

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi PART C: TASARIM VE TEKNOLOJİ Gazi University Journal of Science PART C: DESIGN AND TECHNOLOGY



GU J Sci, Part C, 13(2): 553-566 (2025)

Comparison of GUM and Monte Carlo Methods in Uncertainty Analysis of Airflow Measurement Systems

M. Saim SOYSAL¹ \bigcirc , Hacı Mehmet ŞAHİN^{1*} \bigcirc

^{1*} Gazi Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, Enerji Sistemleri Mühendisliği, Ankara, Turkey

Article Info

Grafik Özet (Graphical/Tabular Abstract)

Research article Received: 12/02/2025 Revision: 25/03/2025 Accepted: 26/03/2025

Keywords

Measurement Uncertainty Nonlinear Measurement Systems Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM) Monte Carlo Simulation Validation

Makale Bilgisi

Araştırma makalesi Başvuru: 12/02/2025 Düzeltme: 25/03/2025 Kabul: 26/03/2025

Anahtar Kelimeler

Ölçüm Belirsizliği Doğrulsal Olmayan Ölçüm Sistemleri Ölçüm Belirsizliğinin Hesaplanması Kılavuzu (GUM) Monte Carlo Simulasyonu Doğrulama Bu çalışma, doğrusal olmayan bir hava hızı ve akış ölçüm sisteminin ölçüm belirsizliğini hem GUM yöntemi hem de Monte Carlo simülasyonu ile değerlendirmiştir. Sonuçlar, özellikle 10,805 m/s hızda önemli farklılıklar göstermiştir. Bulgular, doğrusal olmayan sistemlerde güvenilir belirsizlik analizinde Monte Carlo doğrulamasının gerekliliğini vurgulamaktadır. / This study evaluates measurement uncertainty of a nonlinear air velocity and flow measurement system using both the GUM method and Monte Carlo simulation. Results show significant discrepancies, especially at 10.805 m/s. Findings highlight the necessity of Monte Carlo validation for reliable uncertainty analysis in nonlinear measurement systems.



Şekil A: Algılayıcının boyutları ve şematik görünümü, Hava hızının hesaplanmasında balık kılçığı diyagramı **Figure** A: Dimensions and schematic view of the sensor, Fishbone Diagram in the Calculation of Air Velocity

Önemli noktalar (Highlights)

- Doğrusal olmayan sistemin ölçüm belirsizliği hem GUM hem de Monte Carlo yöntemleri ile değerlendirildi./ Measurement uncertainty of nonlinear system was evaluated using both GUM and Monte Carlo methods.
- Özellikle 10,805 m/s hızda GUM ve Monte Carlo sonuçları arasında önemli farklılıklar gözlendi./ Significant discrepancies were observed between GUM and Monte Carlo results, especially at 10.805 m/s velocity.
- Doğrusal olmayan ölçüm sistemlerinde GUM yöntemlerinin geçerliliğini sağlamak üzere Monte Carlo simülasyonu gereklidir./ Monte Carlo simulation is necessary to ensure the validity of GUM methods in nonlinear measurement system.

Amaç (Aim): Doğrusal olmayan ölçüm sistemlerinin belirsizliğini GUM ve Monte Carlo yöntemleri ile değerlendirmek. / To evaluate measurement uncertainty in nonlinear systems using GUM and Monte Carlo methods.

Özgünlük (Originality): Anemometre gibi güçlü doğrusal olmayan sistemlerin incelenmesi/ Study of Highly Nonlinear Systems like Anemometers

Bulgular (Results): GUM ve Monte Carlo sonuçları arasında özellikle yüksek hızlarda belirgin farklılıklar vardır. / There are significant differences between GUM and Monte Carlo results, especially at higher velocities.

Sonuç (Conclusion): Monte Carlo simülasyonu, doğrusal olmayan ölçüm sistemlerinde GUM yönteminin doğrulanması için gereklidir. / Monte Carlo simulation is essential to validate the GUM method in nonlinear measurement systems.

DURISAL OFFICIENCE MARCHAROMORPHICA Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi PART C: TASARIM VE TEKNOLOJİ

Gazi University Journal of Science

PART C: DESIGN AND TECHNOLOGY



http://dergipark.gov.tr/gujsc

Hava Akış Ölçüm Sistemi Belirsizliğinde GUM ve Monte Carlo Yöntemlerinin Karşılaştırılması

M. Saim SOYSAL¹ \bigcirc , Hacı Mehmet ŞAHİN¹ $^{\circ}$

¹Gazi Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, Enerji Sistemleri Mühendisliği, Ankara, Turkey

Makale Bilgisi

Öz

Araştırma makalesi Başvuru: 12/02/2025 Düzeltme: 25/03/2025 Kabul: 26/03/2025

Anahtar Kelimeler

Ölçüm Belirsizliği Doğrulsal Olmayan Ölçüm Sistemleri Ölçüm Belirsizliğinin Hesaplanması Kılavuzu (GUM) Monte Carlo Simulasyonu Doğrulama Ölçüm belirsizliği ve ölçüm hatası, güvenilir ölçüm sonuçları için en önemli parametrelerdir. Özellikle doğrusal olmayan karakteristiklere sahip yeni ölçüm sistemlerinin geleneksel sistemlerle karşılaştırılması için ölçüm belirsizliği önemli hale gelmektedir. Bu çalışmada, doğrusal olmayan karakteristiklere sahip yeni bir hava hızı ve akış ölçüm sisteminin ölçüm belirsizliği hem *Guide to the Expression of the Uncertainty in Measurement* (GUM) hem de Monte Carlo simülasyonu ile hesaplanmıştır. GUM sonuçları Monte Carlo simülasyon sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Standart belirsizlik yaklaşık 1 m/s hız seviyesi ile 20 m/s hız seviyesi arasındaki altı hız seviyesi için hesaplanmıştır. Monte Carlo simülasyonundan elde edilen d_low , d_high değerlerinin δ değerinin 10,805 m/s hız seviyesinde 100 katından fazla diğer hız seviyelerinde ise 10 katı seviyelerinde olduğu görüldüğünden sonuçlar, GUM'a göre iki anlamlı basamak için GUM yöntemlerini doğrulamanın imkânsız olduğunu göstermiştir. Çalışma ayrıca, doğrusal olmayan özelliklere sahip bu tür ölçüm sistemlerinde, daha güvenilir ve tutarlı sonuçları için GUM yöntemini geçerli kılmak amacıyla Monte Carlo simülasyonunun göz önünde bulundurulması gerektiğini göstermiştir.

Comparison of GUM and Monte Carlo Methods in Uncertainty Analysis of Airflow Measurement Systems

Article Info

Abstract

Research article Received: 12/02/2025 Revision: 25/03/2025 Accepted: 26/03/2025

Keywords

Measurement Uncertainty Nonlinear Measurement Systems Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM) Monte Carlo Simulation Validation Measurement uncertainty and measurement error are among the most critical parameters for obtaining reliable measurement results. Measurement uncertainty becomes particularly significant when comparing novel measurement systems exhibiting nonlinear characteristics with traditional systems. In this study, the measurement uncertainty of a newly developed air velocity and flow measurement system with nonlinear characteristics was evaluated using both the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM) method and Monte Carlo simulation. The results obtained from the GUM approach were compared with those derived from the Monte Carlo simulation. Standard uncertainties were calculated for six velocity levels ranging from approximately 1 m/s to 20 m/s. It was observed that the interval bounds dlow and dhigh obtained from the Monte Carlo simulations exceeded the corresponding GUM uncertainty value (δ) by more than 100 times at the velocity level of 10.805 m/s, and by about 10 times at other velocity levels. These findings demonstrate that, based on GUM methodology, it is not feasible to validate the results even to two significant digits. The study further highlights that, for measurement systems with nonlinear characteristics, Monte Carlo simulation should be considered essential in order to ensure more reliable and consistent results, and to validate the applicability of the GUM method.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Ölçüm belirsizliği, ölçüm sonuçlarının doğruluğunu ifade etmek ve güvenilirliğini değerlendirmek açısından önemli bir parametredir. Yeni geliştirilen algılayıcıların diğer algılayıcılarla karşılaştırılabilir olup olmadığını belirlemek, bu algılayıcıların hata veya sapma değerlerinin yanı sıra, kullanılan ölçüm sisteminin sonuçları hangi belirsizlikle ürettiğini tespit etmeyi gerektirir. Ölçüm belirsizliğini hesaplanmasında farklı yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemler arasında, ISO/BIPM/OIML/IUPAC

gibi uluslararası kuruluşlar tarafından hazırlanan JCGM 100 "Guide to the Expression of the Uncertainty in Measurement" (GUM) rehberi, kavramsal ve metodolojik açıdan sistematik bir şekilde geliştirilmiş önemli bir doküman olarak öne çıkmaktadır [1]. Bu rehbere, JCGM 100:2008 numarasıyla ya da ISO/IEC Guide 98-3:2008 numarasıyla ulaşılabilmektedir [2]. 2010 yılında küçük bir revizyon geçiren bu doküman, halen ücretsiz erişime açık olup geçerliliğini korumaktadır. GUM rehberi, ölçüm belirsizliğinin sistematik bir sekilde değerlendirilmesi noktasında önemli bir rol oynamış olsa da, doğrusal olmayan ölcümlerde bazı eksiklikler icermektedir.

GUM yaklaşımı, belirsizliklerin yayılım kuralına dayalı olarak hesaplama yapılmasını gerektirir, ancak bu hesaplama belirli kabullere dayanır ve bu kabuller her durumda geçerli olmayabilir. Modelin doğrusal olmayan bir iliskiyi ifade etmesi durumunda, Taylor serisi genişlemesinin yalnızca dereceden terimlerle kesilmesi, birinci hata yayılmasını düzeltememektedir. Genisletilmis belirsizlik hesaplamaları için normalite varsayımının düzeltilmesi mümkün olmayabilir. Welch-Satterthwaite formülüyle etkin serbestlik derecelerinin hesaplanması ise hâlâ cözülmemis bir problemdir. Ayrıca, girdilerin biri veya daha fazlası diğerlerinden çok daha büyük olduğunda veya girdilerin dağılımları simetrik olmadığında GUM yaklaşımı geçerli olmayabilir [3].

Bu kısıtlamaları aşmak için yeni yöntemler gelistirilmis olup, bunların başında JCGM 101:2008 belirtilen dokümanında ve Monte Carlo benzetimine dayanan yöntem gelmektedir [4]. Yukarıda belirtilen kısıtlamaların mevcut olduğu durumlarda, Monte Carlo benzetimi kullanılarak ve JCGM 101:2008 dokümanında tanımlanan vöntemle vapılan hesaplamalar, daha doğru sonuçlar elde edilmesini sağlamaktadır.

Monte Carlo metodu, dört farklı senaryo çerçevesinde tanımlanmış olup, özellikle GUM'un çözmekte zorlandığı durumlar için tercih edilmesi önerilmiştir [3]. EURACHEM Rehberlerinde yer alan iki örnek ve kütle kalibrasyonundaki doğrusal olmayan karakterdeki ölçümler için Monte Carlo simülasyonu uygulanmıştır [5]. Ayrıca, yakıt hücrelerinin verimliliklerine dair ölçüm belirsizliği yöntemiyle hesaplamaları da Monte Carlo gerçekleştirilmiştir [6]. Başka bir çalışmada, bir platin direnç termometresinin kalibrasyonundaki ölçüm belirsizliği değerlendirilmiş ve GUM ve Monte Carlo benzetiminin sınırlamalarını asmak için bir genetik algoritma önerilmiştir [7]. Koordinat ölçümü belirsizliğinin değerlendirilmesi

için Monte Carlo yöntemi uygulanmış ve tasarlanmıştır [8].

Her iki metodun karşılaştırılması birçok çalışmada ele alınmıştır. Bu karşılaştırmalar sonucunda, Monte Carlo yönteminin, özellikle doğrusal olmayan modellerde daha üstün sonuclar sunduğu tespit edilmiştir [5]. Su içinde kadmiyum ölçümü için grafit fırınlı atomik absorpsiyon spektrometrisi kullanılarak ölçüm belirsizliğini değerlendirmek için iki yöntem karşılaştırılmış ve bu iki yöntem arasındaki temel farkın kalibrasyon denkleminden kaynaklandığı bulunmuştur. [9]. Diğer bir elektromanyetik uyumluluk calısmada ise, testlerinde metotların anlamlı sevivede farklılaşmadığı ortaya konulmuştur [10]. Bir diğer araştırmada, yeni geliştirilen terleme ölçüm sisteminin ölçüm belirsizliği değerlendirilmiş ve aralarındaki farkların 2 ondalık basamağa metotlar arasında önemsiz olduğu belirlenmistir [11]. Baska bir calısmada Brewer MKIII spektroradyometresi ile Spektral ultraviyole (UV) ışınımı ölçümlerinin belirsizlik değerlendirmesi UV tarama verilerine göre GUM, UT ve Monte Carlo Simülasyonu ile elde edilen birleşik standart belirsizlikler arasındaki spektral oranların değerlendirilmesi, üç metodoloji uyumun tatmin edici arasındaki olduğunu göstermiştir. [12] Bir tank proverinin hacminin gravimetrik yöntem kullanılarak vapılan kalibrasyonunun doğrusal olmayan matematiksel bir modeli geliştirilmiştir. Ölçüm belirsizliği GUM Monte Carlo simülasyonu kullanılarak ve değerlendirilmistir. Genel olarak, GUM vönteminin belirsizliğin baskın kaynağının dikdörtgen dağılımlı olması, belirsizlik bütcesinde büvük bir belirsizlik bileşeninin bulunması ve ölçülen modelin doğrusal olmaması ve ölçülen olasılık dağılımının normal olmaması sebeplerinden bir veya daha fazla koşul nedeniyle Monte Carlo simülasyonu tarafından doğrulanamadığı tespit edilmiştir. [13] Rüzgâr hızı ölçümünün belirsizlik değerlendirmesine üç yaygın olarak kullanılan belirsizlik değerlendirme yöntemini (geleneksel GUM yöntemi, korelasyonlu GUM yöntemi ve MCM yöntemi) uygulamış ve farklı yöntemlerin performansını analiz edilmiştir. Monte Carlo simülasyonu yönteminin, doğruluk ve kullanılabilirlik açısından yüksek gereksinimler olduğunda öncelikli olarak tercih edilmesi gerektiği belirtilmiştir. [14] Tartma yöntemi kullanarak kantitatif proverin kalibrasyonunun ölcüm belirsizliği değerlendirmesi, GUM ve Monte Carlo vöntemleri kullanılarak geliştirilmiştir. Calışmada, kompakt GUM vaklasımının, prover kalibrasyonunun belirsizliğinin ölçüm hesaplanmasında yöntemiyle Monte Carlo doğrulandığını göstermektedir. [15]

Özetle, doğrusal olmayan model fonksiyonlarına sahip ölçüm sistemleri için GUM yöntemi ile Monte Carlo yöntemini karşılaştırmanın nedeni, belirsizlik vavılımını ele alma konusundaki farklı yaklaşımlarında yatmaktadır. GUM yöntemi doğrusal yaklaşımlara dayanır, bu da güçlü doğrusal olmayan durumlarla uğraşırken hatalara yol açabilir ve karmasık sistemler için daha az doğru olmasını sağlar. Buna karşılık, Monte Carlo yöntemi doğrusallaştırmaya ihtiyaç duymadan doğrusal olmayan sistemleri doğrudan simüle edebilir ve sistemin tüm karmaşıklığını hesaba katarak daha kesin belirsizlik tahminleri sunar. GUM yöntemi hesaplama açısından daha basittir ve hafif doğrusal olmayan sistemler için iyi sonuç verirken, Monte Carlo yöntemi yüksek doğrusal olmayan sistemler için daha doğru ve ayrıntılı bir belirsizlik analizi sağlar ancak hesaplama çabasının artırır. Bu yöntemlerin karşılaştırılması, doğrusal olmama derecesine, belirsizlik karmaşıklığına ve mevcut hesaplama kaynaklarına dayalı olarak en uygun yaklaşımın belirlenmesine yardımcı olur.

Bu çalışmada, diğer çalışmalardan da görüleceği üzere önemli farklılıklara sahip olması ihtimali bulunması nedeniyle GUM ve Monte Carlo simülasyon sonuçları, akredite bir rüzgâr tünelinden elde edilen ölçüm değerleriyle doğrulanan bir hava hızı ve akış ölçüm sistemi için karşılaştırılmıştır. Her bir faktör için belirsizlik kaynakları her iki yöntemle de tahmin edilmiştir. Monte Carlo metodu ve GUM sonuçları karşılaştırılmış ve GUM sonuçlarının Monte Carlo metodu ile geçerli kılma çalışması yapılmıştır. Bu çalışma, doğrusal olmayan sistemler için GUM ve Monte Carlo simülasyon vöntemlerinin sonuclarının karsılastırılabilirliğini ortaya koymus ve arastırmacılara yol göstermiştir. Bu calısmada belirsizlik modellerinin tekrarlanabilirlik parametreleri rüzgâr tüneli ölçümlerinden elde edilmiştir.

2. MATERYAL VE METOD (MATERIALS AND METHODS)

2.1. Deneysel Ekipman (Experimental Equipment)

Hava hızı ve akış ölçüm sistemi yük hücresi, veri kartı dengeleyici toplama ve blok ve konumlandırma çubuğu gibi yardımcı ekipmanlardan oluşmuştur. Veri toplama için Arduino UNO R3 modülü kullanılmıştır. Bu çalışmada ölçüm belirsizliği hesaplamasında rüzgâr tüneli data logger verileri dikkate alınmıştır. Algılayıcı ve ölçüm bölgesine genel bakış Şekil 1'de gösterilmiştir. Şekil 1'de gösterildiği gibi, yük hücresi dairesel diske monte edilmiştir. Yük hücresi dairesel diske uygulanan kuvveti ölçmektedir.



Şekil 1. Algılayıcının boyutları ve şematik görünümü (Dimensions and schematic view of the sensor)

2.2. Ölçüm Belirsizliği Modelleri (Measurement Uncertainty Models)

Algılayıcı için kritik husus, dairesel disklerin belirli Reynolds sayısı aralığı için sürükleme katsayısının sabit olmasıdır. Model fonksiyon Eş. 1'de ifade edilmiştir.

$$V = 1,022 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot F}{\rho \cdot C_D \cdot A}} - 0,0946 \ \left(\frac{m}{s}\right) \tag{1}$$

Bu ölçüm sistemi için yukarıda belirtildiği gibi temel varsayım sürükleme katsayısının (CD) sabitliğidir. Algılayıcının tasarlanan çalışma aralığı için dairesel diskin sürükleme katsayısının sabitliği hesaplamalı yöntemler ile doğrulanmış ve literatürle uyumlu olan 1.2 olarak elde edilmiştir [12]. Diske etki eden dik kuvvet yük hücresi ile ölçülmüştür. Havanın yoğunluğu (ρ) Eş. 2'ye göre ölçülebilir, ancak rüzgâr tüneli tesisinde çevresel durum izleme cihazının verileri kullanılmıştır. En doğru hava yoğunluğu denklemi CIPM (1981/91) denklemidir [17,18]. Ancak bu çalışma için çok ayrıntılıdır, Eş. 2'de verilen yaklaşık formülü kullanmak daha uygundur. [19].

$$\rho_a = \frac{0,34848 \cdot p - 0,009 \cdot (hr) \cdot \exp(0,061 \cdot t)}{273,15 + t} \tag{2}$$

 ρ_a = hava yoğunlupu, *p*: basınç (mbar / hPa), *hr*: Bağıl nem, *t*: sıcaklık (°C.)

Diğer tüm hesaplamalarda hassasiyeti kaybetmemek için tam değerler yuvarlama yapılmadan kullanılmıştır. Matematiksel işlemlerde anlamlı sayılar kuralı uygulanmıştır.

2.3. GUM Ölçüm Belirsizliği (GUM Measurement Uncertainty)

GUM yöntemi temel olarak belirsizlik bileşenlerini, değerlendirme yöntemlerine göre A ve B tipi olmak üzere iki kategoride sınıflandırır. A tipi belirsizlik, ölçülen büyüklüğün değerinin istatistiksel analizi ile elde edilir ve ayrıca gözlenen bir frekans dağılımından türetilen bir olasılık yoğunluk fonksiyonundan elde edilir. B tipi belirsizlik, A tipi belirsizlik dışındaki diğer bilgilerle değerlendirilir ve varsayılan bir olasılık yoğunluk fonksiyonundan elde edilir. Birleşik belirsizliği Eş. 3'e göre hesaplanır.

$$u_c^2(V) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i)$$
(3)

 $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ hassasiyet katsayısı (c_i) ve $u_c^{[i]}(V)$ ise birleşik ölçüm belirsizliğidir.

Sistemin model fonksiyonu olan Eş. 1'e Eş. 3'ü tam olarak uygulayabilmek ve tüm ölçüm belirsizliği bileşenlerini detaylı bir şekilde gözlemleyebilmek amacıyla, bu çalışmada kullanılan sistemin balık kılçığı diyagramı Şekil 2'de sunulmuştur.

Yukarıda belirtildiği gibi, bu algılayıcı için temel husus CD'nin sabitliğidir, dairesel disklerin sürükleme katsayısının girdap akımları başladığında ve Reynolds sayısı 1 000'den yüksek olduğunda, Reynolds sayısından bağımsız olduğu ve sabit olduğu gözlemlenmiştir, bu da CD'nin değişmediği ve CD'yi bir belirsizlik bileşeni olarak dikkate almaya gerek olmadığı anlamına gelir [16].

Bu çalışmada, hız seviyelerine karşılık gelen tüm Reynolds Sayıları 1 000'den yüksek olduğu için CD bir belirsizlik kaynağı olarak dahil edilmemiştir (Min Re=11 813 > 1 000). Tekrarlanabilirlik testleri Türk Akreditasyon Kurumu tarafından akredite edilen Devlet Meteoroloji İşleri Genel Müdürlüğü Rüzgar Tüneli Kalibrasyon Laboratuvarında gerçekleştirilmiştir. Tüm testler 23 ± 10 C°, 920 hPa ± 5 hPa ve %50 ± 30 bağıl nem aralığında gerçekleştirilmiştir. Hava yoğunluğunun 900 hPa < p < 1100 hPa, 10 °C < t < 30 °C ve RH < %80 aralığındaki belirsizliği bağıldır ve 2·10⁻⁴·p'dir [19]. Hava yoğunluğu ölçüm belirsizliği bileşeni buna göre hesaplanmıştır.

$$u_{c}^{2}(V) = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^{2} \cdot u^{2}(\rho) + \left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)^{2} \cdot u^{2}(F) + \left(\frac{\partial V}{\partial A}\right)^{2} \cdot u^{2}(A)$$
(4)

2.3.1 Hava yoğunluğu belirsizlik bileşeni (Uncertainty contribution from air density)

Çalışmanın yapıldığı laboratuvarın çevre şartlarında hava yoğunluğunun belirsizliği bağıldır ve $2 \cdot 10^{-4} \cdot \rho' dir$ [19]. Bu çalışma çerçevesinde gerçekleştirilen ölçümlerde, çevresel koşulların bu içinde kalması sebebiyle aralıkların hava yoğunluğunun belirsizliği, bağıl olarak 2 $\cdot 10^{-4} \cdot \rho$ seklinde kabul edilmiştir.

Hava yoğunluğunun belirsizlik bileşenine ait hassasiyet katsayısı, Eş. 5 ile hesaplanmıştır.

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -0.511 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot F}{\rho^3 \cdot C_D \cdot A}} \tag{5}$$

Soysal, Şahin / GU J Sci, Part C, 13(2): 553-566 (2025)



Şekil 2. Hava hızının hesaplanmasında balık kılçığı diyagramı (Fishbone Diagram in the Calculation of Air Velocity)

2.3.2 Kuvvet belirsizlik bileşeni (Uncertainty contribution from force)

Ölçüm sisteminde kuvvet yük hücresi ile ölçülmekte ve model fonksiyona göre hız değeri hesaplanmaktadır. Kuvvet ölçümünden gelen ölçüm belirsizliği bileşeni sistemin ölçüm belirsizliği bütçesinde önemli bir girdidir. Yük hücresinin belirsizlik bileşenleri, kalibrasyon sertifikasından (s), tekrarlanabilirlikten (r) ve çözünürlükten (ç) oluşmaktadır. Bileşenler doğrusal ilişkili oldukları için hassasiyet katsayılarının 1 olduğu dikkate alındığında, bu üç bileşen için Eş. 6 elde edilmiştir.

$$u^{2}(F) = u^{2}(r) + u^{2}(\varsigma) + u^{2}(s)$$
(6)

Tekrarlanabilirlik ölçüm belirsizliği

Tekrarlanabilirlikten kaynaklanan belirsizlik katkısının hesaplanabilmesi için, belirlenen her hızda yük hücresiyle 59 kuvvet ölçümü yapılmıştır. Bu ölçümlerden kaynaklanan belirsizlik değeri, Eş. 7 ile hesaplanmıştır [1]. Tekrarlanabilirlik kaynaklı belirsizlik katkısının karesi, ortalamanın varyansı ile hesaplanmaktadır. Tekrarlanabilirlik kaynaklı belirsizlik bileşeni normal dağılım olarak kabul edilmiştir. Serbestlik derecesi ise 58 olarak belirlenmiştir.

$$u^{2}(r) = s^{2}(\bar{F}) = s^{2}(F_{k})/59$$
(7)

 \overline{F} : 59 okumanın ortalama değeri

Kalibrasyon sertifikası ölçüm belirsizliği

Kullanılan yük hücresi 1. Sınıf Zemic L6D-C3-0.4B marka ve modeldedir. Kalibrasyon sertifikasında ölçüm belirsizliği değeri tam çalışma aralığında %0,16 olarak belirtilmiştir. Belirsizlik değeri Eş. 8 ile hesaplanmıştır. Belirsizliğin normal dağılımda ve serbestlik derecesinin ise sonsuz olduğu belirlenmiştir.

$$u(c) = \bar{F} \cdot 0,0016 \tag{8}$$

Çözünürlük ölçüm belirsizliği

Kuvvet ölçümü, iki ondalık basamağa kadar yapılmıştır. Bu durumda kuvvet ölçümündeki çözünürlük kaynaklı belirsizlik Eş. 9 ile hesaplanır. Çözünürlük kaynaklı belirsizlik dikdörtgen dağılımlıdır ve serbestlik derecesi ise sonsuzdur.

$$u(re) = 0,005/\sqrt{3} \tag{9}$$

Kuvvet ölçümü kaynaklı ölçüm belirsizliği katkısının hassasiyet katsayısı Eş.10 ile hesaplanır.

$$\frac{\partial V}{\partial F} = 0,511 \cdot \sqrt{\frac{2}{F \cdot \rho \cdot C_D \cdot A}} \tag{10}$$

2.3.3 Alan belirsizlik bileşeni (Uncertainty Contribution from Area Measurement)

Model fonksiyondaki alan, sadece çap ölçümünden kaynaklanan belirsizliğe sahiptir ve bu ölçüm için de tekrarlanabilirlikten (r), çözünürlükten (ç) ve kalibrasyon sertifikasından (s) gelen belirsizlik katkıları bulunmaktadır. Alandan kaynaklanan belirsizlik, D diskin çap değerini ifade etmek üzere Eş. 11 ile hesaplanmaktadır.

$$u_c^2(A) = \left(\frac{\partial A}{\partial D}\right)^2 \cdot u^2(D) \tag{11}$$

Hassasiyet katsayısı Eş. 12 ile;

$$\frac{\partial A}{\partial D} = \frac{\pi \cdot D}{2} \tag{12}$$

Ölçüm belirsizliği değeri Eş. 13 ile hesaplanır;

 $u^{2}(D) = u^{2}(r) + u^{2}(\varsigma) + u^{2}(s)$ (13)

Tekrarlanabilirlik ölçüm belirsizliği

Çapın değeri, 15 derece merkezi açı aralıklarıyla ölçülmüş ve ortalaması hesaplamaya dahil edilmiştir. Ölçümlerden gelen belirsizlik katkısı Eş. 14 ile hesaplanmıştır [1]. Tekrarlanabilirlik kaynaklı belirsizlik katkısının karesi, ortalamanın varyansı ile hesaplanmaktadır. Tekrarlanabilirlik kaynaklı belirsizlik bileşeni, normal dağılımdadır ve serbestlik derecesi 11 olarak belirlenmiştir.

$$u^{2}(r) = s^{2}(\overline{D}) = s^{2}(D_{k})/12$$
(14)

Kalibrasyon sertifikası ölçüm belirsizliği

Ölçümlerde kullanılan SHOWA marka kumpasın kalibrasyon sertifikasında çalışma aralığının tamamı için belirsiz değeri mutlak 0.03 mm olarak belirtilmiştir. Sertifikadan gelen belirsizliğin dağılımı normal dağılımdır ve serbestlik derecesi sonsuzdur.

u(s) = 0,03 mm

Çözünürlük ölçüm belirsizliği

Kumpasla yapılan çap ölçümleri 2 ondalık basamaklı olarak elde edilmiştir. Buna göre çözünürlük kaynaklı belirsizlik değeri Eş.15 ile hesaplanır. Çözünürlük kaynaklı belirsizlik dikdörtgen dağılıma sahiptir ve serbestlik derecesi sonsuzdur.

$$u(re) = 0,000005/\sqrt{3} \tag{15}$$

Alan kaynaklı belirsizlik bileşeninin hassasiyet katsayısı Eş.16 ile hesaplanmıştır.

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -0,511 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot F}{\rho \cdot C_D \cdot A^3}} \tag{16}$$

Hava hızının ölçüm belirsizliği yukarıdaki denklem göre değerlendirmelere ve hesaplanmıştır. Hesaplamalar 0,915 m/s, 3,124 m/s, 5,359 m/s, 10,805 m/s, 16,174 m/s ve 20,964 m/s olmak üzere 6 hız seviyesi için yapılmıştır. Tablo 1'de 0,915 m/s için detaylı hesaplamalar, Tablo 2'de ise tüm hız değerleri için birleştirilmiş standart belirsizlik değerleri verilmiştir. Belirsizlik bileşenlerinin farklı serbestlik derecelerine sahip olması nedeniyle, etkin serbestlik derecesi Welch-Satterthwaite denklemi göre Es. 17 ile hesaplanmıştır [3]. Monte Carlo simülasyon sonuçları, sonuçların dağılımının normal dağılıma uyduğunu göstermektedir.

Hesaplamalara tam değerler üzerinden devam edilmekle birlikte tablolardaki değerler üçüncü ondalık haneye yuvarlanarak verilmiştir.

$$\vartheta_{eff} = \frac{u_V^4}{\sum_{1}^{N} \frac{u_{x_i}^4}{\vartheta_{x_i}}}$$
(17)

Components, and Contributions of the Combined Measurement Uncertainty at a velocity of 0.915 m/s)							
Belirsizlik Bileşeni	Hassasiyet	Standart Belirsizlik	Belirsizlik Katkısı	Dağılım			
	Katsayısı	$(u(x_i))$	$(u_i(V) = c_i u(x_i))$				
	$(c_i = \partial V / \partial x_i)$						
Kuvvet (N)	25,232	0,003	0,073	Normal			
Hava Yoğunluğu	0,463	0,0002	0,0001	Dikdörtgen			
(kg/m^3)							
Alan (m ²)	16,095	0,004	0,067	Normal			
$u_c(V)$ Birleşik Ölçüm Bo	elirsizliği (m/s)		0,099	Normal			

 Tablo 1. 0,915 m/s hız değerinde birleşik ölçüm belirsizliği kaynakları, bileşenleri ve katkıları (Sources, Components, and Contributions of the Combined Measurement Uncertainty at a Velocity of 0.915 m/s)

Tablo 2. Tüm hız değerleri için birleşik standart belirsizlik değerleri (Combined Standard Uncertainty Values for
All Velocity Levels)

Hava Hızı (m/s)	$u_c(V)$ Birleşik Ölçüm Belirsizliği (m/s)	Bağıl Belirsizlik %
0,915	0,099	10,88
3,124	0,215	6,89
5,359	0,362	6,77
10,805	0,724	6,7
16,174	1,079	6,68
20,964	1,398	6,67

2.4. Monte Carlo Metoduna Göre Ölçüm

Belirsizliği (Measurement Uncertainty Based on the Monte Carlo Method)

Monte Carlo yöntemi ile ölçüm belirsizliği hesaplaması üç ana aşamada gerçekleştirilir [4].

- İlk olarak, formülasyon oluşturulur. Bu aşamada, çıktı değeri hesaplanır (V), girdi değerleri belirlenir (Xi), model fonksiyon oluşturulur (V(F,A,p)) ve belirsizlik dağılımları tanımlanır (Normal, dikdörtgen vs.).
- İkinci aşamada, model fonksiyon kullanılarak hız değeri girdiler üzerinden hesaplanır.
- Son olarak, sonuçlar değerlendirilir. Bu aşamada, hız (V) değerlerinin standart sapması ve standart ölçüm belirsizliği belirlenir ve belirli bir olasılıkla hız (V) değerini içeren kapsama aralığı hesaplanır.

Formülasyonun oluşturulması adımındaki girdiler için GUM metodunda elde edilen veriler kullanılmıştır.

Monte Carlo metodunda ilave olarak kaç denemenin gerekli olduğunu belirleyen M faktörünün hesaplanması gerekmektedir. *M*, kapsam aralığına göre Eş. 18'den hesaplanır [4].

$$M = \frac{1}{1-p} \cdot 10^4$$
 (18)

Kapsam aralığının p % 95 olması durumunda M değeri 200 000 olarak hesaplanır. Bu nedenle deneme sayısı 200.000 denemeden az olmamalıdır. 0,915 m/s hava hızı için belirsizliğin bileşenleri Tablo 3'te verilmiştir. İlk 10 deneme sonuçları 0,915 m/s tahmini hava hızı için Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 3. Monte Carlo metodunda 0.915 m/s için girdiler ve dağılımları (Input Quantities and Their Probability Distributions at 0.915 m/s in the Monte Carlo Method)

Belirsizlik	Beklenen	Standard	Dağılım
Bileşenleri	Değer	Belirsizlik	
		Değeri	
	(X_i)	$(u(x_i))$	
Kuvvet (N)	0,02	0,003	Normal
Yoğunluk	1,09	0,0002	Dikdörtgen
(kg/m^3)			
Çap (m)	0,199	0,013	Normal

Kuvvet(F), yoğunluk(ρ) ve çap(D) hesaplamaları için Excel formülleri Eş. 19, Eş. 20 ve Eş. 21'de verilmiştir. Hesaplamalar Microsoft Excel programı ile gerçekleştirilmiştir.

(19)

F=NORMINV(RAND(), Beklenen Değer (X_i), Standart Belirsizlik (u(x_i)))

$D=NORMINV(RAND(), Beklenen Değer (X_i), Standart Belirsizlik (u(x_i)))$ (20)

$$\rho = (Beklenen Değer (X_i) - Standart Belirsizlik (u(x_i)) + u(x_i)*RAND())$$
(21)

Benzetimde 200 000 deneme neticesinde standart sapma 0,101 m/s olarak elde edilmiştir. Diğer taraftan GUM metodu ile elde edilen ölçüm belirsizliği değerinin 0,099 m/s olduğu hesaba katıldığında iki metodun sonuçlarının 2 ondalık haneye yuvarlanması durumda aynı sonuç elde edilmektedir. Monte Carlo metoduna göre hesaplama yapılan hız değerleri için dağılımlar Şekil 3, Şekil 4, Şekil 5, Şekil 6, Şekil 7 ve Şekil 8'de verilmiştir. Hız dağılım profiline bakıldığında, Welch-Satterthwaite yaklaşımıyla elde edilen serbestlik derecesi sonucunda yapılan normal dağılım varsayımının doğruluğu onaylanmıştır.

Tablo 4. 0,915 m/s hız değeri içi Monte Carlo metoduna göre ilk 10 denemenin sonuçları (Monte Carlo
Output Values from the First 10 Trials at a Velocity of 0.915 m/s)

Denemeler	Kuvvet (N)	Yoğunluk (kg/m ³)	Çap (m)	Alan (m ²)	Hız (m/s)
1	0,020	1,090	0,205	0,033	0,898
2	0,021	1,089	0,206	0,033	0,915
3	0,017	1,089	0,192	0,029	0,883
4	0,014	1,089	0,207	0,034	0,730
5	0,020	1,089	0,184	0,027	1,014
6	0,023	1,090	0,206	0,033	0,955
7	0,019	1,089	0,189	0,028	0,968
8	0,020	1,089	0,183	0,026	1,008
9	0,020	1,089	0,194	0,029	0,956
10	0,025	1,090	0,197	0,031	1,064



Şekil 3. 0,915 m/s için Monte Carlo metodu hız dağılım grafiği (Probability Distribution of Velocity at 0.915 m/s Based on Monte Carlo Analysis)



Şekil 4. 3,124 m/s için Monte Carlo metodu hız dağılım grafiği (Probability Distribution of Velocity at 3.124 m/s Based on Monte Carlo Analysis)



Şekil 5. 5,359 m/s için Monte Carlo metodu hız dağılım grafiği (Probability Distribution of Velocity at 5,359 m/s Based on Monte Carlo Analysis)



Şekil 6. 10,805 için Monte Carlo metodu hız dağılım grafiği (Probability Distribution of Velocity at 10.805 m/s Based on Monte Carlo Analysis)



Şekil 7. 16,174 m/s için Monte Carlo metodu hız dağılım grafiği (Probability Distribution of Velocity at 16.174 m/s Based on Monte Carlo Analysis)



Şekil 8. 20,964 m/s için Monte Carlo metodu hız dağılım grafiği (Probability Distribution of Velocity at 20.964 m/s Based on Monte Carlo Analysis)

Tablo 5'te, GUM ve Monte Carlo yöntemleri için tüm hız kademelerindeki ölçüm belirsizliği değerleri, ortalama hız ve t95(veff) değerleri dört ondalık basamağa yuvarlanarak verilmiştir. Farklı hesaplama prosedürlerini vurgulamak için GUM yöntemiyle elde edilen hız beklenen hız, Monte Carlo yöntemiyle elde edilen hız ise ortalama hız olarak ifade edilmiştir.

Tablo 5. GUM ve Monte Carlo benzetimi sonuçları (Evaluation of Measurement Uncertainty Using GUM and Mor
Carlo Simulation)

GUM			Monte Carlo		
Beklenen Hız	Standart	+ ()	Ortalama Hız	Standart Belirsizlik	
(m/s)	Belirsizlik (m/s)	l95(Veff)	(m/s)	(m/s)	
0,915	0,099	1,96	0,916	0,101	
3,124	0,215	1,96	3,138	0,219	
5,359	0,362	1,96	5,384	0,369	
10,805	0,724	1,96	10,003	0,739	
16,174	1,079	1,96	16,246	1,099	
20,964	1,398	1,96	21,063	1,424	

2.5. Monte Carlo Metodu ile GUM Metodunun Geçerli Kılınması (Validation of the GUM Method

through Monte Carlo Simulation)

GUM belirsizlik yaklaşımı birçok durumda işe yarayabilir. Ancak, yukarıda belirtildiği gibi, özellikle doğrusal olmayan özelliklere sahip birçok uygulama için ortak olan bazı sınırlamalar vardır. Bu uygulamalar için GUM yöntemi test edilmelidir. Test etmenin bir yolu Monte Carlo benzetimi ve GUM sonuçlarını karşılaştırmaktır. GUM sonuçlarının Monte Carlo benzetim sonuçları ile doğrulanması, benzer durumlar için GUM yönteminin kullanılmasını mümkün kılabilir. Doğrulama prosedürü aşağıdaki gibidir:

- 1- Sayısal tolerans değeri δ Eş. 22'den hesaplanır.
- 2- d_{low} ve d_{high} değerleri Eş.23 ve Eş.4.24'e göre elde edilir.
- 3- δ ile d_{low} ve d_{high} değerleri kıyaslanır. δ değerinin d_{low} ve d_{high} değerlerinden büyük olması durumunda GUM belirsizliği geçerli kılınmış olur.

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot 10^l \tag{22}$$

Eş. 22'deki l değeri, GUM metoduna göre hesaplanan standart belirsizlik değerinin c $\cdot 10^l$ şeklinde ifade edilmesinden elde edilir. [4]. c değeri ise talep edilen anlamlı rakam sayısına göre ortaya çıkar. GUM metodu, Eş. 23 ve Eş.24'ün ile δ değerinin karşılaştırılması sonucu geçerlilik açısından test edilir [4]. δ değerinin d_{low} ve d_{high} değerlerden büyük olması durumunda GUM belirsizliği geçerli kabul edilir.

$$d_{low} = \left| y - U_p - y_{low} \right| \tag{23}$$

$$d_{high} = \left| y + U_p - y_{high} \right| \tag{24}$$

 y_{low} ve y_{high} değerleri p % 95 için sırasıyla $M \cdot (1-p)/2$ ve $M \cdot (1+p)/2$ formüllerinden elde edilen 5000 ve 195 000 sıralarındaki verilerden elde edilir [4]. U_p , GUM metodu kullanılarak hesaplanan genişletilmiş ölçüm belirsizliği değeri, y ise beklenen ölçüm sonucudur.

Tüm hız değerleri GUM metodunun geçerli kılınması yapılmıştır. 0,915 m/s için GUM metodu geçerlilik testi detayları ile verilmiştir. Buna göre Up=0,194 m/s olarak elde edilmiştir. Standard belirsizlik 0,099 m/s olup 2 anlamlı rakam için 99·10-3 m/s olarak yazılır ve buna göre δ değeri 5·10-4 m/s olarak elde edilir.

$$d_{low} = |0,915 - 0,194 - 0,727| = 6 \cdot 10^{-3} \text{m/s}$$

s > 5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} (25)

$$d_{high} = |0,915 + 0,194 - 1,122| = 1,3 \cdot \frac{10^{-2} \text{m}}{\text{s}} > 5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
(26)

3. BULGULAR (RESULTS)

Bu çalışmada, doğrusal olmayan karakteristiğe sahip akış ölçüm sisteminin ölçüm belirsizliği GUM ve Monte Carlo yöntemlerine göre hesaplanmıştır. Nihai aşamada bu karakteristiğe sahip ölçüm sistemlerinde veya doğrusal olmayan model fonksiyona sistemlerin ölcüm sahip belirsizliklerinin hesaplanmasında geleneksek metoduna güvenilirlik Monte GUM Carlo Benzetimi modeli ile test edilmiştir. Sonuçların gösterdiği üzere, GUM yöntemi Monte Carlo ile doğrulanamamıştır. Tahmin edilen tüm hava hızı seviyeleri için hesaplanan parametreler Tablo 6'da verilmistir.

Tablo 6. GUM metodunun Monte Carlo metoduna göre geçerli kılma sonuçları (m/s) (Validation Results of the GUM Method Against the Monte Carlo Method at Various Velocity Levels (m/s))

Beklenen Hava Hızı (m/s)	Up	Y low	Yhigh	d_{low}	d_{high}	δ	Sonuç
0,915	0,194	0,728	1,123	6 · 10 ⁻³	1,3.10-2	5.10-4	Geçersiz
3,124	0,421	2,752	3,608	$4,9 \cdot 10^{-2}$	6,2·10 ⁻²	5·10 ⁻³	Geçersiz
5,359	0,710	4,730	6,179	8,2.10-2	0,11	5·10 ⁻³	Geçersiz
10,805	1,418	8,698	11,589	0,69	0,63	5·10 ⁻³	Geçersiz
16,174	2,117	14,300	18,606	0,24	0,32	5·10 ⁻²	Geçersiz
20,964	2,739	18,548	24,109	0,32	0,41	5·10 ⁻²	Geçersiz

4. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada, doğrusal olmayan karakteristiğe sahip akış ölçüm sisteminin ölçüm belirsizliği GUM ve Monte Carlo yöntemlerine göre hesaplanmıştır. Tüm hava hızı değerleri için Monte Carlo benzetim yöntemi ile hesaplanan ölçüm belirsizliği GUM yöntemi ile hesaplanan ölçüm belirsizliğinden daha yüksektir. Monte Carlo simülasyonundan elde edilen d_{low}, d_{high} değerlerinin δ değerinin 10,805 m/s hız seviyesinde 100 katından fazla diğer hız seviyelerinde ise 10 katı seviyelerinde olduğu görülmüştür. Bu sonuçlara göre GUM yöntemi sonuçları Monte Carlo benzetim sonuçları ile doğrulanamamıştır. Bu karakterdeki ölçümler için GUM yönteminin kullanılmasının ölçüm belirsizliğinin yanlış tahmin edilmesine ve daha düşük ölçüm belirsizliği değerlerine yol açabileceği anlamına gelir.

Bu çalışma, doğrusal olmayan özelliklere sahip ölçüm sistemleri için belirsizlik hesaplamaları söz konusu olduğunda GUM modelinin tek başına yeterli olmayabileceğini göstermesi açısından önemlidir. Termistörler, anemometreler, EMC, fotodiyotlar ve fotodetektörler gibi çok sayıda doğrusal olmayan model fonksiyona sahip ölçüm sistemleri bulunmaktadır. Monte Carlo simülasyonu bu tür doğrusal olmayan ölçümler için bir miktar programlama uzmanlığı gerektirse de GUM yönteminin tercih edildiği durumlarda doğrulama veya onaylama için kullanılmalıdır.

TEŞEKKÜR (ACKNOWLEDGMENTS)

Devlet Meteoroloji İşleri Genel Müdürlüğü Rüzgar Tüneli Kalibrasyon Laboratuvarına laboratuvar altyapılarını kullanıma sundukları için teşekkür ederiz.

We would like to thank the Directorate General for Meteorological Service for providing access to the laboratory infrastructure of the Wind Tunnel Calibration Laboratory

ETİK STANDARTLARIN BEYANI

(DECLARATION OF ETHICAL STANDARDS)

Bu makalenin yazarı çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler.

The author of this article declares that the materials and methods they use in their work do not require ethical committee approval and/or legal-specific permission.

AUTHORS' CONTRIBUTIONS (YAZARLARIN KATKILARI)

M. Saim SOYSAL: Test düzeneğinin hazırlanması ve ölçümlerin alınması ile modellerin belirlenmesi

Preparation of the test setup, data acquisition, and model identification

H. Mehmet ŞAHİN: İstatistiki modellemenin detaylandırılması ve sonuçların yorumlanması

Elaboration of statistical modeling and interpretation of results

ÇIKAR ÇATIŞMASI (CONFLICT OF INTEREST)

Bu çalışmada herhangi bir çıkar çatışması yoktur.

There is no conflict of interest in this study.

REFERENCES (KAYNAKLAR)

- Joint Committe for Guides in Metrology, (2008), JCGM 100:2008 Guide to the Expression of the Uncertainty in Measurement, Joint Committe for Guides in Metrology, Sevres: 3,6,10,19
- [2] International Standards Organization/ International Electrotechnic Committe, (2008), Uncertainty of measurement -- Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995), ISO/IEC, Geneva
- [3] P.R.G. Couto, J.C. Damasceno, S.P. de Oliveira, (2013), Chapter 2: Monte Carlo

simulations applied to uncertainty in measurement, Theory and Applications of Monte Carlo Simulations, InTech Publisher, 2013, Rijeka: 27-52

- [4] Joint Committe for Guides in Metrology, (2008), Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement, Joint Committe for Guides in Metrology, Sevres:5,7,28,30,31,34
- [5] M.A. Herrador, A.G. González, Evaluation of measurement uncertainty in analytical assays by means of Monte-Carlo simulation, Talanta 64 (2004) 415–422.
- [6] S.P. Oliveira, A.C. Rocha, J.T. Filho, P.R.G. Couto, Uncertainty of measurement by Monte-Carlo simulation and metrological reliability in the evaluation of electric variables of PEMFC and SOFC fuel cells, Measurement 42 (2009) 1497–1501.
- [7] K. Shahanaghi, P. Nakhjiri, A new optimized uncertainty evaluation applied to the Monte-Carlo simulation in platinum resistance thermometer calibration, Measurement 43 (2010) 901–911.
- [8] J. Sładek, A. Gaska, Evaluation of coordinate measurement uncertainty with use of virtual machine model based on Monte Carlo method, Measurement 45 (2012) 1564–1575.
- [9] D. Theodorou, L. Meligotsidou, Sotirios Karavoltsos, A. Burnetas, M. Dassenakis, M. Scoullos, Comparison of ISO–GUM and Monte Carlo methods for the evaluation of measurement uncertainty: application to direct cadmium measurement in water by GFAAS, Talanta 83 (2011) 1568–1574.
- [10] M. Azpurua, C. Tremola, E. Paez, Comparison of the GUM and MONTE CARLO methods for the uncertainty estimation in electromagnetic compatibility testing, Prog. Electrom. Res. B 34 (2011) 125–144.
- [11] Chen A., Chen C., Comparison of GUM and Monte Carlo methods for evaluating measurement uncertainty of perspiration measurement systems, Measurement 87 (2016) 27-37
- [12] González, C.; Vilaplana, J.M.; Parra-Rojas, F.C.; Serrano, A. Validation of the GUM uncertainty framework and the Unscented transformation for Brewer UV irradiance measurements using the Monte Carlo method. Measurement 2025, 239, 115466.
- [13] Castro, H.F.F., Mathematical modeling applied to the uncertainty analysis of a tank prover calibration: Understanding the influence of calibration conditions on the GUM validation using the Monte Carlo method, Flow

Measurement and Instrumentation, Volume 96, 2024,102547.

- [14] Wei M. Chong W., Cao J., Zhou T., Zheng D., Uncertainty evaluation for wind speed measurement part (1): "GUM method and Monte Carlo method", Flow Measurement and Instrumentation, Volume 97,2024,102607.
- [15] Castro H.F.F., Validation of the GUM using the Monte Carlo method when applied in the calculation of the measurement uncertainty of a compact prover calibration, Flow Measurement and Instrumentation, Volume 77, 2021, 101877
- [16] Hoerner. S. F., (1958) Fluid Dynamic Drag.", ABD: Author, 3-14,3-15
- [17] Davis, R.S., "Equation for the determination of the density of moist air" (1981/91), Metrologia 29, 67 (1992)
- [18] Giacomo, P., "Equation for the determination of the density of moist air" (1981), Metrologia 18, 33 (1982)
- [19] International Organization Of Legal Metrology, (2004), OIML R111-1 Weights of classes E1, E2, F1, F2, M1, M1–2, M2, M2–3 and M3 Part 1: Metrological and technical requirements, International Organization Of Legal Metrology, Paris:76.