C.B.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1305-1385 C.B.U. Journal of Science
6.2 (2010) 83 – 88 6.2 (2010) 83 –88

FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLİRLİĞİ

Abdullah SÖNMEZOĞLU [1*] , Ayşe Gül KAPLAN [2]

[1] Bozok Üniversitesi Matematik Bölümü, 66100 Yozgat

[2] Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Matematik Bölümü, 80100 Osmaniye

Özet : Bu çalışmada, $k \geq 2$ olmak üzere (p_n) ve (q_n) pozitif dizileri için $(-\pi, \pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu periyodik f fonksiyonunun Fourier serisinin $|N, p_n, q_n|_k$ toplanabilmesi hakkında bir teorem ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Fourier serileri,Toplanabilme, Mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme.*

ON ABSOLUTE GENERALIZED NÖRLUND SUMMABILITY OF THE FOURIER SERIES

Abstract : In this paper , a theorem about $|N, p_n, q_n|_k$ summability of Fourier series of periodic f function which has 2π period and integrable in the mean of Lebesgue in the interval $(-\pi, \pi)$ for positive sequences (p_n) and (q_n), is proved where $k \geq 2$.

Key Words: *Fourier series, Summability, Absolute generalized Nörlund summability,.*

2000 MSC Numbers : Primary 40F05, Secondary 42A24.

---

*Sorumlu yazar

abdullah.sonmezoglu@bozok.edu.tr

1. GİRİŞ

Bu makalede esas olarak $(-\pi,\pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu periyodik bir f fonksiyonun Fourier serisinin kısmı toplamlar dizisinin $|N,p_n,q_n|_k$ mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilmesi ele alınmıştır. Bu çalışma, [1] de yapılan Fourier serilerinin Nörlund toplanabilmesi ve [2] de yapılan Fourier serilerinin mutlak Nörlund toplanabilmesi ile ilgili çalışmalardan yararlanılarak yapılmıştır.

Çalışmada bahsedilen ve [3] de tanımlanan Nörlund toplanabilme, diziden diziye bir özel dönüşüm metodu ancak mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme ise Nörlund toplanabilme yardımıyla oluşturulan özel bir serinin yakınsaklığıdır.

Çalışma boyunca $t\in(0,\pi)$ olmak üzere

i) $D_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\cos kt$

ii) $\phi(t)=\dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$

iii) $\Delta r_n=r_n-r_{n-1}$

gösterimlerini kullanacağız.

Ayrıca bir ϕ fonksiyonunun $(0,\pi)$ aralığında sınırlı salınımlı olması

$$\phi(t)\in BV(0,\pi)$$

gösterimiyle , bir (a_n) dizisinin sınırlı olması

$$a_n=O(1)$$

sembolüyle ve $\sum a_n$ serisinin mutlak yakınsak olması ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$$

ile gösterilecektir.

Bunların dışında K, her durumda aynı olması gerekmeyen pozitif sabiti gösterecektir.

Tanım 1. f fonksiyonu $(-\pi,\pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu bir fonksiyon olsun.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

ve

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

trigonometrik serisine f fonksiyonunun Fourier serisi veya f fonksiyonuna karşılık getirilen Fourier serisi denir ve

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad (1)$$

şeklinde gösterilir. [4].

Tanım 2. (p_n) ve (q_n) herhangi iki dizi olmak üzere

$$r_n=\sum_{v=0}^{n}p_{n-v}q_v,$$

$$r_{-1}=p_{-1}=q_{-1}=0$$

olsun. Diğer taraftan $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olmak üzere, (s_n) dizisinden (t_n) dizisine

$$t_n = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v \qquad (2)$$

ile tanımlanan dönüşüme genelleştirilmiş Nörlund dönüşümü denir ve (N, p, q) ile gösterilir.

Eğer $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ ise, $\sum a_n$ serisine veya (s_n) dizisine s değerine genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirdir denir ve $s_n \to s(N, p_n, q_n)$ ile gösterilir . [5].

Tanım 3. $k > 0$ **ve** $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ olmak üzere t_n, (2) deki gibi tanımlansın.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{r_n}{\Delta r_n}\right|^{k-1}\left|t_n - t_{n+1}\right|^k < \infty \qquad (3)$$

ise $\sum a_n$ serisine s değerine mutlak $(N, p_n, q_n)_k$ veya $|N, p_n, q_n|_k$ toplanabilirdir denir. [3].

2.ESAS SONUÇLAR

[6] de ispatlanan aşağıdaki teorem, $0 < k < 1$ için periyodik bir f fonksiyonun Fourier serisinin $|N, p_n, q_n|_k$ toplanabilmesi ile ilgilidir.

Teorem 1.

i) $\phi(t) = \dfrac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \in BV(0,\pi)$

ii) (p_n), monoton azalan pozitif bir dizi

iii) (q_n), monoton artan pozitif bir dizi

iv) (r_n), $n \to \infty$ iken $r_n \to \infty$ olacak şekilde bir dizi

v) $q_n = O\left(\dfrac{r_n}{2^n}\right)$

şartları sağlansın. Bu takdirde $(-\pi,\pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu f fonksiyonunun Fourier serisi $0 < k < 1$ için düzgün olarak $|N, p_n, q_n|_k$ toplanabilirdir.

Bu çalışmada ise, Teorem 1 deki $\phi \in BV(0,\pi)$ dışındaki hipotezleri kaldırıp yerine başka hipotezler koyarak $k \ge 2$ için periyodik bir f fonksiyonun Fourier serisinin $|N, p_n, q_n|_k$ toplanabilmesi ispatlandı.

Teoremimizi ifade etmeden önce teoremin ispatında kullanacağımız aşağıdaki Lemmayı verelim.

Lemma 2.

m ve n, $n \ge m$ olacak şekilde pozitif tamsayılar olsunlar. $0 < t \le \pi$ için düzgün olarak

$$\left|\sum_{v=m}^{n}\frac{\sin vt}{v}\right| \le K$$

olacak şekilde $K \ge 0$ sayısı vardır. [7].

Çalışmamızın esasını oluşturan aşağıdaki Teoremi verelim.

Teorem 3.
(p_n) ve (q_n) negatif olmayan diziler olmak üzere r_n ,Tanım 2 deki gibi tanımlansın. $o \le j \le n-1$ için $\left(\dfrac{p_{n-j}}{r_n}\right)$ artmayan ve (r_n) de azalmayan diziler olsun. Bunlara ek olarak

$$\phi(t) \in BV(0,\pi), \tag{4}$$

ve $k \ge 2$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} (q_n)^{\frac{k^2}{k-1}} < \infty, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(r_n)^k (\Delta r_{n-1})^{k^2-k}} < \infty, \tag{6}$$

şartları sağlansın. Bu durumda $(-\pi,\pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu bir $f(t)$ fonksiyonunun Fourier serisi $k \ge 2$ için $t = x$ noktasında $|N, p_n, q_n|_k$ toplanabilirdir.

İspat.

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=0}^{n} p_v q_{n-v}$$

olup (p_n) ve (q_n) negatif olmayan diziler olduğundan (r_n) de negatif olmayan bir dizidir. Ayrıca genelliği bozmaksızın $f(t)$ nin (1) deki Fourier serisinde $a_0 = 0$ olarak seçelim.

$(s_n(x))$, (1) serisinin kısmı toplamlar dizisi olmak üzere

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \cos kx dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \sin kx dt \right)$$

$$=$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} f(x+t) \cos ktdt + \int_{0}^{\pi} f(x-t) \cos ktdt \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \phi(t) \sum_{k=1}^{n} \cos ktdt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \phi(t) D_n(t) dt$$

elde edilir.

(r_n) negatif olmayan dizi olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{r_n}{\Delta r_n} \right|^{k-1} |t_n - t_{n+1}|^k =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_{n-1}}{|\Delta r_{n-1}|} \right)^{k-1} |t_n - t_{n-1}|^k$$

yazılabilir.

Amacımız $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_{n-1}}{|\Delta r_{n-1}|} \right)^{k-1} |t_n - t_{n-1}|^k < \infty$$

olduğunu göstermektir.

Öncelikle

$$t_n - t_{n-1} = \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v - \frac{1}{r_{n-1}} \sum_{v=0}^{n-1} p_{n-v-1} q_v s_v = \sum_{v=0}^{n} \left(\frac{p_{n-v}}{r_n} - \frac{p_{n-v-1}}{r_{n-1}} \right) q_v s_v$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \phi(t) \left[\sum_{v=0}^{n} \left(\frac{p_{n-v}}{r_n} - \frac{p_{n-v-1}}{r_{n-1}} \right) q_v D_v(t) \right] dt$$

olup, Abel dönüşümünü ve toplamların sırasını değiştirme kuralını kullanarak

$$\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{p_{n-v}}{r_n}-\frac{p_{n-v-1}}{r_{n-1}}\right)q_v D_v(t)=$$

$$\sum_{v=0}^{n-1}\Delta D_v(t)\sum_{j=0}^{v}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j+$$

$$D_n(t)\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j$$

$$=\sum_{v=0}^{n-1}\cos vt\sum_{j=0}^{v}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j+$$

$$D_n(t)\left[\frac{r_n}{r_n}-\frac{1}{r_{n-1}}\sum_{j=0}^{n-1}p_{n-j-1}q_j-\frac{p_{-1}q_n}{r_{n-1}}\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j\sum_{v=j}^{n-1}\cos vt$$

elde ederiz ve bunun sonucu olarak da

$$\Delta t_n=t_n-t_{n-1}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j\sum_{v=j}^{n-1}\cos vt\right]dt$$

olup kısmi integrasyon metodu kullanılarak

$$\Delta t_n=\frac{2}{\pi}\left\{\phi(t)\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j\sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin vt}{v}\right]\right\}_0^{\pi}$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j\sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin vt}{v}d\phi(t)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j\sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin vt}{v}\right]d\phi(t)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j\sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin vt}{v}\right]d\phi(t)$$

elde edilir. Böylece Lebesque integralinin tanımını kullanarak

$$|t_n-t_{n-1}|=\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j\sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin vt}{v}\right]d\phi(t)\right|$$

$$\leq\left(\frac{2}{\pi}\right)\left[\int_0^{\pi}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right)q_j\sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin vt}{v}\right||d\phi(t)|\right]$$

$$\leq\left(\frac{2}{\pi}\right)\left[\int_0^{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|q_j\left|\sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin vt}{v}\right||d\phi(t)|\right]$$

elde ederiz.
Lemma 2 ve (4) hipotezini kullanarak

$$|t_n-t_{n-1}|=O(1)\left[\int_0^{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|q_j|d\phi(t)|\right]$$

$$=O(1)\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|q_j\int_0^{\pi}|d\phi(t)|.$$

yazılabilir. Ayrıca $\left(\frac{p_{n-j}}{r_n}\right)$ artmayan dizi olduğundan

$$|t_n-t_{n-1}|=O(1)\sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{p_{n-j}}{r_n}-\frac{p_{n-j-1}}{r_{n-1}}\right|q_j$$

$$=O(1)\sum_{j=0}^{n-1}\frac{p_{n-j-1}q_j}{r_{n-1}}-O(1)\sum_{j=0}^{n-1}\frac{p_{n-j}q_j}{r_n}$$

$$=O(1)\left(\frac{p_0q_n}{r_n}\right)$$

elde edilir.

Diğer taraftan (r_n) azalmayan dizi olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{|\Delta r_{n-1}|}\right)^{k-1}|t_n-t_{n-1}|^k=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q_n)^k}{r_n(\Delta r_{n-1})^{k-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q_n)^k}{r_n (\Delta r_{n-1})^{k-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

serisine $k \geq 2$ için Hölder Eşitsizliğini uygularsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(r_n)^k (\Delta r_{n-1})^{k^2-k}} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (q_n)^{\frac{k^2}{k-1}} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

olup (5) ve (6) hipotezlerini de kullanırsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_{n-1}}{|\Delta r_{n-1}|} \right)^{k-1} |t_n - t_{n-1}|^k < \infty .$$

elde ederiz ki bu teoremin ispatını tamamlar.

Kaynaklar

[1] Mittal, Madan Lal. ; On stong Nörlund summability of Fourier series. J.Math.Anal.Appl.314(1), 75-84, (2006)

[2] Rhoades ,B.E;Savaş Ekrem.; On absolute Nörlund summability of Fourier series. Tamkang J.Math.33(4), 359-364-, (2002)

[3] N.E. Nörlund.; Sur une application des fonctions permutables. Lunds Universitets Arsskrift 16, (1919).

[4] G.H.Hardy. ;Divergent series , Oxford, (1949).

[5] J.R.Nurcombe.; Limitation and ineffectivens theorems for absolute and strong generalised Nörlund summability.Analysis, 9, 357-365, (1989).

[6] Sönmezoğlu, A.; Fourier serilerinin mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirliği,Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 23 (1-2); 208-214,(2007).

[7] E. C. Titchmarsh.; Theory of Functions. Oxford University, Oxford University Pres, (1949).

Geliş Terihi:03/02/2010 *Kabul Tarihi:28/09/2010*