C.B.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1305-1385 C.B.U. Journal of Science
7.1 (2011) 1–8 7.1 (2011) 1–8

HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜ ÜZERİNDEKİ ÇALIŞMALARIN İNCELENMESİ

Ferat DEMİR , Serhat Berat EFE*

Dicle Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü, 21280 Diyarbakır

Özet: Hardy-Littlewood Maksimal operatörünün temel özellikleri ifade edilmiştir. Lebesgue uzaylarında, değişken üstlü Lebesgue uzaylarında ve Sobolev uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörü için yapılan çalışmalar incelenmiştir. Kaynaklar kısmında çok sayıda makale ve kitap verilmiştir. Makalenin son, araştırma kısmında, iki tip logaritmik koşulun denkliyi ispatlanmıştır. Bu koşullar, metrik-ölçümlü (metric-measure) $L^{p(.)}$ uzaylarında maksimal fonksiyonun sınırlığı için önemlidir. Alınan sonuçlar, maksimal fonksiyonun iki ağırlıklı sınırlı olması için yeterlilik şartını verir.

Anahtar Kelimeler*:* Hardy-Littlewood Maksimal operatör, Sobolev uzayları, regulariti, iki ağırlıklı kestirimler

AN OVERVIEW OF HARDY-LITTLEWOOD MAXIMAL OPERATOR

Abstract: Basic properties of Hardy- Littlewood Maximal operator are stated. An overview has been made on Hardy Littlewood Maximal operator for Lebesgue spaces, Lebesgue spaces with variable exponent, and Sobolev spaces . A comprehensive list of papers and books are given at references. At the end of the paper, in the place of investigation, we prove an equivalence of two logarithmic conditions which are essential for the Hardy-Littlewhood maximal operator to be bounded in the variable exponent metric-measure Lebesgue spaces $L^{p(.)}$. Applying the obtained equivalence, we state the boundedness of maximal function in the two weighted case.

Keywords: Hardy- Littlewood Maximal operator, Sobolev spaces, regularity, two weighted estimated

***Sorumlu yazar**

beratefe@dicle.edu.tr

1. GİRİŞ

Hardy-Littlewood maksimal operatörü (genellikle kısaca maksimal operatör denir) analizde kullanılan önemli bir operatördür. Bu operatör singular integralde, diferansiyel denklemler teorisinde ve diğer operatörleri kontrol etmek için kullanılır [1, 2]. Bu operatörün 1-boyutlu durumu ilk kez 1930 da İngiliz matematikçileri G.H. Hardy ve J.E. Littlewood'un bir makalesinde görüldü [3]. Daha sonra n-boyutlu analogu 1939' da N.Wiener tarafından çalışıldı. Bu makale kesirli Hardy-Littlewood maksimal operatörü ile ilgili herhangi bir çalışma olmayıp, klasik Hardy-Littlewood maksimal operatörü üzerinde yapılan bir çalışmadır. Bu makalede Lebesgue ölçümü $|.|$ ile gösterilecektir.

$f : R^n \to R$ lokal olarak integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere, Hardy–Littlewood maksimal operatörü

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \qquad (1)$$

olarak tanımlanır.

Burada $B(x,r)$, x merkezli ve yarıçapı r olan yuvarları (ball) göstermektedir. Supremumda bu yuvarlar veya buna denk olarak r'ler üzerinde alınmaktadır.

Maksimal Operatörünü tanımlamanın birden fazla yolu vardır. Örneğin x-merkezli yuvarlar yerine x noktasını içeren yuvarlar (merkezi olmayan maksimal operatör) ya da yuvarlar yerine eksenlere paralel küpler alınabilir. Çoğu zaman bu değişikliklere rağmen bu maksimal operatörler aslında birbirine denk olurlar. Eğer bunlar yerine eksenlere paralel dikdörtgenler kullanılırsa değişik sonuçlar elde edilir [1, 4].

2. HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜNÜN KLASİK ÖZELLİKLERİ

Bu operatörün ilk göze çarpan bazı özellikleri şunlardır [2] :

i) $Mf(x) \geq 0$, $Mf(x)$ bazı noktalarda veya her yerde sonsuz olabilir ve $Mf(x) \geq |f(x)|$ 'dir.

ii) Lokal olarak integrallenebilen herhangi bir fonksiyon için tanımlıdır.

iii) Sublineerdir, yani $M \;\; f+g \;\; \leq Mf + Mg$

Şimdi maksimal operatörün bir özelliğini belirten bir tanım verilecektir. Bir X topolojik uzayı üzerinde bir $f : X \to \;\; -\infty, \infty$ fonksiyonu verilsin. Eğer

i) her bir $c \in R$ için $\;\; x \in X : f(x) \leq c \;\;$ kümesi kapalı küme (ya da buna denk olarak $\;\; x \in X : f(x) > c \;\;$ açık küme) ise, bu fonksiyona aşağı yarısürekli (lower semicontinuous),

ii) her bir $c \in R$ için $\;\; x \in X : f(x) \geq c \;\;$ kümesi kapalı küme (ya da buna denk olarak $\;\; x \in X : f(x) < c \;\;$ açık küme) ise, bu fonksiyona yukarı yarısürekli (upper semicontinuous) denir [1].

Dikkat edilecek olursa $f \in L_{loc}(R^n)$ için Hardy–Littlewood $Mf(x)$ maksimal fonksiyonu R^n'de aşağı yarısüreklidir. Bundan dolayı R^n de ölçülebilir bir fonksiyondur.

$f : R \to \;\; 0, \infty$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln^2 x} & x \in \;\; 0, e^{-1} \;\; ise \\ 0 & x \; diğer \; yerlerde \; ise \end{cases} \qquad (1.1)$$

Analiz – integral bilgileri kullanılarak $f \in L^1(R)$ olduğu halde, her $r > 0$ için

$$\int_{B(0,r)} Mf(x)dx = \infty$$

olduğu gösterilebilir [5]. Hatta f fonksiyonları, sınırlı ve integrallenebildiği halde bu fonksiyonların $Mf(x)$ operatörünün integrali ∞ olduğunu gösteren örnek çoktur. Örneğin f, $0,1$ aralığının karakteristik fonksiyonu iken, $x>1$ için $Mf(x)=\dfrac{1}{2x}$ olur. Bu örnekler

$$\|Mf\|_{L^1(R)} \leq c\|f\|_{L^1(R)}$$

eşitsizliğinin daima sağlandığını söylemenin yanlış olduğunu göstermektedir.

$1<p\leq\infty$ ve f, R^n'de ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\sup_{\lambda>0}\lambda\left| \; x\in R^n : |f(x)|>\lambda \; \right|^{1/p} \leq c<\infty \quad (1.2)$$

olacak şekilde bir $c>0$ sabiti varsa, f fonksiyonunun R^n'de zayıf L^p uzayına ait olduğu söylenir [6].

T *sublineer* bir operatör ve $1\leq p,q\leq\infty$ olsun. Eğer T, $L^p(R^n)$'den zayıf $L^q(R^n)$ sınırlı bir operatör ve buna denk olarak herhangi $\lambda>0$ için ve $f\in L^p(R^n)$ iken

$$\left| \; x\in R^n : |Tf(x)|>\lambda \; \right| \leq \left(\frac{c}{\lambda}\|f\|_{L^p(R^n)}\right)^q \quad (1.3)$$

olacak şekilde bir $c>0$ sabiti var ise T'ye zayıf tip p,q denir [6]. Bu operatörün $1<p\leq\infty$ için sınırlılığını ifade eden ünlü Hardy – Littlewood-Wiener teoremi ve $p=1$ için ifadesi aşağıdaki gibidir

Teorem 1.1 [2]**:** Eğer $p\geq 1$ ve $f\in L^p(R^n)$ ise bu durumda Mf hemen hemen her yerde sonludur.

i) Eğer $f\in L^1(R^n)$ ise bu durumda her $\lambda>0$ için

$$\mu \; x:(Mf)(x)>\lambda \; \leq \frac{c_n}{\lambda}\|f\|_{L^1(R^1)} \quad (1.4)$$

ii) Eğer $1<p\leq\infty$ *ve* $f\in L^p(R^n)$ *ise bu durumda* $Mf\in L^p(R^n)$ *olur ve*

$$\|Mf\|_{L^p(R^n)} \leq c_{n,p}\|f\|_{L^p(R^n)} \quad (1.5)$$

olur. (1.4) eşitsizliğinde M *operatörü zayıf tip* $1,1$ *'dır. Yani* M *operatörü* L^1 *'den zayıf* L^1 *uzayına sınırlıdır.*

(1.5) eşitsizliğinin ispatı Marcinkiewicz interpolasyon teoreminden yapılır. (1.1) de M operatörünün lokal olarak integrallenemeyebileceği görülmektedir. Aşağıda verilen teorem, hangi durumda M operatörünün lokal olarak integrallenebileceği ile ilgili olarak faydalı bir durum sunmaktadır.

Teorem 1.2 [6]: $f\in L^1(R^n)$ *ve*

$$\ln^+|f(x)| = \begin{cases} \ln|f(x)|, & |f(x)|>1 \\ 0, & |f(x)|\leq 1 \end{cases}$$

(1.6)

olarak tanımlansın.

i) Eğer

$$\int_{R^n} |f(x)|\ln^+|f(x)|dx<\infty \quad (1.7)$$

ise $Mf\in L^1_{loc}(R^n)$ *olur.*

ii)Eğer f 'nin desteği (support) bir B yuvarında ve $Mf\in L^1(B)$ ise bu durumda

$$\int_B |f(x)|\ln^+|f(x)|dx<\infty \quad (1.8)$$

olur.

2. HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜNÜN REGULARİTE ÖZELLİKLERİ

Sobolev uzayı (ileride tanımı yapılacaktır) ve kısmi diferansiyel denklemlerin uygulamaları, maksimal operatörünün fonksiyonlarının diferansiyellenebilme özelliklerini, düzgünlüğünü nasıl koruduğunu bilmenin faydalı olacağını işaret etmektedir. Genel olarak diferansiyellenebilir bir fonksiyonun maksimal fonksiyonu diferansiyellenebilir değildir [7].

Öncelikle $W^{1,p}(\Omega \in R^n)$ ile gösterilen Sobolev uzayı, i =1,2,3,…,n için ilk zayıf kısmi $D_i f$, türevleri ve kendisi $L^p(\Omega)$'da olan (yani $D_i f \in L^p(\Omega)$ ve $f \in L^p(\Omega)$) fonksiyonlardan oluşur [11].

$Df = D_1 f, D_2 f, ..., D_n f$ olmak üzere (f 'nin zayıf gradiyeni) bu Sobolev uzayındaki bir fonksiyonun normu

$$\| f \|_{1,p} = \| f \|_p + \| Df \|_p \qquad (2.1)$$

olarak tanımlanır.

Kinnunen, Hardy–Littlewood maksimal operatörünün $1 < p \leq \infty$ için $W^{1,p}(R^n)$ de sınırlı olduğunu göstermiştir. Kinnunen'in teoremi şu şekilde ifade edilebilir:

Teorem 2.1 [7]:$1 < p \leq \infty$ *olsun. Eğer* $f \in W^{1,p}(R^n)$ *ise bu durumda* $Mf \in W^{1,p}(R^n)$ *ve* $i = 1, 2, ..., n$ *için* R^n *'de hemen hemen her yerde* $|D_i Mf| \leq MD_i f$ *olur. Buradan* (1.5) *den* $i = 1, 2..., n$ *için*

$$\| D_i Mf \|_p \leq c_{n,p} \| D_i f \|_p \qquad (2.2)$$

olur.

Daha sonra, Tanaka $p = 1$ve $n = 1$ için Kinnunen 'in teoremini daha da geliştirmiştir. Tanaka'nın teoremi şöyledir:

Teorem 2.2 [8]**:** *Eğer* $f \in W^{1,1} \; R$ *ise bu durumda* $D_i Mf$ *integrallenebilir fonksiyon* ve

$$\| D_i \; Mf \; ' \|_1 \leq 2 \| D_i f \|_1 \qquad (2.3)$$

olur.

Daha sonra Kinnunen ve Lindquist, lokal Hardy–Littlewood operatörünün Sobolov uzayında sınırlı olduğunu gösterdiler. Bu teoremi ifade etmeden önce bazı tanımlar verilmelidir. Ω, R^n Öklid uzayında bir açık küme; $f : \Omega \to -\infty, \infty$ lokal olarak integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Supremum $0 < r < dist(x, \partial\Omega)$ ($dist(x, \partial\Omega)$ ile x 'in Ω' nın sınırına olan uzaklığı kast edilmektedir) şartını sağlayan tüm r'ler üzerinde alınmak üzere (Ω'nın içinde bulunan tüm $B \; x, r$ yuvarları üzerinde), $M_\Omega f : \Omega \to 0, \infty$ olarak gösterilen local Hardy–Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M_\Omega f(x) = \sup \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

olarak tanımlanır [9]. Buradan lokal maksimal fonksiyonunun bölgeye de bağlı olduğu görülmektedir.

Teorem 2.3 [9]: $1 < p \leq \infty$ olsun. Eğer $f \in W^{1,p}(\Omega)$, bu durumda $M_\Omega f \in W^{1,p}(\Omega)$ ve hemen hemen her $x \in \Omega$ *için*

$$|DM_\Omega f(x)| \leq 2 M_\Omega |Df|(x) \qquad (2.4)$$

olur.

Bu uzay üzerinde bir f fonksiyonuna verilen norm

$$\| f \|_{1,p,\Omega} = \| f \|_{p,\Omega} + \| Df \|_{p,\Omega} \quad \ldots\ldots \qquad (2.5)$$

şeklindedir.

3. HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜNÜN DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LEBESGUE UZAYINDAKİ ÖZELLİKLERİ

Şimdi de değişken üstlü Lebesgue uzayında maksimal fonksiyonunun sınırlılığı esas olarak ne durumda, ona bakalım.

$p: R^n \to 1,\infty$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $L^{p(.)}(R)$ ile gösterilen değişken üstlü Lebesgue uzayı $\lambda > 0$ için

$$\int_{R^n} |f(x)/\lambda|^{p(x)} dx < \infty$$

şartını sağlayan fonksiyonlardan oluşur. Bu uzaydaki bir fonksiyonun normu

$$\|f\|_{L^{p(.)}} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{R^n} |f(x)/\lambda|^{p(x)} dx \le 1 \right\} \quad (3.1)$$

ile tanımlanır.

Daha önce, p sabit iken $1 < p \le \infty$ için maksimal fonksiyonunun sınırlı olduğu ifade edilmişti.

$p_- = \inf \; p \; x \; : x \in R^n$ ve

$p^+ = \sup \; p \; x \; : x \in R^n$

olarak tanımlansın.

Teorem 3.1 [10]: *Eğer* $1 < p_- \le p^+ < \infty$ *olsun ve* p

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{c}{\ln \frac{1}{|x-y|}}; \; |x-y| \le \frac{1}{2}$$

(3.2)

olarak tanımlanan log-Holder şartını ve p kompakt bir kümenin dışında sabit olursa bu durumda maksimal fonksiyonu $L^{p(.)}(R^n)$ de sınırlı olur.

Teorem 3.2 [10, 11]: *p üzerinde* (3.2) *ve ikinci şart*

$$|p(x) - p_\infty| \le \frac{c}{\ln \; e + |x|} \qquad (p_\infty > 1) \quad (3.3)$$

olursa yine maksimal fonksiyonu $L^{p(.)}(R^n)$ *de sınırlı olur.*

Daha sonra, (3.3) koşulu, bunlardan bağımsız olarak A. Nekvinda tarafından iyileştirildi [12]: $\exists c > 0$

$$\int_{p(x) \ne p(\infty)} c^{1/|p(x)-p(\infty)|} dx < \infty .$$

4. HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜ İÇİN DENK LOGARİTMİK KOŞULLAR VE ONLARIN İKİ AĞIRLIKLI KESTİRİMLERE UYGULAMALARI

Bu bölümde denk logaritmik koşullardan söz edilecektir. Böyle koşullar son zamanlar maksimal fonksiyonun sınırlılığı çalışmalarında çok yaygın kullanılmaktadır [10, 13, 14, 15, 16, 17, 12]. Belli olduğu gibi [14, 15, 17], eğer üst $p: \Omega \to 1,\infty$ bir fonksiyon, μ sonlu varyasyona sahip bir Borel ölçümü, $1 < p^- \le p(x) \le p^+ < \infty$, Ω -sınırlı bölge ve aşağıdaki ağırlıklı logaritmik koşulu sağlanırsa, maksimal fonksiyon $L^{p(.)}$ uzaylarında sınırlı olur:

$\exists C > 0$ her $Q \subset \Omega$ küp ve her $x, y \in Q$; $\mu(Q) \le \frac{1}{2}$ için

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C}{-\ln \mu(Q)} \qquad (4.1)$$

koşulu sağlanıyor.

Tanım 4.1. μ bir Borel ölçümü olmak üzere, $\exists C > 0$ her küp Q ve $Q^* = 2Q$ için $\mu(Q^*) \le C\mu(Q)$ özelliğini sağlarsa bu ölçüme *iki kat* (doubling condition) ölçüm denir. Bu sınıf ölçümler kısaca $\mu \in D_\infty$ ile belirtilir.

Tanım 4.2. μ bir Borel ölçümü olmak üzere, eğer her küp $Q \subset \square^n$ için ve onun her alt kümesi $E \subset Q$ için aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$\frac{\mu \; E}{\mu \; Q} \le C \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\delta}$$

o zaman μ ölçümünün A_∞ koşulunu sağladığı söylenir. Bu ifadede $C > 0, \delta > 0$ sabitleri Q küpüne ve E kümesine bağlı değil. Burada $|E|$

işareti uygun kümenin Lebesgue ölçümünü gösterir.

Bu çalışmada biz iki kat şartını sağlayan ölçümler için (4.1) koşulunun, iyice tanınan, (3.2) logaritmik koşuluna denk olduğunu ispatlayacağız. Bununla da maksimal fonksiyonlar için iki ağırlıklı kestirimler için daha doğal ve kolay kontrol edilebilecek koşullar elde edilecektir. Başka bir deyişle, makalenin önemli sonuçları aşağıdaki iki teoremdir.

Teorem 4.1. Eğer μ Borel ölçümü $\mu \in D_\infty$ ve $\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$ şartlarını sağlarsa, her $p : \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ ölçülebilir fonksiyonu için (4.1) koşulu (3.2) koşuluna denktir.

İspat. Önce, $(3.2) \to (4.1)$ ispatlayalım. Q bir küp olsun, öyle ki $\mu(Q) < \frac{1}{2}$ ve x, y noktaları bu küpün herhangi noktalar olsun. İspatlayalım ki, (4.1) koşulu sağlanır.

$$l_0 = \sup\left\{ l(Q) : \mu(Q) \le \frac{1}{2} \right\} \text{ olsun.}$$

O zaman $\mu(E_n) = \infty$ olduğu için $l_0 < \infty$. Q_0 küpü $\mu(Q_0) \le \frac{1}{2}$ şartını sağlayan ve Q küpünü içine alan ve küple aynı merkezi bölüşen bir küp olsun. Açıktır ki, $l(Q_0) \le l_0$.

Eğer $|x - y| \le \frac{1}{2}$ o zaman $\mu \in D_\infty$ koşulu ile diyebiliriz: $\exists \alpha \ge 1, C_1 > 0$

$$\frac{\mu(Q)}{\mu(Q_0)} \ge C_1 \left(\frac{l(Q)}{l(Q_0)} \right)^\alpha, \qquad \text{veya}$$

$$l(Q) \le \left(\frac{2}{C_1} \mu(Q) \right)^{1/\alpha} l(Q_0) \,. \tag{4.2}$$

O nedenle, $|x - y| \le l_0 \left(\frac{2}{C_1} \right)^{1/\alpha} \mu(Q)^{1/\alpha}$.

Eğer $\mu(Q) \le \frac{2 l_0^{2\alpha}}{C_1}$ olursa

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C}{\ln \frac{1}{|x-y|}} \le \frac{C\alpha}{\ln \frac{1}{\mu(Q)} + \alpha \ln l_0 - \ln(C_1/2)} \le \frac{2C\alpha}{\ln \frac{1}{\mu(Q)}}$$

elde ederiz. Biz C_1 sabitini istenilen kadar küçük kabul edebiliriz, bu nedenle $\frac{2 l_0^{2\alpha}}{C_1} \ge \frac{1}{2}$ yazabiliriz. Böylece, her $x, y \in Q$ ve $|x - y| \le \frac{1}{2}$ için

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{2C\alpha}{\ln \frac{1}{\mu(Q)}} \,.$$

buluruz. Şimdi de $x, y \in Q$ ve $|x - y| \ge \frac{1}{2}$, $\mu(Q) \le \frac{1}{2}$. O zaman (4.2)'den yararlanırsak,

$$\mu(Q) \ge \frac{C_1}{2} \left(\frac{|x-y|}{l_0} \right)^\alpha \ge \frac{C_1}{2} \left(\frac{1}{2 l_0} \right)^\alpha = \sigma_0 \,.$$

Böylece, her $x, y \in Q$ ve $\mu(Q) \le \frac{1}{2}$ için

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C_2}{\ln \frac{1}{\mu(Q)}}$$

Elde ederiz. Burada,

$$C_2 = 2C\alpha + (p^+ - p^-) \ln \frac{1}{\sigma_0} \,.$$

$(3.2) \to (4.1)$ ispatlandı. Şimdi de (4.1) $\to$ (3.2) olduğunu ispatlayalım. (4.1) koşulunu varsayalım. $\mu \in D_\infty$ koşulu ile aşağıdaki eşitsizliği söyleyebiliriz: $\exists C_3 > 1, \exists \delta > 0$ her aynı merkeze sahip Q', Q küpleri için

$$\frac{\mu(Q')}{\mu(Q)} \le C_3 \left(\frac{|Q'|}{|Q|} \right)^{\delta}$$

(4.2)

eşitsizliği yer alır. İleride biz öyle bir $d_0 = d_0(l_0, \delta, C_3)$, $d_0 < l_0$ sayısını bulacağız ki her $x, y \in R^n$, $|x-y| \le d_0$ için

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{2C}{\ln \frac{1}{|x-y|}}$$

eşitsizliği sağlanacaktır. Gerçekten de, eğer x, y keyfi noktalar, $|x-y| \le d_0$, Q ise bu noktaları içeren en küçük küp olursa $d_0 < l_0$ sayısının seçimine dayanarak $\mu(Q) \le \frac{1}{2}$ elde ederiz. (4.2) eşitsizliğinde Q' yerine Q, Q yerine Q_0 alırsak

$$\frac{\mu(Q)}{\mu(Q_0)} \le C_3 \left(\frac{|Q|}{|Q_0|} \right)^{\delta} \qquad (4.3)$$

elde ederiz. (4.3) ten buluruz:

$$\mu(Q) \le C_3 \frac{1}{2} \left(\frac{|x-y|}{l_0} \right)^{\delta}. \qquad (4.4)$$

Simdi, (4.1) koşulundan ve (4.4)'ten yazabiliriz:

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C}{\ln \frac{1}{\mu(Q)}} \le \frac{C}{\ln \frac{2}{C_3} \frac{l_0^{\delta}}{|x-y|^{\delta}}}.$$

(4.5)

Eğer $|x-y| \le \left(\frac{C_3}{2 l_0^{\delta}} \right)^{\frac{2}{1-2\delta}}$ olursa, (4.5) ifadesinin sağ yani $\frac{2C}{\ln \frac{1}{|x-y|}}$ sayısını aşmayacaktır. Demek, $d_0 = \left(\frac{C_3}{2 l_0^{\delta}} \right)^{\frac{2}{1-2\delta}}$ seçersek, $|x-y| \le d_0$ için

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{2C}{\ln \frac{1}{|x-y|}}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eğer $d_0 < |x-y| \le \frac{1}{2}$ olursa aşağıdaki geçiş açıktır:

$$|p(x) - p(y)| \le p^+ - p^- \le \frac{(p^+ - p^-) \ln \frac{1}{d_0}}{\ln \frac{1}{|x-y|}}.$$

Böylece, $C_4 = 2C + (p^+ - p^-) \ln \frac{1}{d_0}$ seçersek, her $|x-y| \le \frac{1}{2}$ şartını sağlayan x, y için

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C_4}{\ln \frac{1}{|x-y|}}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Baksa bir deyişle, (4.1) $\rightarrow$ (3.2) ispatlandı.

Teorem 4.1 ispatlandı.

Teorem 4.1`i uygulayarak ve [17,Teorem 3.1] den yararlanırsak, aşağıdaki Teorem 4.2 ispatlamış oluruz.

Teorem 4.2. $p : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ bir ölçülebilir fonksiyon, $p^- > 1$ olsun ve (3.2), (3.3) şartlarını sağlasın. $v, \omega : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ ölçülebilir fonksiyonları $v, \sigma = \omega^{-1/p(.)-1} \in L_{1,loc}$ ve aşağıdaki şartları sağlasın:

1) $\sigma \in A_\infty$;

2) $1 + |x|^{-m} \sigma \in A_\infty$ ($m > 0$ - *yeterince büyük sayıdır*)

3) $\exists C > 0$ *her cup* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *için*

$$\int_Q v\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma dy\right)^{p(x)} dx \le C\int_Q \sigma dx \quad \textit{şartı}$$

sağlanılır;

4) $\exists C > 0$ *her küp* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *için*

$$\int_Q v\,(1+|x|)^{-m}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma dy\right)^{p(x)} dx \le C\int_Q (1+|x|)^{-m}\sigma dx$$

şartı sağlanılır.

O zaman, öyle başka bir C_1 sabiti vardır ki maksimal fonksiyon için aşağıdaki iki ağırlıklı eşitsizlik doğru olur:

$$\left\|v^{1/p(.)}Mf\right\|_{L^{p(.)}} \le C_1\left\|\omega^{1/p(.)} f\right\|_{L^{p(.)}}$$

Teorem 4.2'nin ispatı [17, Theorem 3.1] deki ile aynıdırr. Sadece, orada (3.2) koşulunun yerinde (4.1) koşulu bulunuyor. Biz ise Teorem 4.1`e dayanarak bu koşulların denk olduğunu ispatladık. Böylece, [17] deki önemli sonucun koşullarından birini sadeleştirmiş olduk.

TEŞEKKÜR

Prof. Dr. Farman MAMMADOV`a makalenin 4. bölümüne katkısından dolayı teşekkür ederiz.

KAYNAKLAR

[1] Bogachev, V. I.. Measure Theory (1st Ed.). Springer, (2006).

[2] Krantz,S.G. and Parks, H. R. Geometric integration theory. 1st ed. Birkhäuser Boston, (2008)

[3] Hardy, G.H. and Littlewood, J.E., A maximal theorem with function-theoretic applications., Acta Math., 54 (1930).

[4] Guzman, M. De., Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$, Lect. Notes in Math., Springler-Verlag New York, , 481p (1975).

[5] Stroock, D. W. A concise introduction to the theory of integration. Birkhäuser Boston, (1999).

[6] Lu, S., Ding, Y. and Yan, D. Singular Integrals and Related Topics. World Scientific Publishing Company, (2007).

[7] Kinnunen, J., The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev-function, Israel J. Math. 100 117-124. (1997).

[8] Tanaka, H..A remark on the derivative of the one-dimensional Hardy-Littlewood maximal function. Bull. Austral. Math. Soc. 65 253-258. (2002).

[9] Kinnunen, J., Lindqvist, P.: The derivative of the maximal function. - J. Reine Angew. Math. 503,), 61-167. (1998).

[10] Diening ,L..Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(.)}$, Math. Inequal. Appl. 7(2), 245-253. (2004).

[11] Cruz-Uribe ,D., Fiorenza ,A. and Neugebauer, C. J. The maximal function on variable Lp spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 28 ,223-238, and 29 (2004), 247-249. (2003).

[12] Nekvinda, A., Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)$, Math. Inequal.Appl. 7(2) 255-265. (2004).

[13] Harjulehto, P., Hästö, P. and Pere, M.: Variable exponent Sobolev spaces on metric measure spaces. Funct. Appr. Com. Math. 36 79–94 (2006).

[14] Kokilashvili V. and Meskhi A. Two weighted norm inequalities fort he double hardy transforms and strong fractional maximal functions in variable exponent Lebesgue spaces. arXiv:1007.0879 (2010).

[15] Kokilashvili V. and Samko. Maximal and fractional operators in weighted $L^{p(.)}$- spaces. Revista Mathematica Iberoamericana, 20(2), 493–515 (2004).

[16] Lerner, A. K. On some questions related to the maximal operator on variable L^p spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 362 4229-4242, (2010).

[17] Mamedov F. and Zeren Y., On a two–weighted estimation of maximal operator in the Lebesgue space with variable exponent. Annali di Matematica, Doi 10.1007/s10231-010-0149, -09-06.

Geliş Tarihi: 28/09/2010 *Kabul Tarihi: 16/12/2010*