

Yeni bir geometrik şekil önerisi: düzgün çokyayların temel formülleri

A new geometric shape proposal: basic formula of smooth polyarcs

Abdullah BALCI¹ , Emin YAŞAR^{*2} 

¹Milli Eğitim Bakanlığı, Nuray Tuncay Kara Bilim ve Sanat Merkezi, 27560, Gaziantep

²Gaziantep Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Enstitüsü, 27310, Gaziantep

• Geliş tarihi / Received: 05.02.2025

• Kabul tarihi / Accepted: 10.07.2025

Öz

Bu çalışmada, geometrik şekillerden düzgün çokgenler ve daireler kullanılarak yeni bir geometrik yapı önerilmiştir. “Düzgün çokyay” olarak önerilen bu yapıda çap uzunluğu düzgün çokgenin bir kenar uzunluğuna eşit daireler kullanılmıştır. Bu dairelerin merkezleri, ilgili çokgenin köşelerine yerleştirilmiş ve çokgenin içerisinden dairelerin çıkarılmasıyla oluşan bölgeler incelenmiştir. Elde edilen bu bölgeler yay sayısına bağlı olarak “düzgün üçyay”, “düzgün dörtyay”, “düzgün beşyay” vb. biçiminde sınıflandırılmıştır. Dairenin çevre ve alan formülleri ile düzgün çokgenlerin alan formülleri kullanılarak bu yeni yapıların çevre ve alan hesaplamaları yapılmış; elde edilen örüntüler doğrultusunda genel formüller türetilmiştir. Ayrıca, çapları platonik cisimlerin (düzgün dört yüzlü, altı yüzlü ve on iki yüzlü) ayrıt uzunluğuna eşit kürelerin merkezleri, bu cisimlerin köşelerine yerleştirilmiş ve bu kürelerin cisimlerin içerisinden çıkarılmasıyla oluşan üç boyutlu yapılar incelenmiştir. Ulaşılan bu yapılar “düzgün çokyay cisim” olarak isimlendirilmiş ve cismin yüzeylerine göre “4+4”, “6+8” ve “12+20 düzgün çokyay cismi” şeklinde sınıflandırılmıştır. Çalışma kapsamında, bu cisimlerin yüzey alanı ve hacim hesaplamalarına yönelik genel formüller geliştirilmiş; hesaplamalarda kürelerin yüzey alanı ve hacim formülleri, platonik cisimlerin hacim formülleri ile beraber düzgün çokyayların yüzey alan formülleri de kullanılmıştır. Sonuç olarak var olan geometrik yapılardan yola çıkarak yeni bir geometrik şekil ve cisim önerilmiştir.

Anahtar kelimeler: Alan, Analitik Geometri, Çevre, Çokyay

Abstract

In this study, a new geometric structure is proposed using regular polygons and circles. In the proposed structure, called a regular polyarc, circles with diameters equal to the side length of a regular polygon are used. The centers of these circles are placed at the vertices of the corresponding polygon, and the regions formed by subtracting the circles from the polygon are analyzed. These regions are classified based on the number of arcs they contain and are named as “regular tri-arc”, “regular quad-arc”, “regular penta-arc”, and so on. Using the perimeter and area formulas of the circle along with the area formulas of regular polygons, perimeter and area calculations for these new shapes are carried out. Based on the identified patterns, general formulas are developed to calculate the perimeter and area of any regular polyarc. Additionally, spheres with diameters equal to the edge lengths of Platonic solids (regular tetrahedron, cube, and dodecahedron) are centered at the vertices of these solids, and new three-dimensional structures are formed by subtracting the spheres from the solids. These resulting bodies are named regular polyarc solids and are classified according to their face structure as “4+4”, “6+8”, and “12+20 regular polyarc solids”. General formulas for calculating the surface area and volume of these solids are derived using the surface area and volume formulas of spheres, the volume formulas of Platonic solids, and the surface area formulas of regular polyarcs. As a result, new geometric shapes and solids are proposed based on existing geometric structures.

Keywords: Area, Analytic Geometry, Perimeter, Polyarc

1. Giriş

1. Introduction

Estetik ve simetri, matematiksel düşüncede ve tasarımda temel öneme sahip kavramlardır. Özellikle estetik ve simetri insanoğlunun tasarım anlayışının en önemli unsurlarındandır. Matematik ve mimari gibi birçok bilim ve sanat dalında da bu konular üzerinde titizlikle çalışılan bir olgu olmuştur (Pesen, 2002). Matematğin

*Emin YAŞAR; eminyasar@gantep.edu.tr

içerisinde yer alan geometri çalışmalarının temelinde de estetik ve simetri ile beraber, geometrik kavramların ve şekillerin çizilerek görselleştirilmesi ve bunlara dayalı olarak genellemelerin oluşturulması yer almaktadır (Köse, 2008). Günlük hayatta da önemli bir yer kaplayan ve geometrinin estetik yönünü ortaya çıkaran çokgenler, çemberler ve daireler, geometrinin temel uğraş alanlarındandır. Geçmişteki mimari tasarımlarda, örneğin Anadolu süslemelerinde, düzgün çokgenlerin oluşturulması; bir çember içine çizilen ve çevresinde dönen şekillerin tasarımı; açılar ve doğruların belirli sayıda eşit parçaya bölünmesi; şekillerin yansıma, öteleme ve dönme gibi işlemlerle dönüştürülmesi; simetri gruplarının kullanımı ve süslemelerin renklendirilmesi gibi pek çok matematiksel kavram ve yöntemin kullanıldığı görülmektedir (İpek & Özmüş, 2014).

Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta olan noktaların oluşturduğu küme, çember olarak tanımlanır. Çemberin sınırladığı bölge yani çembersel bölge ise daire olarak ifade edilmektedir (Musser vd., 2013). Çemberlerde çevre hesaplama yapılırken tüm çemberlerde geçerli olan bir kural vardır. Bu ilişki, tarihsel süreçte yapılan ölçümler ve gözlemlerle keşfedilmiş ve yaklaşık değerlerle ifade edilmiştir. Çemberi çizmek için bir taşın altına ip koyularak taşın etrafında bir tam tur dönüldüğünde üzerinden geçilen yerlerin çizilerek çember oluşturulduğu düşünülürse: “Çemberin çevresi çizim aracı olarak kullanılan ip parçasının uzunluğunun iki katının yaklaşık üç katıdır.”. Eski dönemlerde net bir bilgi sahibi olunmadığı için yaklaşık değer hesaplanmıştır. Hesaplanan bu yaklaşık değer aslında 3, 3.4 ya da $\frac{22}{7}$ olarak kabul edilen π sayısıdır. Kullanılan ip parçası çemberin orta noktasından yani merkezinden bir kenarına kadar olan uzunluktur. Bu uzunluğun adı yarıçaptır. Çemberlerin çevresi yarıçaplarının iki katının π ile çarpılması ile elde edilebilir. Yani çevre formülü $2\pi r$ ’dir. Dairelerin alanı ise yarıçaplarının karesinin π ile çarpılması ile bulunabilir. Dolayısıyla alan formülü πr^2 olur (Ata, 2008). Bir dairenin herhangi iki yarıçapının arasında kalan bölgeye ise daire dilimi denir. Daire dilimi literatürde iki şekilde ele alınmıştır. Daire diliminin çevresi iki yarıçap uzunluğu ve bu iki yarıçapın arasında kalan yay uzunluğundan oluşmaktadır. Yayın uzunluğu, iki yarıçap arasında kalan merkez açısı (α) radyan ölçü biriminde verildiğinde αr formülü ile hesaplanır. Benzer şekilde bu daire diliminin alanı $\frac{\alpha}{2} r^2$ formülü ile bulunabilir (Dewan, 2016).

Bütün kenar uzunlukları ve açı ölçüleri eşit olan çokgenlere düzgün çokgen denir. Belirli bir kural üzerine ilerleyen değerler ya da şekiller örüntüleri oluşturmaktadır. Geometrik şekiller ve sayılardan oluşan örüntüler tekrardan meydana gelmektedir (Aktaş vd., 2016). Düzgün çokgenler, farklı geometrik yapıların bileşeni olarak çeşitli şekillerde oluşturulabilir. Örneğin, eş ikizkenar üçgenlerin birleştirilmesiyle kare elde edilebilir. Ya da birkaç tane çember kullanarak çemberlerin merkezlerine ve farklı noktalarına isim verilerek o noktalar üzerinden geçen doğrular ile düzgün çokgenler oluşturulabilir. Düzgün çokgenlerin de kendi özelliklerine göre alan ve çevre hesaplama yöntemleri vardır. Düzgün çokgenlerin alan hesabı ise dik üçgenler kullanarak yapılabilmektedir. Düzgün çokgenler üçgenlere parçalanabildikleri için, alanlarının hesaplanmasında üçgenler kullanılabilir (Altun, 1998). Dolayısıyla düzgün çokgenin merkezinden köşelere çizilen doğru parçaları ile çokgenlerin iç bölgesinde ikizkenar üçgenler oluşmakta ve bu üçgenlerin alanları ile oluşan üçgenlerin sayılarını çarpımı ile çokgenlerin alanları hesaplanabilmektedir (Aslanel & İlhan, 2018).

Düzgün geometrik cisim veya düzgün çok yüzlüler olarak da adlandırılan platonik cisimler, eş düzgün çokgenlerden oluşan eş yüzlere sahip çok yüzlülerdir. Beş tane düzgün çok yüzlü tanımlanmıştır (Steinhaus 1999). Bunlar Euclid’in Elements’in son önermesinde belirttiği gibi; düzgün dört yüzlü, düzgün altı yüzlü (küp), düzgün sekiz yüzlü, düzgün on iki yüzlü ve düzgün yirmi yüzlüdür (Coxeter 1973, Cromwell 1997). Düzgün dört yüzlü, dört tane eşkenar üçgen yüzeyi bulanan, tabanı eşkenar üçgen olan piramittir. Düzgün altı yüzlü, ayrıntı uzunlukları birbirine eşit olan ve altı yüzeyi kare olan dik prizmadır. Düzgün on iki yüzlü, on iki tane düzgün beşgen yüzeyi olan cisim olarak tanımlanmıştır (Harris & Stocker, 1998). Küre ise Öklid uzayındaki ($\mathbb{R}^3$) bir noktaya eşit uzaklıktaki tüm noktaların kümesi olarak tanımlanır (Beyer, 2000). Geometrik cisimler, yüksek simetriye sahip yapılar olmaları nedeniyle bu çalışmada geliştirilen yeni geometrik yapıların üç boyutlu yansımaları için bir temel teşkil etmektedir.

Bu çalışmada, geometrik şekillerden düzgün çokgenler ve daireler kullanılarak yeni bir geometrik yapı önerilmiştir. “Düzgün çokyay” olarak önerilen bu yapı, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 3$ için tanımlı düzgün n-genin her bir köşesine, yarıçapı $r = \frac{\ell}{2}$ olan bir dairenin merkezleri yerleştirilerek elde edilen, dışbükey dairesel yaylarla sınırlı, düzgün ve simetrik bir düzlemsel eğrisel çokgendir. Burada ℓ , ilgili düzgün çokgenin kenar uzunluğunu ifade eder. Her dairenin merkezi, çokgenin bir köşesi olacak biçimde yerleştirilir ve dairelerin çokgenlerle kesiştiği bölgeler şekilden çıkarılır. Elde edilen geometrik yapı, klasik düzgün çokgen kenarlarının yerine

yaylarla tanımlanan sürekli ve simetrik bileşenlere sahiptir. Ayrıca merkezleri düzgün dört yüzlü, altı yüzlü, on iki yüzlünün köşelerine yerleştirilen; çap uzunluğu bu cisimlerin ayrıt uzunluğuna eşit olan küreler çıkarılarak elde edilen cisimler “**düzgün çokyay cisim**” olarak isimlendirilmiştir. Düzgün çokyayların çevre, alan ile düzgün çokyay cisimlerinin yüzey alan ve hacim hesaplama formülleri geliştirilmiştir.

2. Materyal ve metot

2. Material and method

Bu çalışmada bir düzgün çokgen ile çapı bu çokgenin kenar uzunluğuna eşit daireler kullanılarak elde edilen yeni bir geometrik şekil önerilmiştir. Bu bağlamda en küçük düzgün çokgenden başlanarak sıralı bir biçimde diğer düzgün çokgenler de incelenmiş ve genel bir yargıya varılmıştır. Merkezleri düzgün çokgenin köşelerine yerleştirilen dairelerin çıkarılmasıyla geometrik şekiller oluşmuştur. Düzgün çokgenlerin iç kısımlarında kalan bu bölgeler irdelenmiş ve keşfedilen yapılar “**düzgün çokyay**” olarak isimlendirilmiştir. Bu şekillerin çevre ile alan hesaplamalarını veren formüller geliştirilmiştir. Ayrıca merkezleri düzgün dört yüzlü, altı yüzlü, on iki yüzlünün köşelerine yerleştirilen; çap uzunluğu bu cisimlerin ayrıt uzunluğuna eşit olan küreler çıkarılarak elde edilen cisimler “**düzgün çokyay cisim**” olarak isimlendirilmiştir. Bu cisimlerin yüzey alanı ve hacim hesaplamaları veren formüller geliştirilmiştir. Düzgün çokgenlerin, dairelerin, platonik cisimlerin ve kürelerin kesişim durumları ile kesişim bölgelerini çizebilmek ve diğer hesaplamalar için geogebra programından yararlanılmıştır.

3. Bulgular ve tartışma

3. Results and discussion

Bu bölümde, düzgün çokyayların belirlenmesi ve tanımlanmasına; örüntülerinin incelenmesine, alan ve çevre hesaplamalarının yapılmasına; ayrıca düzgün çokyaylardan oluşan cisimlerin isimlendirilmesine, yüzey alanı ve hacim hesaplama formüllerinin geliştirilmesine yönelik bulgulara yer verilmiştir.

3.1. Düzgün çokyaylar ve çeşitleri

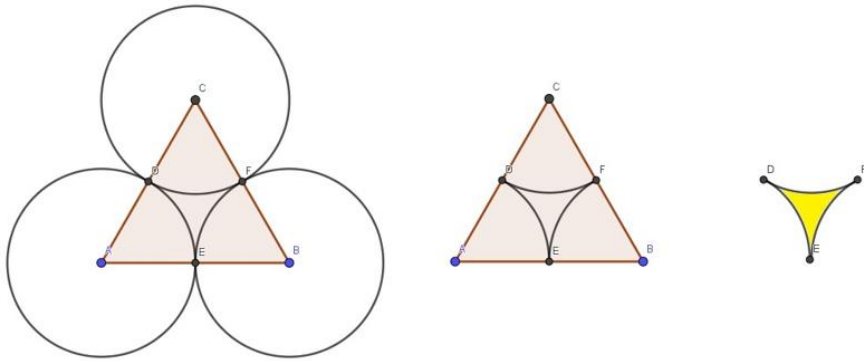
3.1. Uniform polycarcs and their types

Düzgün çokyayların elde edilme aşamaları: Düzgün bir çokgen ve bu çokgenin bir kenar uzunluğu, çapına eşit olan daireler belirlenmiştir. Belirlenen düzgün çokgenin köşe sayısı kadar daire, merkezleri çokgenin köşe noktaları olacak şekilde yerleştirilmiştir. Çokgenin yüzey alanından dairelerle kesiştiği bölgeler çıkarılmış, oluşan geometrik şekiller düzgün çokyay olarak isimlendirilmiştir. Düzgün çokyaylar da kendi içinde yay sayısına göre (üçyay, dörtüay, vb.) sınıflandırılmıştır.

3.1.1. Düzgün üçyay

3.1.1. Smooth arc-triangle

Düzgün çokgen eşkenar üçgen olarak seçildiğinde Şekil 1’de görüldüğü üzere ilk olarak dairelerin merkezleri üçgenin köşelerine yerleştirilir. Daha sonra üçgenin iç bölgesi ele alınır ve iç kısımda kalan bölge renklendirilerek DEF düzgün üçyayı elde edilir.



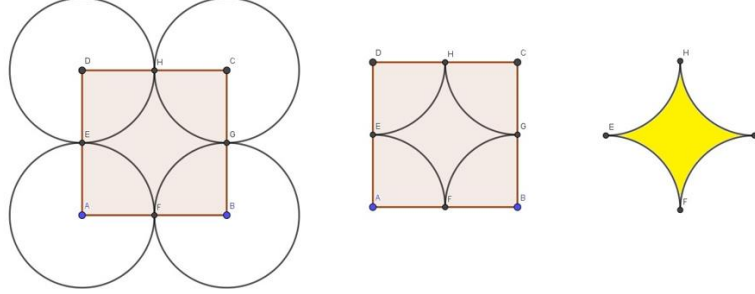
Şekil 1. Eşkenar üçgen ve dairelerin kesişimi ile oluşan bölge

Figure 1. Region formed by the intersection of equilateral triangles and circles

3.1.2. Düzgün dörtyay

3.1.2. Smooth arc-quadrilateral

Düzgün çokgen kare olarak seçildiğinde Şekil 2’de görüldüğü üzere öncelikle dairelerin merkezleri karenin köşelerine yerleştirilir. Daha sonra karenin iç bölgesi ele alınır ve iç kısımda kalan bölge renklendirilerek *EFGH düzgün dörtyayı* elde edilir.



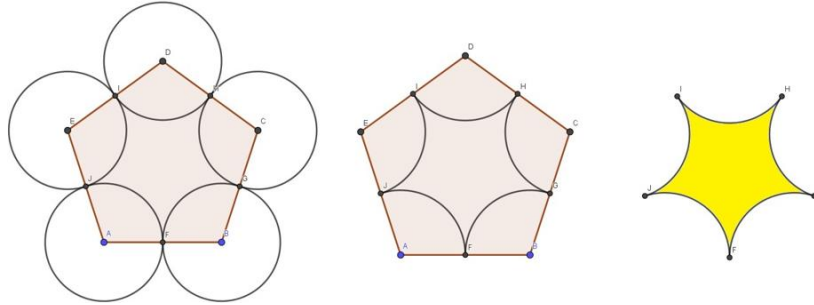
Şekil 2. Kare ve dairelerin kesişimi ile oluşan bölge

Figure 2. Region formed by the intersection of squares and circles

3.1.3. Düzgün beşyay

3.1.3. Smooth arc-pentagon

Düzgün çokgen düzgün beşgen olarak seçildiğinde Şekil 3’de görüldüğü üzere öncelikle dairelerin merkezleri beşgenin köşelerine yerleştirilir. Daha sonra beşgenin iç bölgesi ele alınır ve iç kısımda kalan bölge renklendirilerek *FGHIJ düzgün beşyayı* elde edilir.



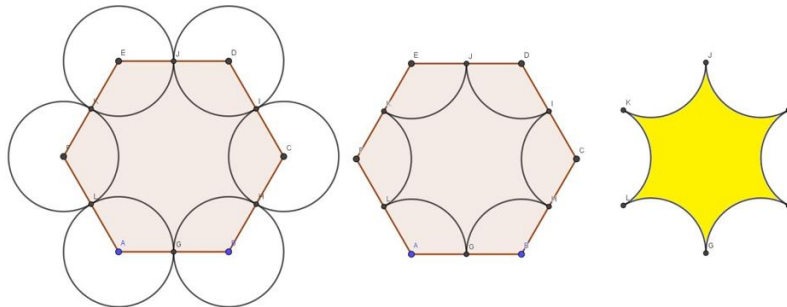
Şekil 3. Düzgün beşgen ve dairelerin kesişimi ile oluşan bölge

Figure 3. Region formed by the intersection of regular pentagons and circles

3.1.4. Düzgün altıyay

3.1.4. Smooth arc-hexagon

Düzgün çokgen, düzgün altıgen olarak seçildiğinde Şekil 4’te görüldüğü üzere öncelikle dairelerin merkezleri çokgenin köşelerine yerleştirilir. Daha sonra altıgenin iç bölgesi ele alınır ve iç kısımda kalan bölge renklendirilerek *GHIJKL düzgün altıyayı* elde edilir.



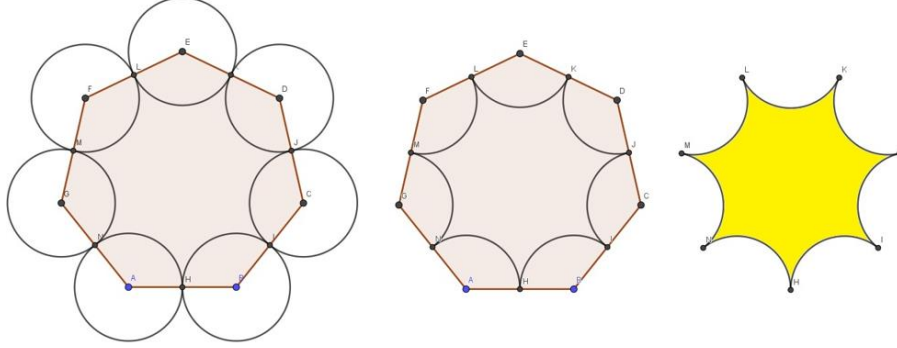
Şekil 4. Düzgün altıgen ve dairelerin kesişimi ile oluşan bölge

Figure 4. Region formed by the intersection of regular hexagons and circles

3.1.5. Düzgün yediyay

3.1.5. Smooth arc-heptagon

Düzgün çokgen düzgün yedigen olarak seçildiğinde Şekil 5'te görüldüğü üzere öncelikle dairelerin merkezleri yedigenin köşelerine yerleştirilir. Daha sonra yedigenin iç bölgesi ele alınır ve iç kısımda kalan bölge renklendirilerek *HJKLMN düzgün yediyayı* elde edilir.



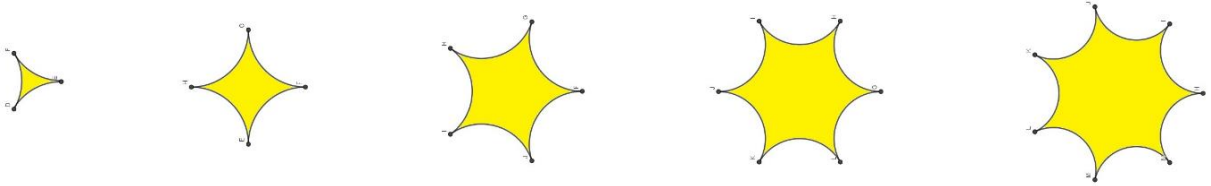
Şekil 5. Düzgün yedigen ve dairelerin kesişimi ile oluşan bölge

Figure 5. Region formed by the intersection of regular heptagon and circles

3.1.6. Düzgün çokyayların örüntüsü

3.1.6. The pattern of smooth polyarcs

Ele alınan düzgün çokgenlerden elde edilen farklı çokyaylar incelenmiştir. Ortaya çıkan çokyaylara ait örüntü Şekil 6'da sunulmuştur.



Şekil 6. Düzgün çokyaylar örüntüsü

Figure 6. Pattern of the smooth polyarcs

3.2. Düzgün çokyayların alan ve çevre hesaplamaları

3.2. Area and perimeter calculations of smooth polyarcs

Oluşan düzgün çokyayların alan ve çevre hesaplarını yapabilmek için bir dairenin çevre ve alan formülü ile bir düzgün çokgenin alan formülünden yararlanılmıştır.

3.2.1. Düzgün çokyayların alan hesaplama formülü

3.2.1. Area calculation formula for smooth polyarcs

Bir düzgün çokgenin köşelerine, bu çokgenin kenar uzunluğu ile eşit uzunlukta çapa sahip dairelerin merkezleri yerleştirildiğinde elde edilenler:

- Düzgün çokgenin kenar sayısı kadar daire kullanılmıştır.
- Düzgün çokgenin bir iç açısı ölçüsünde daire dilimleri oluşmuştur.
- Düzgün çokgenlerin alanından oluşan daire dilimlerinin alanları çıkarıldığında geriye düzgün çokyayların alanları kalmaktadır.

Bu bilgiler ışığında oluşan düzgün üçyayın alanı hesaplanırken dairenin alan formülünden (1) ve daire diliminin alan formülünden (2) yararlanılmıştır.

Dairenin yarıçapı (r), pi sayısı (π) ve daire dilimini ifade eden bölgenin merkez açısı (α) olmak üzere;

$$A = \pi r^2, \quad (1)$$

$$A_D = \frac{\alpha}{2} r^2. \quad (2)$$

Eşkenar üçgen kullanıldığında düzgün çokgenin bir iç açısı $\frac{\pi}{3}$ radyan olacaktır. Buradan düzgün çokgenin iç kısmında $\frac{\pi}{3}$ radyanlık daire dilimleri oluşmuştur. Öncelikle daire diliminin alanları toplamı bulunur. Bu bağlamda tek tek daire dilimlerinin alanlarını bulmaktansa üç daire diliminin birleşiminin alanını bulmak işlem kolaylığı sağlayacaktır. Daire dilimlerinin birleşimlerinin alanı denklemde (3) görüldüğü gibi π radyan ölçüsünde bir yarım daire oluşmaktadır. Bir dairenin alanı ise merkez açısı 2π radyan olduğundan πr^2 dir. Sonuç olarak 2π radyanın yarısı π radyan olduğundan bir dairenin alanının yarısı (4) formülü olacaktır.

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi, \quad (3)$$

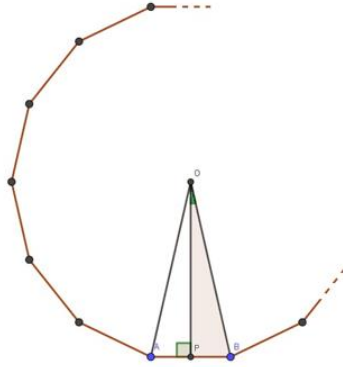
$$A_2 = \frac{\pi r^2}{2}. \quad (4)$$

Sonraki adımda eşkenar üçgenin alanı bulunmalıdır. Düzgün çokgenlerin kenar uzunluğu, dairelerin çaplarına eşit uzunlukta olacak şekilde ele aldığından dolayı $2r$ olarak alınmıştır. Ayrıca bir düzgün çokgenin alanını hesaplayabilmek için Şekil 7’de görüldüğü gibi düzgün çokgen üçgen parçalara ayrılmıştır. Oluşturulan üçgen sayısı ile kenar sayısı birbirine eşittir. Üçgenin alanı ile düzgün çokgenin kenar sayısı (n) ile çarpılarak çokgen alanı bulunur. Şekil 7’de verilen AOB üçgeninin O köşesinden AB kenarına dikme indirilmiştir. AOP açısı α açısı olarak adlandırılmıştır. AOB üçgenin alanını OP uzunluğu ile AB uzunluğunun çarpımının yarısıdır. OP uzunluğunu ise (5) olacağından AOB üçgeninin alanı sonuç olarak (6) elde edilmiştir. Buradan hareketle n kenarlı bir düzgün çokgenin alanı ise (7) olur.

$$|OP| = r \cot(\alpha), \quad (5)$$

$$A_{AOB} = r^2 \cot(\alpha), \quad (6)$$

$$A_{DÇ} = nr^2 \cot(\alpha). \quad (7)$$



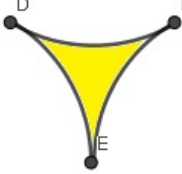
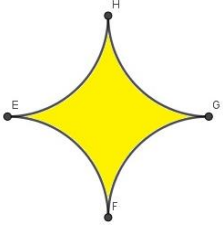
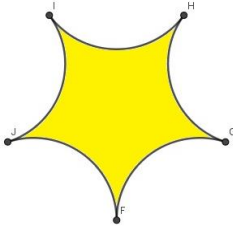
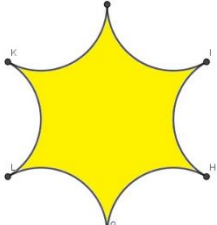
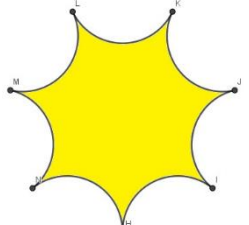
Şekil 7. Düzgün çokgenlere ait alanın üçgenlere bölünerek ifade edilmesi
Figure 7. Expressing the area of regular polygons divided by triangles

Düzgün çokgenlerin alan formülü kullanılarak eşkenar üçgenin alanı ise (8) ‘a eşit olacaktır. Sonraki adımda eşkenar üçgenin alanından daire dilimlerinin alanlarını çıkardığımızda düzgün üçyayın alanı (9) olarak bulunmuştur. Benzer şekilde diğer düzgün çokyayların alanları hesaplanarak Tablo 1’ de sunulmuştur.

$$A = 3r^2 \cot\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad (8)$$

$$\text{Düzgün üçyayın alanı} = 3r^2 \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi r^2}{2}. \quad (9)$$

Tablo 1. Düzgün çokyayların alan hesaplamaları**Table 1.** Area calculations of uniform polyarcs

Kullanılan Düzgün Çokgen	Kullanılan Düzgün Çokgenin İç Açıları Toplamı	Kullanılan Düzgün Çokgenin Alanı	Oluşan Daire Dilimlerinin Açısı ve Alanı	Düzgün Çokyay Şekli ve Adı	Düzgün Çokyayın Alanı
Eşkenar Üçgen	π	$3r^2 \cot\left(\frac{\pi}{3}\right)$	π $\frac{1}{2} \pi r^2$	 Düzgün üçyay	$3r^2 \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi r^2}{2}$
Kare	2π	$4r^2 \cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$	2π πr^2	 Düzgün dördüyay	$4r^2 \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi r^2$
Düzgün Beşgen	3π	$5r^2 \cot\left(\frac{\pi}{5}\right)$	3π $\frac{3}{2} \pi r^2$	 Düzgün beşyay	$5r^2 \cot\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{3}{2} \pi r^2$
Düzgün Altıgen	4π	$6r^2 \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)$	4π $2\pi r^2$	 Düzgün altıyay	$6r^2 \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\pi r^2$
Düzgün Yedigen	5π	$7r^2 \cot\left(\frac{\pi}{7}\right)$	5π $\frac{5}{2} \pi r^2$	 Düzgün yediyay	$7r^2 \cot\left(\frac{\pi}{7}\right) - \frac{5}{2} \pi r^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Düzgün n-gen	$(n-2)\pi$	$nr^2 \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$	$(n-2)\pi$ $\frac{(n-2)\pi r^2}{2}$	Düzgün n-yay	$A_{n-yay} = A_{n-gen} - A_{daire\ dilimleri}$ $nr^2 \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{(n-2)\pi r^2}{2}$

Düzgün çokyayların alanları arasındaki örüntü ve genel alan hesaplama formülü Tablo 1’de görülmektedir. Genelleştirilen alan formülü çokyayların alan hesaplamalarını kolaylaştırmaktadır.

3.2.2. Düzgün çokyayların çevre hesaplama formülü

3.2.2. Perimeter calculation formula of smooth polyarcs

Bir düzgün çokgenin köşelerine, bu çokgenin kenar uzunluğu ile eşit uzunlukta çapa sahip dairelerinin merkezleri yerleştirildiğinde elde edilen veriler:

- Düzgün çokgenin kenar sayısı kadar daire kullanılmıştır.
- Düzgün çokgenin bir iç açısı ölçüsünde daire dilimleri oluşmuştur.
- Oluşan daire dilim yaylarının çevreleri toplamı düzgün çokyayların çevre uzunluğuna eşittir.

Bu bilgiler ışığında oluşan düzgün üçyayın çevresi hesaplanırken dairenin çevre formülünden (10) yararlanılır.

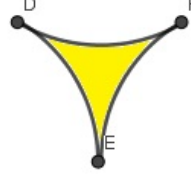
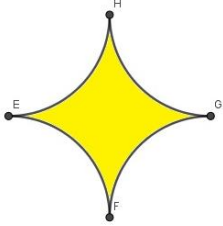
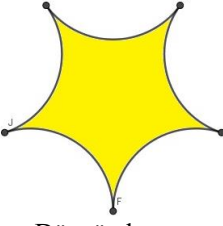
Dairenin yarıçapı (r) ve pi sayısı (π) olmak üzere;

$$\mathcal{C} = 2\pi r. \quad (10)$$

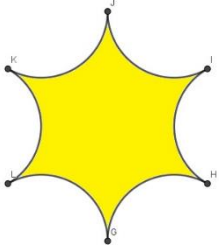
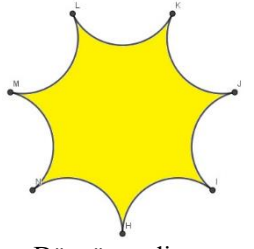
Eşkenar üçgenin bir iç açısı $\frac{\pi}{3}$ radyan olacaktır. Daire dilimlerinin yay uzunlukları toplamı ise düzgün üçyayın çevre uzunluğuna eşit olacaktır. Buradan hareketle tek tek daire dilimlerinin yay uzunluklarını bulmaktansa üç daire diliminin birleşiminin yay uzunluğunu bulmak işlem kolaylığı sağlayacaktır. Daire dilimlerinin birleşimi ile π radyan ölçüsünde yarım daire oluşmaktadır. Yarım dairenin çevresi $\mathcal{C}_2 = \pi r$ dir. Benzer şekilde diğer düzgün çokyayların çevreleri hesaplanarak Tablo 2’ de sunulmuştur.

Tablo 2. Düzgün çokyayların çevre hesaplamaları

Table 2. Perimeter calculations of uniform polyarcs

Kullanılan Düzgün Çokgen	Kullanılan Düzgün Çokgenin İç Açısı Toplamı	Oluşan Daire Dilimlerinin Açısı ve Yay Uzunlukları	Düzgün Çokyay Şekli ve Adı	Düzgün Çokyayın Çevresi
Eşkenar Üçgen	π	π πr	 Düzgün üçyay	πr
Kare	2π	2π $2\pi r$	 Düzgün dörtyay	$2\pi r$
Düzgün Beşgen	3π	3π $3\pi r$	 Düzgün beşyay	$3\pi r$

Tablo 2. Devamı
Table 2. Continued

Kullanılan Düzgün Çokgen	Kullanılan Düzgün Çokgenin İç Açısı Toplamı	Oluşan Daire Dilimlerinin Açısı ve Yay Uzunlukları	Düzgün Çokyay Şekli ve Adı	Düzgün Çokyayın Çevresi
Düzgün Altıgen	4π	4π $4\pi r$	 Düzgün altıyay	$4\pi r$
Düzgün Yedigen	5π	5π $5\pi r$	 Düzgün yediyay	$5\pi r$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Düzgün n-gen	$(n - 2)\pi$	$(n - 2)\pi$ $(n - 2)\pi r$	Düzgün n-yay	$(n - 2)\pi r$

Düzgün çokyayların çevreleri arasındaki örüntü ve genel alan hesaplama formülü Tablo 2’de görülmektedir. Genelleştirilen çevre formülü çokyayların çevre hesaplamalarını kolaylaştırmaktadır.

3.3. Düzgün çokyay cisimler ve çeşitleri

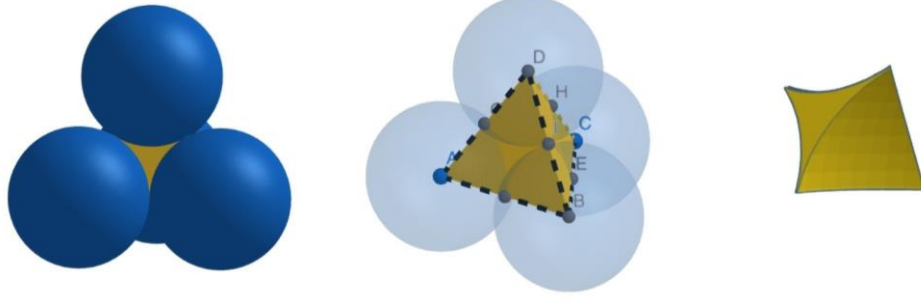
3.3.1. Uniform polyarcoid and their types

Düzgün çokyay cisimlerin elde edilme aşamaları: Düzgün dört yüzlü, altı yüzlü veya on iki yüzlünün bir ayrıt uzunluğu, çapına eşit olan küreler belirlenmiştir. Belirlenen düzgün çokyüzlünün köşe sayısı kadar küre, merkezleri ilgili çokyüzlünün köşe noktaları olacak şekilde yerleştirilmiştir. Çokyüzlüden küreler çıkarılmış, oluşan geometrik cisimler düzgün çokyay cisim olarak isimlendirilmiştir. Düzgün çokyay cisimler düzgün 4+4 yüzlü çokyay cismi, düzgün 6+8 yüzlü çokyay cisim ve düzgün 12+20 yüzlü çokyay cisim olarak sınıflandırılmıştır.

3.3.1.1. Düzgün 4+4 yüzlü çokyay cismi

3.3.1.1. Uniform 4+4 faced polyarcoid

Merkezleri düzgün dört yüzlünün köşelerine yerleştirilen dört küre Şekil 8’de görüldüğü gibi çıkarılır. Köşe açılarının 3 boyutlu olduğu için steradyan birimi kullanılır. Açık Ω sembolü ile ifade edilir. Düzgün dört yüzlünün kalan bölgeleri renklendirilerek *düzgün 4+4 yüzlü çokyay cismi* olarak isimlendirilir. İfadedeki 4+4’lerden ilk 4, düzgün üçyay yüzeyini; ikinci 4 ise küre yüzey alan parçalarını temsil etmektedir.



Şekil 8. Düzgün 4+4 yüzlü çokyay cismi
Figure 8. Uniform 4+4 faced polyarcoid

3.3.2. Düzgün 6+8 yüzlü çokyay cismi

3.3.2. Uniform 6+8 faced polyarcoid

Merkezleri düzgün altı yüzlünün köşelerine yerleştirilen altı küre Şekil 9’da görüldüğü gibi çıkarılır. Köşe açıların 3 boyutlu olduğu için steradyan birimi kullanılır. Açı Ω sembolü ile ifade edilir. Düzgün altı yüzlünün kalan bölgeleri renklendirilerek *düzgün 6+8 yüzlü çokyay cismi* olarak isimlendirilir. İfadede yer alan 6+8’deki 6, düzgün dörtyay yüzeyini, 8 ise küre yüzey alan parçalarını temsil etmektedir.

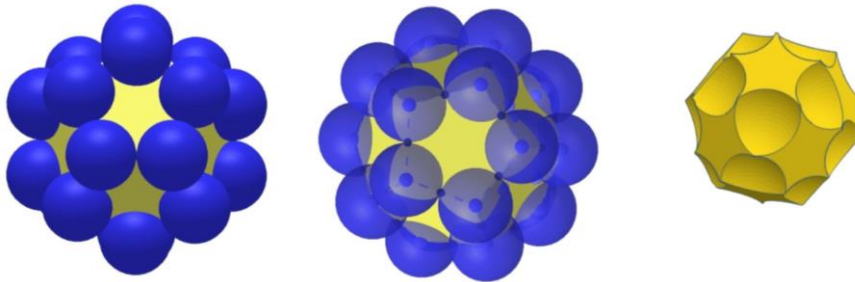


Şekil 9. Düzgün 6+8 yüzlü çokyay cismi
Figure 9. Uniform 6+8 faced polyarcoid

3.3.3. Düzgün 12+20 yüzlü çokyay cismi

3.3.3. Uniform 12+20 faced polyarcoid

Merkezleri düzgün on iki yüzlünün köşelerine yerleştirilen on iki küre Şekil 10’da görüldüğü gibi çıkarılır. Köşe açıların 3 boyutlu olduğu için steradyan birimi kullanılır. Açı Ω sembolü ile ifade edilir. Düzgün on iki yüzlünün kalan bölgeleri renklendirilerek *düzgün 12+20 yüzlü çokyay cismi* olarak isimlendirilir. İfadede yer alan 12+20’deki 12, düzgün beşyay yüzeyini, 20 ise küre yüzey alan parçalarını temsil etmektedir.



Şekil 10. Düzgün 12+20 yüzlü çokyay cismi
Figure 10. Uniform 12+20 faced polyarcoid

3.3.4. Düzgün çokyay cisimlerinin örüntüsü

3.3.4. The pattern of uniform polyarcoids

Ele alınan düzgün çok yüzlülerden elde edilen farklı çokyay cisimler incelenmiştir. Ortaya çıkan çokyay cisimlere ait örüntü Şekil 11’de sunulmuştur.



Şekil 11. Düzgün çokyay cisimlerin örüntüsü

Figure 11. Pattern of uniform polyarcoids

3.5. Düzgün çokyay cisimlerin yüzey alan hesaplamaları

3.5. Surface area calculations of uniform polyarcoids

Oluşan düzgün çokyay cisimlerinin yüzey alan hesaplarını yapabilmek için 3.2.1. bölümde elde edilen düzgün çokyay alan formülü ile kürenin yüzey alan formülünden yararlanılmıştır.

3.5.1. Düzgün 4+4 yüzlü çokyay cisminin yüzey alan hesaplama formülü

3.5.1. Surface area calculation formula for uniform 4+4 faced polyarcoid

Merkezleri bir düzgün dört yüzlü cismin köşelerine yerleştirilen yarıçap uzunluğu ayrıt uzunluğunun yarısı olan küreler çıkarıldığında elde edilenler;

- Düzgün dört yüzünün köşe sayısı kadar küre kullanılmıştır.
- Düzgün dört yüzlü cismin bir köşesindeki açı kadar küre parçaları çıkarılmıştır.
- Düzgün üçyay yüzey alanı ile küre yüzey alanı parçalarının düzgün 4+4 yüzlü çokyay cisminin yüzey alanını vermektedir.

Bu bilgiler ışığında düzgün üçyayların yüzey alanı formülünden (11), kürenin yüzey alanı formülünden (12) ve küre parçası yüzey alanı formülünden (13) yararlanılmıştır.

$$A_{\text{Düzgün Üçyay}} = 3r^2 \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi r^2}{2}, \quad (11)$$

$$A_{\text{Küre}} = 4\pi r^2, \quad (12)$$

$$A_{\text{Küre Parçası}} = \Omega r^2. \quad (13)$$

Düzgün 4+4 yüzlü cisminde 4 düzgün üçyay yüzeyi bulunduğundan düzgün üçyayların yüzey alanı formülünün 4 katı alınmıştır. Ayrıca düzgün dört yüzlü cismin bir köşesindeki açı $\Omega = \arccos\left(\frac{23}{27}\right)$ ile küre parçası hesaplanmıştır. Bu şekilde 4 köşede 4 küre parçası bulunduğundan, küre parçasının yüzey alanının 4 katı alınmıştır. Düzgün üçyayların yüzey alanı ile küre parçalarının yüzey alanı hesaplandığında (14) formülüne ulaşılmıştır.

$$\begin{aligned} YA_{\text{Düzgün 4+4 Çokyay cismi}} &= 4 \left(3r^2 \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi r^2}{2} \right) + 4\Omega r^2 \\ &= 12r^2 \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\pi r^2 + 4 \arccos\left(\frac{23}{27}\right) r^2 \\ &= 2r^2 \left(6\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) - \pi + 2 \arccos\left(\frac{23}{27}\right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

3.5.2. Düzgün 6+8 yüzlü çokyay cisminin yüzey alan hesaplama formülü**3.5.2. Surface area calculation formula for uniform 6+8 faced polyarcoid**

Merkezleri bir düzgün altı yüzlü cismin köşelerine yerleştirilen yarıçap uzunluğu ayrıt uzunluğunun yarısı olan küreler çıkarıldığında elde edilenler;

- Düzgün altı yüzlünün köşe sayısı kadar küre kullanılmıştır.
- Düzgün altı yüzlü cismin bir köşesindeki açı kadar küre parçaları çıkarılmıştır.
- Düzgün dörtay yüzey alanı ile küre parçalarının yüzey alanları toplamı düzgün 6+8 çokyay cisminin yüzey alanını vermektedir.

Bu bilgiler ışığında düzgün dörtayların yüzey alanı formülünden (15), kürenin yüzey alanı formülünden (12) ve küre parçası yüzey alanından (13) yararlanılmıştır.

$$A_{Düzgün Dörtay} = 4r^2 \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi r^2 . \quad (15)$$

Düzgün 6+8 yüzlü çokyay cisminde 6 düzgün dörtay yüzeyi bulunduğundan düzgün dörtayların yüzey alanı formülünün 6 katı alınmıştır. Ayrıca düzgün altı yüzlü cismin bir köşesindeki açı $\Omega = \frac{\pi}{2}$ (düzgün altı yüzlünün köşe açıları dikey olduğundan) ile küre parçası hesaplanmıştır. Bu şekilde 8 köşede 8 küre parçası bulunduğundan, küre parçasının yüzey alanının 8 katı alınmıştır. Düzgün dörtayların yüzey alanı ile küre parçalarının yüzey alanı hesaplandığında (16) formülüne ulaşılmıştır.

$$\begin{aligned} YA_{Düzgün 6+8 Çokyay cismi} &= 6 \left(4r^2 \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi r^2 \right) + 8\Omega r^2 \\ &= 24r^2 \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - 6\pi r^2 + 8\frac{\pi}{2} r^2 \\ &= 24r^2 \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\pi r^2 \\ &= 2r^2 \left(12 \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi \right) . \end{aligned} \quad (16)$$

3.5.3. Düzgün 12+20 yüzlü çokyay cisminin yüzey alan hesaplama formülü**3.5.3. Surface area calculation formula for uniform 12+20 faced polyarcoid**

Merkezleri bir düzgün on iki yüzlü cismin köşelerine yerleştirilen yarıçap uzunluğu ayrıt uzunluğunun yarısı olan küreler çıkarıldığında elde edilenler;

- Düzgün on iki yüzlünün köşe sayısı kadar küre kullanılmıştır.
- Düzgün on iki yüzlü cismin bir köşesindeki açı kadar küre parçaları çıkarılmıştır.
- Düzgün beşyay yüzey alanı ile küre yüzey alanı parçalarının toplamı düzgün 12+20 çokyay cisminin yüzey alanını vermektedir.

Bu bilgiler ışığında düzgün beşyayların yüzey alanı formülünden (17) ve kürenin yüzey alanı formülünden (12) ve küre parçası yüzey alanından (13) yararlanılmıştır.

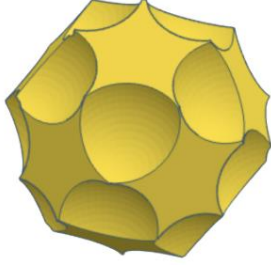
$$A_{Düzgün Beşyay} = 5r^2 \cot\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{3\pi r^2}{2} . \quad (17)$$

Düzgün 12+20 yüzlü cisminde 12 düzgün beşyay yüzeyi bulunduğundan düzgün beşyayların yüzey alanı formülünün 12 katı alınmıştır. Ayrıca düzgün on iki yüzlü cismin bir köşesindeki açı $\Omega = 3 \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ ile küre parçası hesaplanmıştır. Bu şekilde 20 köşede 20 küre parçası bulunduğundan, küre parçasının yüzey alanının 20 katı alınmıştır. Düzgün beşyayların yüzey alanı ile küre parçalarının yüzey alanı hesaplandığında (18) formülüne ulaşılmıştır.

$$YA_{Düzgün 12+20 Çokyay cismi} = 12 \left(5r^2 \cot\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{3\pi r^2}{2} \right) + 20 \Omega r^2$$

$$\begin{aligned}
&= 60r^2 \cot\left(\frac{\pi}{5}\right) - 18\pi r^2 + 60 \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) r^2 \\
&= 2r^2 \left(30 \cot\left(\frac{\pi}{5}\right) - 9\pi + 30 \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \right). \quad (18)
\end{aligned}$$

Tablo 3. Düzgün çokyay cisimlerin yüzey alan hesaplamaları**Table 3.** Surface area calculations of uniform polyarccoids

		
Düzgün 4+4 yüzlü çokyay cismi	Düzgün 6+8 yüzlü çokyay cismi	Düzgün 12+20 yüzlü çokyay cismi
$2r^2 \left(6 \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) - \pi + 2 \arccos\left(\frac{23}{27}\right) \right)$	$2r^2 \left(12 \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi \right)$	$2r^2 \left(30 \cot\left(\frac{\pi}{5}\right) - 9\pi + 30 \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \right)$

Düzgün çokyay cisim yüzey alanları hesaplama formülü Tablo 3'te görülmektedir. Geliştirilen alan formülü çokyay cisim yüzey alan hesaplamalarını kolaylaştırmaktadır.

3.6. Düzgün çokyay cisimlerin hacim hesaplamaları

3.6. Volume calculations of uniform polyarccoids

Oluşan düzgün çokyay cisimlerinin hacim hesaplarını yapabilmek için düzgün dört yüzlü, altı yüzlü, on iki yüzlü ve küre hacim formüllerinden yararlanılmıştır.

3.6.1. Düzgün 4+4 yüzlü çokyay cisminin hacim hesaplama formülü

3.6.1. Volume calculation formula for uniform 4+4 faced polyarccoid

Merkezleri bir düzgün dört yüzlü cismin köşelerine yerleştirilen yarıçap uzunluğu ayrıt uzunluğunun yarısı olan küreler çıkarıldığında elde edilenler;

- Düzgün dört yüzlünün hacmi.
- Düzgün dört yüzlü cismin bir köşesindeki açı kadar küre parçalarının hacmi.

Bu bilgiler ışığında ayrıt uzunluğu $2r$ olan düzgün dört yüzlünün hacim formülünden (19) ve kürenin hacim formülünden (20) ve küre parçasının hacim formülünden (21) yararlanılmıştır.

$$V_{\text{Düzgün Dört Yüzlü}} = \frac{2\sqrt{2}r^3}{3}, \quad (19)$$

$$V_{\text{Küre}} = \frac{4\pi r^3}{3}, \quad (20)$$

$$V_{\text{Küre Parçası}} = \frac{\Omega r^3}{3}. \quad (21)$$

Düzgün 4+4 yüzlü çokyay cisminin hacmi, düzgün dört yüzlünün hacminden küre parçaları çıkarılarak elde edilmiştir. Ayrıca düzgün dört yüzlü cismin bir köşesindeki açı $\Omega = \arccos\left(\frac{23}{27}\right)$ ile küre parçası hesaplanmıştır. Bu şekilde 4 köşede 4 küre parçası bulunduğundan, küre parçasının hacminin 4 katı alınmıştır. Düzgün 4+4 yüzlü cismin hacmi hesaplandığında (22) formülüne ulaşılmıştır.

$$V_{\text{Düzgün 4+4 Yüzlü Cisim}} = \frac{2\sqrt{2}r^3}{3} - 4 \frac{\Omega r^3}{3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{2}r^3}{3} - \frac{4}{3} \arccos\left(\frac{23}{27}\right) r^3 \\
&= \frac{2}{3} r^3 \left(\sqrt{2} - 2 \arccos\left(\frac{23}{27}\right) \right). \quad (22)
\end{aligned}$$

3.6.2. Düzgün 6+8 yüzlü çokyay cisminin hacim hesaplama formülü

3.6.2. Volume calculation formula for uniform 6+8 faced polyarcoid

Merkezleri bir düzgün altı yüzlü cismin köşelerine yerleştirilen yarıçap uzunluğu ayrit uzunluğunun yarısı olan küreler çıkarıldığında elde edilenler;

- Düzgün altı yüzlünün hacmi.
- Düzgün altı yüzlü cismin bir köşesindeki açı kadar küre parçalarının hacmi.

Bu bilgiler ışığında ayrit uzunluğu $2r$ olan düzgün altı yüzlünün hacim formülünden (23) ve kürenin hacim formülünden (20) ve küre parçasının hacim formülünden (21) yararlanılmıştır.

$$V_{\text{Düzgün Altı yüzlü}} = 8r^3. \quad (23)$$

Düzgün 6+8 yüzlü çokyay cisminin hacmi, düzgün altı yüzlünün hacminden küre parçaları çıkarılarak elde edilmiştir. Ayrıca düzgün altı yüzlü cismin bir köşesindeki açı dikey olduğu için bu açı $\Omega = \frac{\pi}{2}$ ile küre parçası hesaplanmıştır. Bu şekilde 8 köşede 8 küre parçası bulunduğundan, küre parçasının hacminin 8 katı alınmıştır. Düzgün 6+8 yüzlü cismin hacmi hesaplandığında (24) formülüne ulaşılmıştır.

$$\begin{aligned}
V_{\text{Düzgün 6+8 Yüzlü Cisim}} &= 8r^3 - 8\Omega \frac{r^3}{3} \\
&= 8r^3 - 8 \frac{\pi}{2} \frac{r^3}{3} \\
&= 4r^3 \left(2 - \frac{\pi}{3} \right). \quad (24)
\end{aligned}$$

3.6.3. Düzgün 12+20 yüzlü çokyay cisminin hacim hesaplama formülü

3.6.3. Volume calculation formula for uniform 6+8 faced polyarcoid

Merkezleri bir düzgün on iki yüzlü cismin köşelerine yerleştirilen yarıçap uzunluğu ayrit uzunluğunun yarısı olan küreler çıkarıldığında elde edilenler;

- Düzgün on iki yüzlünün hacmi.
- Düzgün on iki yüzlü cismin bir köşesindeki açı kadar küre parçalarının hacmi.

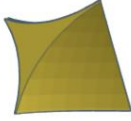
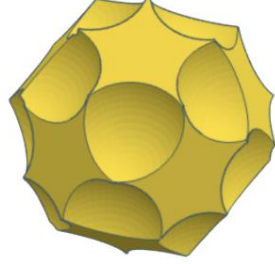
Bu bilgiler ışığında ayrit uzunluğu $2r$ olan düzgün on iki yüzlünün hacim formülünden (25) ve kürenin hacim formülünden (20) ve küre parçasının hacim formülünden (21) yararlanılmıştır.

$$V_{\text{Düzgün On İki Yüzlü}} = (30 + 14\sqrt{5})r^3. \quad (25)$$

Düzgün 12+20 yüzlü çokyay cisminin hacmi, düzgün altı yüzlünün hacminden küre parçaları çıkarılarak elde edilmiştir. Ayrıca düzgün on iki yüzlü cismin bir köşesindeki açı $\Omega = 3 \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ ile küre parçası hesaplanmıştır. Bu şekilde 20 köşede 20 küre parçası bulunduğundan, küre parçasının hacminin 20 katı alınmıştır. Düzgün 6+8 yüzlü cismin hacmi hesaplandığında (26) formülüne ulaşılmıştır.

$$\begin{aligned}
V_{\text{Düzgün 12+20 Yüzlü Cisim}} &= (30 + 14\sqrt{5})r^3 - 20\Omega \frac{r^3}{3} \\
&= (30 + 14\sqrt{5})r^3 - 20 \cdot 3 \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \frac{r^3}{3} \\
&= 2r^3 \left((15 + 7\sqrt{5}) - 10 \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \right). \quad (26)
\end{aligned}$$

Tablo 4. Düzgün çokyay cisimlerin hacim hesaplamaları**Table 4.** Volume calculations of uniform polyarcsoids

		
Düzgün 4+4 yüzlü çokyay cismi	Düzgün 6+8 yüzlü çokyay cismi	Düzgün 12+20 yüzlü çokyay cismi
$\frac{2}{3}r^3 \left(\sqrt{2} - 2 \arccos \left(\frac{23}{27} \right) \right)$	$4r^3 \left(2 - \frac{\pi}{3} \right)$	$2r^3 \left((15 + 7\sqrt{5}) - 10 \arccos \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right) \right)$

Düzgün çokyay cisim hacim hesaplama formülü Tablo 4'te görülmektedir. Geliştirilen hacim formülü çokyay cisim hacim hesaplamalarını kolaylaştırmaktadır.

4. Tartışma ve sonuçlar

4. Discussion and conclusions

Bu çalışma kapsamında tanımlanan düzgün çokyay, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 3$ için tanımlı düzgün n-genin her bir köşesine, yarıçapı $r = \frac{\ell}{2}$ olan bir dairenin merkezleri yerleştirilerek elde edilen, dışbükey dairesel yaylarla sınırlı, düzgün ve simetrik bir düzlemsel eğrisel çokgendir. Burada ℓ , ilgili düzgün çokgenin kenar uzunluğunu ifade eder. Her dairenin merkezi, çokgenin bir köşesi olacak biçimde yerleştirilir ve dairelerin çokgenlerle kesiştiği bölgeler şekilden çıkarılır. Elde edilen geometrik yapı, klasik düzgün çokgen kenarlarının yerine yaylarla tanımlanan sürekli ve simetrik bileşenlere sahiptir. Bu yapı “**düzgün çokyay**” olarak isimlendirilmiştir. Düzgün çokyay olarak adlandırılan bu geometrik şekillerin çevre ve alan ile düzgün çokyay bileşenlerine sahip cisimlerin yüzey alan ve hacimlerinin hesaplanmasını sağlayan formüller geliştirilmiştir.

Düzgün çokyaylar incelenerek özellikleri belirlenmiştir. Sahip olunan özellikler baz alınarak çokyayların alan ve çevre hesaplamaları yapılmıştır. Mevcut geometrik alan ve çevre formülleri kullanılarak bazı çokyayların alan ve çevre hesapları yapılmıştır. Düzgün çokyayların alan ve çevre hesaplamaları tablolastırılarak bir çokyayın alan ve çevresinin bulunmasını kolaylaştıracak formüller geliştirilmiştir. Geliştirilen formüller Tablo 5'te sunulmuştur.

Tablo 5. Düzgün çokyayların alan ve çevre hesaplamaları için geliştirilen formüller**Table 5.** Formulae developed for area and perimeter calculations of regular polyarcs

Düzgün çokyayların alan hesaplama formülü					
Kullanılan Düzgün Çokgen	Kullanılan Düzgün Çokgenin İç Açıları Toplamı	Kullanılan Düzgün Çokgenin Alanı	Düzgün Çokyay Şekli ve Adı	Oluşan Daire Dilimlerinin Açısı ve Alanı	Düzgün Çokyayın Alanı
Düzgün n-gen	$(n-2)\pi$	$nr^2 \cot \left(\frac{\pi}{n} \right)$	Düzgün n-yay	$(n-2)\pi$ $\left(\frac{n-2}{2} \right) \pi r^2$	$nr^2 \cot \left(\frac{\pi}{n} \right) - \left(\frac{n-2}{2} \right) \pi r^2$
Düzgün çokyayların çevre hesaplama formülü					
Kullanılan Düzgün Çokgen	Kullanılan Düzgün Çokgenin İç Açısı Toplamı	Oluşan Daire Dilimlerinin Açısı ve Yay Uzunlukları	Oluşan Daire Dilimlerinin Açısı ve Yay Uzunlukları	Düzgün Çokyayın Çevresi	
Düzgün n-gen	$(n-2)\pi$	Düzgün n-yay	$(n-2)\pi$ $(n-2)\pi r$	$(n-2)\pi r$	

Düzgün çokyaylar kendisini oluşturan yayların sayısı baz alınarak düzgün üçyay, düzgün dörtyay, düzgün beşyay vb. şeklinde nitelendirilmiştir. Düzgün dört yüzlü, düzgün altı yüzlü, düzgün on iki yüzlü ve küre kullanılarak yüzeyleri düzgün çokyay, küre dilimi yüzeyi olan cisimler elde edilmiştir. Bu cisimler 4+4 yüzlü çokyay cismi, 6+8 yüzlü çokyay cismi ve 12+20 yüzlü çokyay cismi olarak isimlendirilmiştir. Tanımlanan çokyay cisimleri incelenerek özellikleri belirlenmiştir. Sahip olunan özellikler incelenerek yüzey alanı ve hacim hesapları yapılmış ve geliştirilen formüller Tablo 6’te sunulmuştur.

Tablo 6. Düzgün çokyay cisimlerin yüzey alan ve hacim hesaplamaları için geliştirilen formüller

Table 6. Formulae developed for surface area and volume calculations of uniform polyarcs

<i>Düzgün çokyay cisimlerin yüzey alan hesaplama formülü</i>		
Düzgün 4+4 yüzlü çokyay cismi	Düzgün 6+8 yüzlü çokyay cismi	Düzgün 12+20 yüzlü çokyay cismi
$2r^2 \left(6\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) - \pi + 2\arccos\left(\frac{23}{27}\right) \right)$	$2r^2 \left(12\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi \right)$	$2r^2 \left(30\cot\left(\frac{\pi}{5}\right) - 9\pi + 30\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \right)$
<i>Düzgün çokyay cisimlerin hacim hesaplama formülü</i>		
Düzgün 4+4 yüzlü çokyay cismi	Düzgün 6+8 yüzlü çokyay cismi	Düzgün 12+20 yüzlü çokyay cismi
$\frac{2}{3}r^3 \left(\sqrt{2} - 2\arccos\left(\frac{23}{27}\right) \right)$	$4r^3 \left(2 - \frac{\pi}{3} \right)$	$2r^3 \left((15 + 7\sqrt{5}) - 10\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \right)$

Teşekkür

Acknowledgement

Makalenin inceleme ve değerlendirme aşamasında yapmış oldukları katkılardan dolayı editör ve hakem/hakemlere teşekkürler.

Yazar katkısı

Author contribution

Yazarlar bu çalışmanın hazırlanmasına eşit derecede katkıda bulunmuştur.

Etik beyanı

Declaration of ethical code

Bu makalenin yazarları, bu çalışmada kullanılan materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve / veya yasal-özel izin gerektirmediğini beyan etmektedir.

Çıkar çatışması beyanı

Conflicts of interest

Yazarlar herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Kaynaklar

References

- Aktaş, M., Aktaş, S., Aktaş, B. K., & Aktaş, B. (2016). Süslemede simetrinin etkisi. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 36(1), 3-23.
- Altun, M. (1998). Geometri öğretimi. A. Özdaş (Ed.), *Matematik öğretimi* (s. 158-186). Anadolu Üniversitesi Yayınları.
- Aslaner, R., & İlhan, A. (2018). Kare için ifade edilen pisagor bağıntısının diğer düzgün çokgenlere ve daireye uygulanması. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 45, 55-67.

- Ata, M. Y. (2008). π 'nin sanal deneyle tahmini. *Gazi Üniversitesi Endüstriyel Sanatlar Eğitim Fakültesi*, 22, 76-93.
- Beyer, W. H. (Ed.). (2000). *CRC standard mathematical tables* (28th ed.). CRC Press.
- Coxeter, H. S. M. (1973). *Regular polytopes* (3rd ed.). Dover.
- Cromwell, P. R. (1997). *Polyhedra*. Cambridge University Press.
- Dewan, R. K. (2016). *Mathematics summative and formative assessment*. New Saraswati House.
- Harris, J. W., & Stocker, H. (1998). *Handbook of mathematics and computational science*. Springer.
- İpek, J., & Özmüş, P. (2014). Anadolu süslemelerindeki geometri. *Ege Eğitim Dergisi*, 15(2), 521-537. <https://doi.org/10.12984/eed.05654>
- Köse, N. Y. (2008). *İlköğretim 5. sınıf öğrencilerinin dinamik geometri yazılımı Cabri Geometriyle simetriyi anlamlandırmalarının belirlenmesi: Bir eylem araştırması* [Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü].
- Musser, G. L., Peterson, B. E., & Burger, W. F. (2013). *Mathematics for elementary teachers: A contemporary approach*. John Wiley & Sons.
- Pesen, C. (2002). Matematiğin estetiği üzerine. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 22(22), 130-134.
- Steinhaus, H. (1983). *Mathematical snapshots*. Dover.