C.B.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1305-1385 C.B.U. Journal of Science
7.2 (2011) 13– 19 7.2 (2011) 13 –19

FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ

Abdullah SÖNMEZOĞLU *

Bozok Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 66100 Yozgat

Özet Bu çalışmada, (μ_n) dizisi için $(-\pi,\pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu f fonksiyonunun Fourier serisinin $|H,\mu_n|$ toplanabilmesi ile ilgili iki teorem ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Fourier serisi, Toplanabilme, Mutlak Hausdorff toplanabilme.*

ABSOLUTE HAUSDORFF SUMMABILITY OF THE FOURIER SERIES

Abstract In this study, two theorems with respect to $|H,\mu_n|$ summability of Fourier series of f function which has 2π period and integrable in the mean of Lebesgue in the interval $(-\pi,\pi)$ for sequence (μ_n), are proved .

Key Words *Fourier series, Summability, Absolute Hausdorff summability,.*

***Abdullah SÖNMEZOĞLU**

abdullah.sonmezoglu@bozok.edu.tr

1. GİRİŞ

Bu çalışmada esas olarak $(-\pi,\pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu bir f fonksiyonun Fourier serisinin $\left|H,\mu_n\right|$ mutlak Hausdorff toplanabilmesi ele alınmıştır. Mutlak Hausdorff toplanabilme metodu, [1] de ele alınan Fourier serilerinin mutlak Cesa'ro toplanabilmesinin bir genellemesi olarak adlandırılmaktadır.

1917 de Hurwitz ve Silverman [2] de C Cesa'ro matrisi ile değişmeli olan üçgensel matrislerin sınıfını tanımlamışlardır. Bu değişim problemi, operatör teorinin bilinen değişim problemlerinin çoğundan önce gelmektedir. Hurwitz ve Silverman, (μ_k) reel veya kompleks bir dizi ve Δ,

$$\Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1},\ \Delta^{n+1}\mu_k = \Delta\left(\Delta^n\mu_k\right)$$

ile tanımlı ileri fark operatörü olmak üzere

$$h_{nk} = \binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_k\,, \qquad 0 \le k \le n$$

formuna sahip matris sınıfını bulmuşlardır.

1921 de Hausdorff [3] de aynı değişim problemini çözmüştür ve Hausdorff matrislerinin regülerliği ve konservatifliği için gerekli ve yeterli koşullar vermiştir. Bu toplanabilme metodunun diziden diziye tanımlanan dönüşüm olduğu [4] te belirtilmiştir. Fourier serilerinin mutlak Hausdorff toplanabilmesinin özel durumu olan mutlak Hölder toplanabilme tanımı ise [5] te verilmiştir.

Bu çalışmada bahsedilen ve [6] da tanımlanan Mutlak Hausdorff toplanabilme, Hausdorff toplanabilme yardımıyla oluşturulan bir integral serisinin yakınsaklığıdır.

Çalışma boyunca ;

i) $f(x)\in L(a,b)$ ile f fonksiyonunun (a,b) de Lebesgue anlamında integrallenebilirliği,

ii) $\phi(t)\in BV(0,\pi)$ ile ϕ fonksiyonunun $(0,\pi)$ aralığında sınırlı salınımlı olduğu,

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right| < \infty$ ile $\sum a_n$ serisinin mutlak yakınsaklığı,

iv) $\left\|\frac{1}{t}\right\|$ ile $\frac{1}{t}$ nin tam değeri gösterilecektir.

v) (μ_n) reel veya kompleks değerli bir dizi olmak üzere p. mertebeden μ_n lerin farkı;

$$p = 0 \text{ için } \Delta^0\mu_n = \mu_n\,,$$

$$p \ge 1 \text{ için } \Delta^p\mu_n = \Delta^{p-1}\mu_n - \Delta^{p-1}\mu_{n+1}$$

şeklinde gösterilecektir.

Bunların dışında K, her durumda aynı olması gerekmeyen pozitif bir sabiti gösterecektir.

Tanım 1. f fonksiyonu $(-\pi,\pi)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen 2π periyotlu bir fonksiyon olsun. Buradan

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

ve

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$$

trigonometrik fonksiyon serisine f fonksiyonunun Fourier serisi veya f fonksiyonuna karşılık getirilen Fourier serisi denir ve

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

şeklinde gösterilir [4].

Tanım 2. $A = (a_{nv})$ sonsuz matris olmak üzere A matrisine karşılık getirilen dönüşüm, (b_n) dizisinden (c_n) dizisine tanımlanan

$$c_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{n,v} b_v \qquad (2)$$

ile tanımlanır. Eğer bu dönüşüm yakınsaklığı koruyorsa, yani $b_n \to b \Rightarrow c_n \to c$ ise bu dönüşüm konservatif dönüşüm olarak adlandırılır [4].

Tanım 3. (μ_n) reel veya kompleks değerli bir dizi olsun. Diğer taraftan $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olmak üzere, (s_n) dizisinden (t_n) dizisine

$$t_n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \Delta^{n-v} \mu_v s_v \qquad (3)$$

ile tanımlanan dönüşüme (μ_n) dizisine karşılık getirilen Hausdorff dönüşümü denir ve kısaca (H, μ_n) ile gösterilir. Ayrıca bu tanımdaki (t_n) dizisine, (s_n) dizisinin Hausdorff dönüşüm dizisi denir.

Eğer $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ ise, $\sum a_n$ serisine veya (s_n) dizisine s değerine Hausdorff toplanabilirdir denir ve $s_n \to s(H, \mu_n)$ ile gösterilir [4].

Tanım 4. t_n, (3) deki gibi tanımlansın. Buna göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n - t_{n-1}| \leq K \qquad (4)$$

ise $\sum a_n$ serisine mutlak Hausdorff toplanabilir veya $|H, \mu_n|$ toplanabilirdir denir [6].

2.ESAS SONUÇLAR

Teoremlerimizi ifade ve ispat etmeden önce teoremlerin ispatında kullanılacak olan bazı lemmaları verelim.

Lemma 2.1. (H, μ_n) dönüşümünün konservatif olması için gerek ve yeter şart;

i) $0 \leq x \leq 1$ için $\chi(x)$ sınırlı salınımlı

ii) $\mu_n = \int_0^1 x^n d\chi(x) \qquad n = 0,1,2,...$

şartlarını sağlayan $\chi(x)$ moment fonksiyonunun mevcut olmasıdır [7].

Lemma 2.2. m ve n, $n \geq m$ olacak şekilde pozitif tamsayılar olsunlar. $0 < t \leq \pi$ için düzgün olarak

$$\left| \sum_{v=m}^{n} \frac{\sin vt}{v} \right| \leq K$$

olacak şekilde $K \geq 0$ sayısı vardır [8].

Lemma 2.3. Kabul edelim ki

i) $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^n \mu_0| < \infty$

ii) $\sum_{v=1}^{\infty} \binom{n}{v} \frac{\Delta^{n-v} \mu_v \sin vt}{v} \leq K$

şartları sağlansın. Bu durumda (H, μ_n) toplanabilen her sınırlı salınımlı fonksiyonun Fourier serisinin $|H, \mu_n|$ toplanabilmesi için gerek ve yeter şart; $0 \leq t \leq \pi$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{v=1}^{\infty}\binom{n}{v}\frac{\Delta^{n-v}\mu_v \sin vt}{v}\right| \le K$$

olmasıdır [6].

Lemma 2.4. $0<\delta<1$ ve z kompleks sayı olmak üzere $|z-1|\le 1$ olsun. Bu durumda $0\le x\le 1$ için düzgün olarak

$$\int_0^x (x-v)^{\delta-1}(1-vz)^n\,dv \le \frac{K}{(n|z|)^{\delta}}$$ dır [6].

Lemma 2.5.

$$\sum_{v=1}^{n} v\binom{n}{v}x^v(1-x)^{n-v} = nx$$ [9]. dır

Teorem 2.6.

$f(t)\in L(-\pi,\pi)$ ve $f(t+2\pi)=f(t)$ olmak üzere

i) $\phi(t)=\dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\in BV(0,\pi)$

ii) (H,μ_n) konservatif dönüşüm

iii) $\delta>0$ ve z de $|z-1|\le 1$ şartını sağlayan bir kompleks sayı olmak üzere

$$\chi(x)=\int_0^1 (x-v)^{\delta}\,\mathrm{Im}(1-vz)^n\,dv\,.$$

şartları sağlansın. Bu durumda f fonksiyonunun (1) deki Fourier serisi $|H,\mu_n|$ toplanabilirdir.

İspat. $(s_n(x))$, (1) serisinin kısmı toplamlar dizisi olmak üzere

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\sum_{k=1}^{n}\cos kt\,dt$$

dır. Amacımız

$$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n-t_{n-1}|<\infty$$

olduğunu göstermektir. Öncelikle

$$\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v=\mu_0$$

olduğunu dikkate alarak, Abel kısmi toplama formülü, toplamın sırasını değiştirme metodu ve kısmi integrasyon metodu kullanılarak

$$t_n-t_{n-1}=\sum_{v=0}^{n}\left[\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v-\binom{n-1}{v}\Delta^{n-v-1}\mu_v\right]s_v$$

$$=\sum_{v=0}^{n-1}\Delta s_v\sum_{j=0}^{v}\left[\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\mu_j-\binom{n-1}{j}\Delta^{n-j-1}\mu_j\right]$$
$$+\sum_{j=0}^{n}\left[\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\mu_j-\binom{n-1}{j}\Delta^{n-j-1}\mu_j\right]s_n$$
$$=\sum_{v=0}^{n-1}(s_v-s_{v+1})\sum_{j=0}^{v}\left[\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\mu_j-\binom{n-1}{j}\Delta^{n-j-1}\mu_j\right]$$

$$+s_n(\mu_0-\mu_0)$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{v=0}^{n-1}\cos(v+1)t\sum_{j=0}^{v}\left[\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\mu_j-\binom{n-1}{j}\Delta^{n-j-1}\mu_j\right]\phi(t)\,dt$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{v=0}^{n-1}\frac{\sin(v+1)t}{v+1}\sum_{j=0}^{v}\left[\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\mu_j-\binom{n-1}{j}\Delta^{n-j-1}\mu_j\right]d\phi(t)$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\mu_j-\binom{n-1}{j}\Delta^{n-j-1}\mu_j\right]\sum_{v=j}^{n-1}\frac{\sin(v+1)t}{v+1}d\phi(t)$$

elde edilir.

Böylece Lemma 2.2, teoremin i) ve ii) hipotezleri kullanılarak

$$|t_n-t_{n-1}|\le K\int_0^{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\left|\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\mu_j-\binom{n-1}{j}\Delta^{n-j-1}\mu_j\right||d\phi(t)|$$
$$\le K\int_0^{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\left|\binom{n}{j}\Delta^{n-j}\mu_j-\binom{n-1}{j}\Delta^{n-j-1}\mu_j\right|$$

$$\leq K\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-j)!\,j!}\left|\int_0^1 x^j(1-x)^{n-j-1}(j-nx)d\chi(x)\right|$$

yazılabilir. Böylece kısmi integrasyonla

$$\int_0^1 x^j(1-x)^{n-j-1}(j-nx)d\chi(x)$$

$$=-\int_0^1 x^j(1-x)^{n-j-2}\left(j^2-2nxj+n^2x^2jx-nx\right)\chi(x)dx$$

olup $j\geq 1$ için iii) hipotezi ve Lemma 2.4 den

$$|t_n-t_{n-1}|\leq K\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-1)!\,n^2}{(n-j)!\,j!}|\chi(x)|$$

$$\leq Kn\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}|\chi(x)|$$

$$\leq Kn2^n|\chi(x)|$$

$$\leq Kn2^n\left|\int_0^1(x-v)^{\delta}\,\mathrm{Im}(1-vz)^n\,dv\right|$$

$$\leq\frac{Kn2^n}{(n!)^{2\delta}|z|^{\delta}}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{(n)!^{2\delta}}$$

serisi yakınsak olduğundan karşılaştırma teoreminden

$$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n-t_{n-1}|$$

serisi de yakınsaktır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 2.7.

$f(t)\in L(-\pi,\pi)$ ve $f(t+2\pi)=f(t)$

olmak üzere

i) $\phi(t)=\dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\in BV(0,\pi)$

ii) (H,μ_n) konservatif dönüşüm

iii) $\delta>0$ ve $g(x)\in L(0,1)$ olmak üzere $\chi(x)$, moment fonksiyonu ya

$$\chi(x)=\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_0^x(x-v)^{\delta}g(v)dv$$

veya

$$\chi(x)=\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\int_x^1(v-x)^{\delta}g(v)dv\,.$$

şartları sağlansın. Bu durumda f fonksiyonunun (1) deki Fourier serisi $|H,\mu_n|$ toplanabilirdir.

İspat. İlk olarak (1) de, genel formu değiştirmeksizin $a_0=0$ seçilirse

$$A_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\cos ntdt$$

ve

$$\phi(t)\approx\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)\cos nt$$

elde edilir. Böylece seriden seriye dönüşüm ile $\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)$ Fourier serisinin (H,μ_n) seri dönüşümü

$$C_n=\sum_{v=1}^{\infty}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_vA_v(x)$$

şeklinde olup kısmi integrasyon ile

$$C_n=\frac{2}{\pi}\sum_{v=1}^{\infty}\binom{n}{v}\Delta^{n-v}\mu_v\int_0^{\pi}\phi(t)\cos vtdt$$

$$=-\frac{2}{\pi}\sum_{v=1}^{\infty}\binom{n}{v}\frac{\Delta^{n-v}\mu_v}{v}\int_0^{\pi}\sin vtd\phi(t)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)d\phi(t)$$

bağıntısı elde edilir. i) hipotezinden $\phi(t)$ fonksiyonu sınırlı salınımlı ve Lemma 2.3 den $D_n(t)$ tanımlı olduğundan C_n tanımlıdır.

Ayrıca diziden diziye bir dönüşüm, seriden seriye dönüşüm olarak ifade edilebileceğinden

$$D_n(t) = \sum_{v=1}^{\infty} \binom{n}{v} \frac{\Delta^{n-v}\mu_v}{v} \sin vt$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \Delta^{n-v}\mu_v \sin vt$$

yazılabilir. Lemma 2.1 ve buna bağlı olarak ii) hipotezi kullanılarak

$$D_n(t) = \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \frac{\sin vt}{n} \int_0^1 x^v (1-x)^{n-v} d\chi(x)$$

bağıntısı elde edilir.
Lemma 2.3 den yararlanarak teoremimizi ispatlamak için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |D_n(t)| \le K$$

olduğunu göstermeliyiz. $0 < t < \pi$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |D_n(t)| = \sum_{n=1}^{\left\|\frac{1}{t}\right\|} |D_n(t)| + \sum_{n=\left\|\frac{1}{t}\right\|+1}^{\infty} |D_n(t)|$$

olsun. İlk olarak Lemma 2.5 den

$$\sum_{n=1}^{\left\|\frac{1}{t}\right\|} |D_n(t)| \le \sum_{n=1}^{\left\|\frac{1}{t}\right\|} \int_0^1 \sum_{v=1}^{n} \frac{vt}{n} \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} d\chi(x)$$
$$\le Kt \sum_{n=1}^{\left\|\frac{1}{t}\right\|} \int_0^1 x |d\chi(x)| \le K$$

elde edilir.

Son olarak

$$\sum_{n=\left\|\frac{1}{t}\right\|+1}^{\infty} |D_n(t)| \le K$$

olduğunu gösterelim.
Bunun için
iii) hipotezinde moment fonksiyonunu,

$$\chi(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \int_0^x (x-v)^{\delta} g(v) dv$$

şeklinde seçelim.

$$(\ \chi(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \int_x^1 (v-x)^{\delta} g(v) dv$$

seçimi de yapılabilir.)

$z = 1 - e^{it}$ olmak üzere

$$\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} \sin vt$$
$$= \frac{1}{n} \operatorname{Im} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} e^{ivt}$$
$$= \frac{1}{n} \operatorname{Im}(1-xz)^n \text{ olduğundan}$$

$$\sum_{n=\left\|\frac{1}{t}\right\|+1}^{\infty} |D_n(t)|$$
$$\le \sum_{n=\left\|\frac{1}{t}\right\|+1}^{\infty} \int_0^1 \left| g(x) \int_0^x (x-v)^{\delta-1} \operatorname{Im}(1-vz)^n dv \right| dx$$

dır.
iii) hipotezi ve Lemma 2.4 ü kullanarak

$$\sum_{n=\left\|\frac{1}{t}\right\|+1}^{\infty} |D_n(t)| \le K \int_0^1 |g(x)| dx \sum_{n=\left\|\frac{1}{t}\right\|+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta} |z|^{\delta}}$$
$$\le K \sum_{n=\left\|\frac{1}{t}\right\|+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}\left(1-e^{it}\right)^{\delta}}$$
$$\le K \sum_{n=\left\|\frac{1}{t}\right\|+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta} t^{\delta}}$$
$$\le K \sum_{n=\left\|\frac{1}{t}\right\|+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \qquad \le K$$

elde ederiz.
Böylece, Lemma 2.3 den sınırlı salınımlı f fonksiyonunun (1) ‘deki Fourier serisinin $|H, \mu_n|$ toplanabilir olduğu ispatlanmıştır.

Kaynaklar

[1] Bosanquet. L.S., "Note on the Absolute summability (C) of a Fourier series", J. London Math. +Soc., 11: 11-15 (1936).

[2] Hurwitz, W.A. and Silverman, L.L.On the consistency and equivalence of certain definitions of summability, Trans. Am. Math. Soc. 18:1-20 (1917).

[3] F. Hausdorff.; "Summationmethoden und Momentfolgen I.", Math. Z., 9: 74-109 (1921).

[4] Hardy. G.H., "Divergent series", Oxford, (1949).

[5] Morley, H., "A theorem on Hausdorff transformations and its applications to Cesa'ro and Hölder means", J. London Math. Soc., 25: 168- 173 (1950).

[6] Tripathy, N., "On the Absolute Hausdorff summability of Fourier series", J. London Math. Soc., 44: 15- 25 (1969).

[7] Knopp, K. and Lorentz, G.G., "Beitrage zur absoluten Limitierung", Arch. Math., 2: 10-16 (1950).

[8] Titchmarsh, E. C. ''Theory of Functions'', Oxford University Pres, (1949).

[9] Widder, D.V., "The Laplace Transform", 152, Princeton, (1946).

Geliş Tarihi: 16/04/2011 **Kabul Tarihi: 10/08/2011**