = D^\alpha \hat{y}(x) - f(x_k) = D^\alpha \left[\sum_{n=1}^N C_n x_k^n \right] - f(x_k) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \tag{6}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer incelenen problem bir başlangıç değer problemi ise benzer işlem adımları uygulanacaktır. Ancak kollokasyon noktaları probleme uygun seçilmelidir. Şekil 1’de kollokasyon yönteminin bir sınır veya başlangıç değer problemine uygulanma algoritması gösterilmiştir.



Şekil 1. Kollokasyon yönteminin algoritması

Birinci test problemi olarak Arıkoğlu ve Özkol (2007) tarafından Kesirli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle çözülen problem ele alınsın,

$$D^{0,5}y(x) = -y(x) + x^2 + \frac{2}{\Gamma(2.5)}x^{1,5}, \quad y(0) = 0. \quad (7)$$

(7) denklemi ile verilen problemin analitik çözümü $y(x) = x^2$ 'dir. Verilen sınır şartı dikkate alınırsa (7) denkleminin yaklaşık çözümü

$$y(x) = \sum_{n=1}^3 C_n x^n \quad (8)$$

olarak alınabilir. Bu yaklaşık çözüm (7) denkleminde yerine yazılırsa kalan:

$$R(x) = -1,504505556x^{1,5} - x^2 + xC_1 + x^2C_2 + x^3C_3 + \frac{2\sqrt{x}(15C_1 + 4x(5C_2 + 6xC_3))}{15\sqrt{\pi}} \quad (9)$$

olarak bulunur. (9) denkleminde bilinmeyen katsayılar; C_1, C_2, C_3 değerlerini bulmak için, öncelikle kollokasyon noktaları; $x \in [0,1]$ olduğu kabul edilmiş ve üç kollokasyon noktası $x_0 = 0,25$, $x_1 = 0,50$ ve $x_2 = 0,75$ olarak seçilmiştir. Bu değerler sırasıyla denklem (9)' a yazılarak her bir denklem ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse;

$$\begin{aligned}
 0,25C_1 + 0,0625C_2 + 0,015625C_3 + 0,037612638903183574(15C_1 + 5C_2 + 1,5C_3) \\
 = 0,2505631945159188 \\
 0,5C_1 + 0,25C_2 + 0,125C_3 + 0,05319230405352436(15C_1 + 2(5C_2 + 3C_3)) \\
 = 0,7819230405352436 \\
 0,75C_1 + 0,5625C_2 + 0,421875C_3 + 0,06514700157705598 \\
 + (15C_1 + 3(5C_2 + 4,5C_3)) = 1,53970502380584
 \end{aligned} \tag{10}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümüyle aranan yaklaşık çözüm için bilinmeyen katsayılar, $C_1 = 2,987 \times 10^{-16}$, $C_2 = 1$ ve $C_3 = 6,541 \times 10^{-16}$ olarak bulunur. Çok küçük olan katsayılar ihmal edilerek denklem (8)' e yazılırsa (7) denklemini ile verilen problemin yaklaşık çözümü;

$$y(x) = x^2 \tag{11}$$

olarak bulunur. Bu çözüm verilen problemin analitik çözümüdür.

İkinci test problemi olarak Kesirli Sonlu Farklar Yöntemiyle (FFDM) çözülen ve kesin çözümü $y(x) = x^2$ olan,

$$D^2y(x) + D^{1,5}y(x) + y(x) = x^2 + 2 + 4\sqrt{\frac{x}{\pi}}, \quad y(0) = 0 \tag{12}$$

problemi olarak seçelim (Albadarneh ve ark., 2016). Bu problemin yaklaşık çözümü denklem (8) deki gibi üçüncü dereceden bir polinom olarak seçilmiş olsun. $R(x)$ kalan ifadesi oluşturulup $x_0 = 0,25$, $x_1 = 0,50$ ve $x_3 = 0,75$ olan kollokasyon noktalarında sıfıra eşitlenirse, aranan yaklaşık çözümün katsayıları sırasıyla $C_1 = -1,676 \times 10^{-16}$, $C_2 = 1$, $C_3 = -1,101 \times 10^{-17}$ olarak bulunur. Birinci problemdeki gibi çok küçük olan katsayılar ihmal edilirse denklem (6) ile verilen denklemin yaklaşık çözümü kesin çözümü olan $y(x) = x^2$ 'ye eşit olacaktır.

Üçüncü test problemi Homotopi Pertürbasyon ve Matris yaklaşımı yöntemleriyle incelenmiş olan

$$D^\alpha y(x) + y(x) = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} x^{2-\alpha} + x^2, \quad y(0) = y'(0) = 0 \tag{13}$$

Diferansiyel denklemi olarak seçilsin (Daraghme ve ark., 2020). Bu denklemin $\alpha = 1,9$ için olan çözümü $y(x) = x^2$ 'dir. Başlangıç koşullarına dikkat edilirse aranan yaklaşık çözüm;

$$y(x) = \sum_{n=2}^N C_n x^n \tag{14}$$

şeklinde olacaktır. Burada N kollokasyonda kullanılan polinomun en yüksek derecesini göstermektedir. Bu problemin farklı kollokasyon noktaları için bulunan yaklaşık çözümleri aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$\begin{aligned}
y_5 &= 0,9999999999999986x^2 + 1,889120086245991 \times 10^{-15}x^3 - 3,640636510310997 \\
&\quad \times 10^{-15}x^4 + 3,409117141967403 \times 10^{-15}x^5 - 1,147227297973183 \\
&\quad \times 10^{-15}x^6 \\
y_{10} &= 1,00000000000001166x^2 - 1,270412891612913 \times 10^{-12}x^3 \\
&\quad + 7,753965674030095 \times 10^{-12}x^4 - 2,972503162714075 \times 10^{-11}x^5 \\
&\quad + 7,480077415757217 \times 10^{-11}x^6 - 1,255543494558436 \times 10^{-10}x^7 \\
&\quad + 1,393630369084786 \times 10^{-10}x^8 - 9,826857124530411 \times 10^{-11}x^9 \\
&\quad + 3,987867009625851 \times 10^{-11}x^{10} - 7,092315911222479 \times 10^{-12}x^{11} \\
y_{15} &= 1,00000000000008316x^2 - 1,519994917014976 \times 10^{-11}x^3 + 1,671962890129303 \\
&\quad \times 10^{-10}x^4 - 1,235758699148621 \times 10^{-9}x^5 + 6,480624152770993 \\
&\quad \times 10^{-9}x^6 - 2,491277937095907 \times 10^{-8}x^7 + 7,157604362849433 \\
&\quad \times 10^{-8}x^8 - 1,552143570175235 \times 10^{-7}x^9 + 2,544835981531875 \\
&\quad \times 10^{-7}x^{10} - 3,134078504571956 \times 10^{-7}x^{11} + 2,851598735146423 \\
&\quad \times 10^{-7}x^{12} - 1,858245286941418 \times 10^{-7}x^{13} + 8,198663870204452 \\
&\quad \times 10^{-8}x^{14} - 2,192744337849018 \times 10^{-8}x^{15} + 2,68312571560829 \\
&\quad \times 10^{-9}x^{16} \\
y_{20} &= 0,9999999999366677x^2 + 1,706452351603294 \times 10^{-9}x^3 - 2,864601367622546 \\
&\quad \times 10^{-8}x^4 + 3,335419280618379 \times 10^{-7}x^5 \\
&\quad - 0,000002847466021534311x^6 + 0,000018460473358025377x^7 \\
&\quad - 0,00009306561158607585x^8 + 0,00037081686804471396x^9 \\
&\quad - 0,001180568494634762x^{10} + 0,003023311683227036x^{11} \\
&\quad - 0,006246468068028557x^{12} + 0,010406664487407501x^{13} \\
&\quad - 0,013920287655965353x^{14} + 0,014820307853809932x^{15} \\
&\quad - 0,012377999263003321x^{16} + 0,007927639581486077x^{17} \\
&\quad - 0,0037557473713650145x^{18} + 0,001239212232174505x^{19} \\
&\quad - 0,00025410789275506627x^{20} + 0,000024372104062487827x^{21}
\end{aligned} \tag{15}$$

Dördüncü test problemi olarak Genelleştirilmiş blok darbe işlem matrisi (Generalized block pulse operational matrix) yöntemiyle çözülen lineer kesir türevli diferansiyel denklemi göz önüne alalım (Li ve Sun, 2011),

$$\begin{aligned}
D^2y(x) + D^\alpha y(x) + y(x) &= 8, \\
x > 0, \quad 0 < \alpha < 2, \quad y(0) &= 1, \quad y'(0) = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Bu problem $\alpha = 0,5$ değeri için Adomian ayrıklaştırma yöntemiyle (ADM) (Momani ve Odibat, 2007) ve Kesir türevli diferansiyel dönüşüm yöntemiyle (FDTM) çözülmüştür (Arıkoğlu ve Özkol, 2007). Başlangıç koşullarına göre bu problemin polinom temelli yaklaşık çözümü

$$y(x) = \sum_{n=2}^N C_n x^n \quad (17)$$

olarak alınmalıdır. Buna göre $N = 26$ için yaklaşık çözüm;

$$\begin{aligned} y_{25} = & 4,001x^2 - 0,100x^3 - 2,068x^4 + 7,075x^5 - 37,025x^6 + 175,579x^7 - 686,298x^8 \\ & + 2132,082x^9 - 5036,854x^{10} + 8153,068x^{11} - 5307,279x^{12} \\ & - 15340,761x^{13} + 62714,540x^{14} - 126100,573x^{15} + 170167,525x^{16} \\ & - 161658,626x^{17} + 107722,112x^{18} - 54138,044x^{19} + 35698,041x^{20} \\ & - 42155,511x^{21} + 43205,954x^{22} - 29183,334x^{23} + 12364,866x^{24} \\ & - 3023,719x^{25} + 328,453x^{26} \end{aligned} \quad (18)$$

şeklinde bulunur. Kollokasyon yöntemi lineer olmayan kesir türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünde kullanılabilir. Beşinci test problemi olarak Legendre polinomları yöntemi ile çözülen, lineer olmayan kesir türevli;

$$\begin{aligned} D^\alpha y(x) = & \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)} x^{5-\alpha} + \frac{36}{\Gamma(5-\alpha)} x^{4-\alpha} - \Gamma(3+\alpha) x^2 - y(x) \\ & + \left(x^5 + \frac{3}{2} x^4 - 2x^{\alpha+2} \right)^2, \quad y(0) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

denklemini göz önüne alınsın (Zhijun ve ark., 2018). Bu diferansiyel denklemin kesin çözümü $y(x) = x^5 + \frac{3}{2} x^4 - 2x^{2+\alpha}$ şeklindedir. $\alpha = 0,6$ için ve 10 kollokasyon noktası alınarak bulunan yaklaşık çözüm aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$\begin{aligned} y_{10} = & 0,770657x^{10} - 4,23236x^9 + 10,3312x^8 - 14,8412x^7 + 14,0627x^6 \\ & - 8,45571x^5 + 6,49072x^4 - 3,37867x^3 - 0,252208x^2 + 0,00494825x \end{aligned} \quad (20)$$

Altıncı test problemi olarak, yine doğrusal olmayan;

$$\begin{aligned} D^\alpha y(x) + y^2(x) &= 1, \\ 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

problemi göz önüne alınsın. Bu problem, Legendre polinomlarını esas alan Galerkin yöntemi (L-G) (Fathy ve Abdelgaber, 2022), uyarlanmış homotopi pertürbasyon (MHPM- modified homotopy perturbation method) , (Odibat ve Momani, 2008), iyileştirilmiş homotopi pertürbasyon (EHPM- enhanced homotopy perturbation) (Hosseinnia ve ark., 2008), homotopy analiz metodu (HAM- homotopy analysis method) (Cang ve ark., 2009), Haar dalgacık işlem matrisi (HWOMM- Haar wavelet operational matrix method) (Li ve ark., 2014), polinom en küçük kareler (PLSM- polynomial least squares method) (Bota ve Căruntu, 2017) gibi farklı yöntemlerle de çözülmüştür. Denklem (21) ile verilen bu problemin yaklaşık çözümü dokuzuncu dereceden bir polinom olarak alınırsa $\alpha = 0,75$ ve $\alpha = 0,90$ olmak üzere kollokasyon yöntemi ile çözümleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
y_9(x) &= 13,595x^9 - 66,989x^8 + 143,776x^7 - 176,586x^6 + 137,217x^5 - 70,639x^4 \\
&\quad + 24,980x^3 - 6,896x^2 + 2,280x \\
y_9(x) &= 2,296x^9 - 11,589x^8 + 25,595x^7 - 32,536x^6 + 26,273x^5 - 13,930x^4 + 4,899x^3 \\
&\quad - 1,642x^2 + 1,387x
\end{aligned} \tag{22}$$

şeklinde bulunur.

Yedinci ve son test problemi olarak ise, aşağıda verilen doğrusal olmayan problem incelensin. Bu problem polinom en küçük kareler (PLSM- polynomial least squares method) yöntemiyle çözülmüştür (Bota ve Căruntu, 2017).

$$D^{0.5}y(x) + y(x) + y^2(x) = \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} + x^2 + x^4, \tag{23}$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0.$$

Problemin yaklaşık çözümü;

$$y(x) = \sum_{n=1}^3 C_n x^n \tag{24}$$

olarak kabul edilirse, elde edilen denklem sistemi doğrusal olmadığından, bilinmeyen katsayılar (C_n) için birden fazla çözüm mevcuttur:

$$\begin{array}{lll}
C_1 = -24,231 & C_2 = 71,457 & C_3 = -60,591 \\
C_1 = -27,473 & C_2 = 100,622 & C_3 = -95,595 \\
C_1 = -13,457 & C_2 = 65,169 & C_3 = -73,766 \\
C_1 = 0 & C_2 = 0,999 & C_3 = 0
\end{array} \tag{25}$$

Bu çözümlerden sonuncusu (23) denkleminin kesin çözümü olan $y(x) = x^2$ 'yi vermektedir. Problemin lineer olmadığı durumlarda, uygun yaklaşık çözüm için bulunan katsayılardan, reel olanlardan mutlak değerce en küçüklerini içeren katsayı grubunu kullanmak gereklidir.

3. Bulgular ve Tartışma

Bu bölümde, bir önceki bölümde kollokasyon metodu ile yaklaşık çözümleri bulunan üçüncü ve dördüncü test problemleri, literatürde bulunan mevcut çözümler ile kıyaslanmıştır.

Tablo 1 (13) denklemi ile verilen (Üçüncü test problemi) denklemin Daraghme ve ark. (2020) tarafından yapılan çözümü ve çeşitli N değerleri için kollokasyonla bulunan farklı yaklaşık çözümlerinde yapılan mutlak hataları göstermektedir. Kollokasyon ile yapılan çözümlerin yeterince hassas olduğu gözlemlenmektedir.

Tablo 1. Denklem (13) ile verilen problemin yaklaşık çözümünde farklı N'ler için yapılan mutlak hatalar
Kollokasyon çözümlerindeki mutlak hatalar

x	Kesin Çözüm	Mutlak Hata Ref.[9]	N=5	N=10	N=15	N=20
0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,01	1,378x10-3	1,214x10-17	4,388x10-16	2,052x10-15	1,104x10-13
0,2	0,04	2,310x10-3	4,857x10-17	8,812x10-16	4,052x10-15	2,152x10-13
0,3	0,09	3,460x10-3	8,326x10-17	1,262x10-15	5,870x10-15	3,117x10-13
0,4	0,16	5,259x10-3	1,665x10-16	1,609x10-15	7,521x10-15	4,011x10-13
0,5	0,25	8,068x10-3	2,498x10-16	1,887x10-15	8,992x10-15	4,834x10-13
0,6	0,36	1,213x10-2	3,330x10-16	2,109x10-15	1,032x10-14	5,587x10-13
0,7	0,49	1,755x10-2	4,996x10-16	2,220x10-15	1,143x10-14	6,263x10-13
0,8	0,64	2,418x10-2	5,551x10-16	2,331x10-15	1,265x10-14	6,861x10-13
0,9	0,81	3,159x10-2	8,881x10-16	2,553x10-15	1,332x10-14	7,377x10-13
1	1	3,901x10-2	9,992x10-16	2,224x10-15	1,398x10-14	7,548x10-13

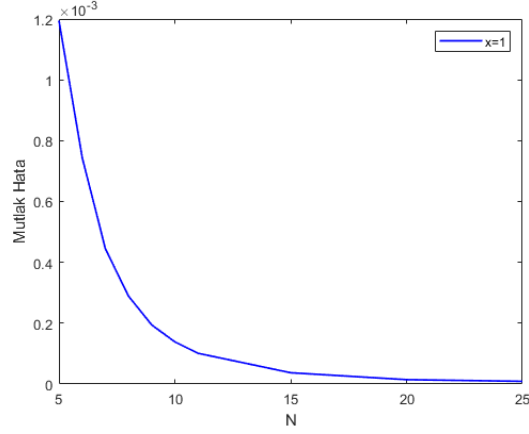
Tablo 2, Denklem (16) ile verilen dördüncü test probleminin analitik çözümü, kollokasyon yöntemi ile çözümü ve literatürde mevcut diğer yöntemlerle bulunan çözümlerini göstermektedir. Çözümler arasındaki uyum kollokasyon yönteminin etkinliğini göstermektedir.

Tablo 2. Denklem (16) ile verilen problemin kollokasyon çözümü ile diğer yöntemlerin karşılaştırılması

x	Kesin Çözüm	GBPO (Li ve Sun, 20011)	FDTM (Arıkoğlu ve Özkol, 2007)	ADM (Momani ve Odibat, 2007)	Kollokasyon (N=25 için)
0,1	0,03975	0,039754	0,03975	0,039874	0,039751
0,2	0,157036	0,157043	0,157036	0,158512	0,157038
0,3	0,34737	0,347373	0,34737	0,353625	0,347374
0,4	0,604695	0,604699	0,604695	0,622083	0,6047
0,5	0,921768	0,921768	0,921768	0,960047	0,921774
0,6	1,290,457	1,290,458	1,290,457	1,363,093	1,290,464
0,7	1,702,008	1,702,007	1,702,008	1,826,257	1,702,016
0,8	2,147,287	2,147,286	2,147,287	2,344,224	2,147,296
0,9	2,617,001	2,616,998	2,617,001	2,911,278	2,617,010
1	3,101,906	3,101,902	3,101,906	3,521,462	3,101,914

Denklem (16) ile verilen problemde en büyük mutlak hata $x=1$ noktasında olmaktadır. Şekil 2 de $x=1$ noktasında, mutlak hatanın yaklaşık çözüm için seçilen polinomun derecesi ile değişimi verilmiştir. Polinomun derecesi arttıkça mutlak hatanın azaldığı görülmektedir. Bu sayede kollokasyon yöntemi ile

daha hassas çözümler elde edilebilir. Ancak kollokasyon noktalarının çözüm için gerekli hesaplama yükünü arttırdığı göz önünde bulundurulmalıdır.



Şekil 1. Polinom derecesinin artışıyla en büyük mutlak hatadaki değişim

Tablo 3, 10 kollokasyon noktası alınarak $\alpha=0,25$ için bulunan yaklaşık çözüm değerlerini ve nokta bazında yapılan mutlak hataları göstermektedir.

Tablo 3. Dördüncü test probleminde $\alpha=0,25$ için noktasal olarak yapılan mutlak hata değerleri

x	Kesin Çözüm	Kollokasyon	Mutlak Hata
0	0	0	0
0,1	-0,0110868	-0,0110742	1,26189x10-5
0,2	-0,0507792	-0,0507726	6,61847x10-6
0,3	-0,1186349	-0,1186297	5,11213x10-6
0,4	-0,2058466	-0,2058418	4,82766x10-6
0,5	-0,2954482	-0,2954433	4,87186x10-6
0,6	-0,3615204	-0,361515	5,37800x10-6
0,7	-0,3681773	-0,3681719	5,45695x10-6
0,8	-0,2684692	-0,2684639	5,29380x10-6
0,9	-0,003246	-0,0032445	1,47763x10-6
1	0,5	0,5001679	1,67955x10-4

Tablo 4 ve Tablo 5 te kollokasyon çözümleriyle denklem (16) ile verilen non-lineer problemin (üçüncü test problemi) çeşitli yöntemlerle bulunan çözümleri farklı x değerleri için karşılaştırılmıştır. Kollokasyon yöntemi ile bulunan çözümler diğer yöntemler ile bulunan çözümler ile uyum içersindedir.

Tablo 4. Denklem (13) ile verilen problemin $\alpha=0,75$ için kollokasyon çözümü ile diğer yöntemlerin karşılaştırılması

x	MHPM	EHPM	HWOMM	PLSM	Legendre Galerkin	Kollakasyon
0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,3138	0,3214	0,3095	0,307	0,3091	0,3012
0,4	0,4929	0,5077	0,4814	0,4819	0,4803	0,4759
0,6	0,5974	0,6259	0,5977	0,5969	0,5995	0,5938
0,8	0,6604	0,7028	0,6788	0,6783	0,6774	0,676
1	0,7183	0,7542	0,7368	0,7365	0,7374	0,7367

Tablo 5. Denklem (13) ile verilen problemin $\alpha=0,90$ için kollokasyon çözümü ile diğer yöntemlerin karşılaştırılması

x	MHPM	EHPM	PLSM	Legendre Galerkin	Kollakasyon
0	0	0	0	0	0
0,2	0,2391	0,2647	0,2369	0,2386	0,2353
0,4	0,4229	0,4591	0,4211	0,4224	0,4198
0,6	0,5653	0,6031	0,5651	0,566	0,564
0,8	0,674	0,7068	0,6738	0,6745	0,673
1	0,7569	0,7806	0,7541	0,7545	0,7536

4. Sonuçlar

Mevcut çalışmada kesir türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için kollokasyon yöntemi kullanılmıştır. Yöntem incelenen problemleri kollokasyon noktalarından yararlanarak bir denklem sistemine dönüştürme ve çözme şansı vermektedir.

Çalışmada ele alınan lineer olmayan problemler için, yaklaşık çözüm katsayılarının hesaplanma süresi, lineer problemlere kıyasla daha uzun sürmektedir. Bu durum, lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümünü hızlandırabilecek algoritmalar veya sayısal yöntemler kullanılarak aşılabılır. Tablo 1 incelendiğinde, Daraghme ve ark. (2020) tarafından elde edilen çözümlere göre daha küçük mutlak hataların bulunması için beş kollokasyon noktasının yeterli olduğu görülmektedir. Dördüncü test problemi için oluşturulan Tablo 2'ye göre, bu yöntemle elde edilen değerler diğer çalışmalar ile uyumludur.

Kollokasyon yönteminin daha basit işlem adımlarına sahip olması, değerlendirilen diğer üç yönteme kıyasla önemli bir avantaj sağlamaktadır. Şekil 2'de görüldüğü gibi, en büyük mutlak hata, kollokasyon

nokta sayısının artırılmasıyla azaltılmıştır. Birinci, ikinci ve son problemde olduğu gibi, bu yöntemle bazı durumlarda analitik çözüme ulaşmak mümkündür.

Yaklaşık çözüm olarak her ne kadar polinomlar önerilmiş olsa da kollokasyon yöntemi uygulanırken probleme bağlı olarak farklı türde fonksiyonlar kullanılabilir. Kollokasyon başlangıç değer problemleri için kullanılırken problemlerin alındığı referanslardaki gibi x değerleri 0 ve 1 arasında değiştirilmiştir. Yöntemin en az bir tane sınırın sonsuz olduğu problemlere uygulanmasında öncelikle bir değişken dönüşümü yapılarak sınırlardaki bu durumun ortadan kaldırılması uygun bir yaklaşım olacaktır. İncelenen problemlerden bazıları için kesin ve bazılarına ise uygun yaklaşık çözümlerin bulunabilmesi kullanılan bu yöntemin etkinliğini göstermektedir. Uygulanması ve programlanması kolay olan kollokasyon yöntemi sonraki çalışmalarda başta kesir türevli integro diferansiyel denklemler içerenler olmak üzere farklı türde problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılabilir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makale yazarları aralarında herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyan Özeti

Yazarlar makaleye eşit oranda katkı sağlamış olduklarını beyan ederler.

Kaynakça

- Albadarneh RB., Batiha IM., Zurigat M. Numerical solutions for linear fractional differential equations of order $1 < \alpha < 2$ using finite difference method (FFDM). Journal of Mathematics and Computer Science 2016; 16(1): 103-111.
- Arıkoğlu A., Özkol İ. Solution of fractional differential equations by using differential transform method. Chaos, Solitons & Fractals 2007; 34(5): 1473-1481.
- Benghorbal MM. Power series solutions of fractional differential equations and symbolic derivatives and integrals. Ph.D. dissertation, Faculty of Graduate Studies, The University of Western Ontario, Canada, 2004.
- Bota C., Căruntu B. Analytical approximate solutions for quadratic Riccati differential equation of fractional order using the Polynomial Least Squares Method. Chaos, Solitons & Fractals 2017; 102: 339-345.
- Cang J., Tan Y., Xu H., Liao SJ. Series solutions of non-linear Riccati differential equations with fractional order. Chaos, Solitons & Fractals 2009; 40(1): 1-9.
- Cardone A., Conte D. Stability analysis of spline collocation methods for fractional differential equations. Mathematics and Computers in Simulation 2020; 178: 501-514.
- Daraghme A., Qatanani N., Saadeh A. Numerical solution of fractional differential equations. Applied Mathematics 2020; 11: 1100-1115.

- Fathy M., Abdelgaber KM. Approximate solutions for the fractional order quadratic Riccati and Bagley-Torvik differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals* 2022; 162: 112496.
- Hosseinnia SH., Ranjbar A., Momani S. Using an enhanced homotopy perturbation method in fractional differential equations via deforming the linear part. *Computers & Mathematics with Applications* 2008; 56(12): 3138-3149.
- Karcı A. Kesir dereceli türevin yeni yaklaşımının özellikleri. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi* 2015; 30(3): 487-501.
- Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2014; 264: 65-70.
- Li Y., Sun N. Numerical solution of fractional differential equations using the generalized block pulse operational matrix. *Computers & Mathematics with Applications* 2011; 62(3): 1046-1054.
- Li Y., Sun N., Zheng B., Wang Q., Zhang Y. Wavelet operational matrix method for solving the Riccati differential equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 2014; 19(3): 483-493.
- Momani S., Odibat Z. Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order. *Chaos, Solitons & Fractals* 2007; 31(5): 1248-1255.
- Odibat Z., Momani S. Modified homotopy perturbation method: application to quadratic Riccati differential equation of fractional order. *Chaos, Solitons & Fractals* 2008; 36(1): 167-174.
- Sivalingam SM., Pushpendra K., Govindaraj V. A neural networks-based numerical method for the generalized Caputo-type fractional differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation* 2023; 213: 302-323.
- Wang Z., Chen L., Song S., Cong PX., Ruan Q. Automatic cyber security risk assessment based on fuzzy fractional ordinary differential equations. *Alexandria Engineering Journal* 2020; 59(4): 2725-2731.
- Zhijun M., Mingzu Y., Huang J., Lei S. Numerical solutions of nonlinear fractional differential equations by alternative Legendre polynomials. *Applied Mathematics and Computation* 2018; 336: 454-464.