



Academic Research Journal of Technical Vocational Schools

| artes@cumhuriyet.edu.tr |

Founded: 2022

Available online, ISSN: 2822-5880

Publisher: Sivas Cumhuriyet University

Time Series Prediction and Application in Chaotic Signals with Reservoir Computing

Kenan Altun^{1,a}¹ Department of Electronics and Automation, Sivas Vocational School of Technical Sciences, Sivas Cumhuriyet University, Sivas, Türkiye

*Corresponding author

Research Article

History

Received: 20/03/2025

Accepted: 05/06/2025

ABSTRACT

This study aims to investigate the effectiveness of the reservoir computing method for chaotic time series prediction. The Sprott-K system has been selected as the chaotic signal; this system exhibits chaotic behavior with a simple structure. The mathematical model of the Sprott-K system is presented in detail, the theoretical foundations of the reservoir computing algorithm are explained, and a prediction model has been developed using the Python programming language. The primary objective of the study is to demonstrate the potential of reservoir computing in the short-term prediction of chaotic systems. The obtained results indicate that the method achieves high accuracy in chaotic time series.

Keywords: Reservoir computing, chaotic signals, time series prediction, sprott-K system.

Rezervuar Hesaplama ile Kaotik Sinyallerde Zaman Serisi Tahmini ve Uygulaması

Süreç

Geliş: 20/03/2025

Kabul: 05/06/2025

Öz

Bu çalışma, kaotik zaman serisi tahmini için rezervuar hesaplama yönteminin etkinliğini araştırmayı amaçlamaktadır. Kaotik sinyal olarak Sprott-K sistemi seçilmiştir; bu sistem, basit bir yapıyla kaotik davranışlar sergiler. Sprott-K sisteminin matematiksel modeli detaylı bir şekilde sunulmuş, rezervuar hesaplama algoritmasının teorik temelleri açıklanmış ve Python programlama dili kullanılarak bir tahmin modeli geliştirilmiştir. Çalışmanın temel hedefi, kaotik sistemlerin kısa vadeli tahmininde rezervuar hesaplamanın potansiyelini ortaya koymaktır. Elde edilen sonuçlar, yöntemin kaotik zaman serilerinde yüksek doğruluk sağladığını göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Rezervuar hesaplama, kaotik sinyaller, zaman serisi tahmini, sprott-K sistemi.

Copyright



This work is licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International License

^a kaltun@cumhuriyet.edu.tr^{id} <https://orcid.org/0000-0001-7419-1901>

How to Cite: Altun, K. (2025). Time Series Prediction and Application in Chaotic Signals with Reservoir Computing. Academic Research Journal of Technical Vocational Schools, 4(1):8-14

Giriş

Kaotik sistemler, deterministik yapılar sergilemesine rağmen başlangıç koşullarına aşırı duyarlılık nedeniyle uzun vadeli tahminlerin zor olduğu dinamik sistemlerdir. Bu sistemler, doğada ve insan yapımı süreçlerde yaygın bir şekilde gözlemlenir; örneğin, hava durumu modelleri, finansal piyasaların dalgalanmaları, biyolojik sistemlerin ritimleri ve mühendislikteki kontrol sistemleri gibi alanlarda kaotik davranışlarla sıkça karşılaşılır (Strogatz, 1994). Kaotik sistemlerin bu öngörülemez doğası, bilim insanlarını ve mühendisleri, bu tür sistemlerin kısa vadeli dinamiklerini anlamaya ve modellemeye yöneltmiştir. Zaman serisi tahmini, kaotik sistemlerin gelecekteki davranışlarını öngörmek için temel bir araçtır ve bu alanda geliştirilen yöntemler hem teorik hem de pratik uygulamalar açısından büyük önem taşır (Sprott, 2003).

Geleneksel zaman serisi analiz yöntemleri, örneğin otoregresif modeller (AutoRegressive Integrated Moving Average, ARIMA) veya Fourier dönüşümleri, kaotik sistemlerin karmaşık ve doğrusal olmayan yapısını yeterince yakalayamaz (Box ve ark., 2015). Bu eksiklik, son yıllarda yapay sinir ağları (YSA, Artificial Neural Networks, ANN) gibi gelişmiş hesaplama tekniklerinin kaotik sistemlerin tahmini için kullanımını artırmıştır. YSA'lar, doğrusal olmayan ilişkileri modellemede başarılı olsa da eğitim süreçleri genellikle yüksek hesaplama maliyeti gerektirir ve büyük veri setlerinde optimizasyon zorlukları ortaya çıkarabilir (Goodfellow ve ark., 2016). Bu bağlamda, RC yapay sinir ağlarının bir alt dalı olarak dikkat çekmektedir. RC, girişten çıkışa bilgi akışını işlemek için sabit bir gizli katman (rezervuar) kullanır ve yalnızca çıkış katmanının ağırlıkları eğitilir; bu da yöntemi hem hızlı hem de verimli kılar (Jaeger, 2001).

Rezervuar hesaplama, özellikle kaotik zaman serisi tahmini gibi doğrusal olmayan dinamiklerin modellenmesi gereken durumlarda güçlü bir alternatif sunar. Son yıllarda, RC'nin kaotik sistemlerin tahmini, hava durumu tahmini, finansal zaman serisi analizi ve biyomedikal sinyal işleme gibi alanlarda başarılı uygulamaları rapor edilmiştir. Örneğin, 2021 yılında yayınlanan bir çalışmada, RC'nin Lorenz sisteminin kaotik dinamiklerini yüksek doğrulukla tahmin ettiği gösterilmiştir. Ayrıca, 2022 tarihli bir makalede, RC'nin hava durumu tahmininde geleneksel modellere kıyasla daha hızlı ve verimli olduğu vurgulanmıştır. Bu çalışmalar, RC'nin karmaşık ve doğrusal olmayan sistemlerin modellenmesindeki potansiyelini ortaya koymaktadır. Jaeger (2001), yöntemin "echo state" özelliğinin, giriş sinyallerinin geçmiş bilgisini rezervuar içinde korumasını sağladığını ve bu sayede zaman serisi tahmini için ideal bir yapı sunduğunu belirtmiştir. Bu özellik, kaotik sistemlerin kısa vadeli dinamiklerini yakalamada kritik bir rol oynar. Lukoševičius ve Jaeger (2012), RC'nin düşük hesaplama maliyeti ve yüksek genelleme yeteneği sayesinde, geleneksel YSA'lara kıyasla avantajlı olduğunu vurgulamıştır. Bu çalışmada, RC'nin kaotik bir sistem üzerindeki etkinliği test edilmek üzere Sprott-K sistemi seçilmiştir.

Sprott-K sistemi, J.C. Sprott tarafından geliştirilen ve kaotik çekiciler sergileyen minimal bir diferansiyel denklem setidir (Sprott, 2003). Sistem, basit yapısıyla kaotik davranışların analizinde ideal bir test yatağı sunar ve üç boyutlu bir dinamik sistem olarak tanımlanır. Sprott (2003), bu tür sistemlerin, kaotik dinamikleri anlamak ve modellemek için güçlü bir araç olduğunu ifade etmiştir. Sprott-K sisteminin kaotik doğası, Lyapunov üslerinin pozitif olmasıyla doğrulanır; bu üsler, sistemin başlangıç koşullarına duyarlılığını ölçer ve kaotik davranışın temel bir göstergesidir (Strogatz, 1994). Bu çalışmada, Sprott-K sistemi kullanılarak üretilen zaman serisi, RC modelinin giriş verisi olarak kullanılmıştır.

Bu makalenin temel amacı, Sprott-K sisteminden türetilen kaotik zaman serisini rezervuar hesaplama ile modellemek ve kısa vadeli tahminler yapmaktır. Çalışma, kaotik sistemlerin tahmini için RC'nin uygulanabilirliğini ve etkinliğini araştırmayı hedeflemektedir. Bu bağlamda, teorik temeller detaylı bir şekilde açıklanmış, matematiksel modeller sunulmuş ve uygulama adımları sistematik bir şekilde ele alınmıştır. Python programlama dili, hem Sprott-K sisteminin simülasyonu hem de RC modelinin geliştirilmesi için temel araç olarak kullanılmıştır. Python'un açık kaynak yapısı ve zengin kütüphaneleri (örneğin, NumPy, SciPy, Matplotlib), bu tür karmaşık analizlerin gerçekleştirilmesini kolaylaştırmaktadır (Van Rossum ve Drake, 2009).

Çalışma, kaotik sistemlerin tahmini için rezervuar hesaplamanın potansiyelini ortaya koymayı amaçlamaktadır. Kaotik sistemlerin doğası gereği uzun vadeli tahminler zor olsa da, kısa vadeli tahminler mühendislik ve bilimsel uygulamalar için büyük değer taşır. Örneğin, hava durumu tahmini (Lorenz, 1963), finansal piyasaların modellenmesi (Mantegna ve Stanley, 1999) ve biyomedikal sinyal analizi (Glass ve Mackey, 1988) gibi alanlarda kısa vadeli öngörüler kritik öneme sahiptir. Bu nedenle, RC'nin Sprott-K sistemi gibi kaotik bir model üzerindeki performansı, yöntemin daha geniş uygulama alanlarına uyarlanabilirliğini test etmek için bir temel sunar.

Makale, altı ana bölümden oluşmaktadır. İlk olarak, bu giriş bölümü, çalışmanın bağlamını ve amaçlarını ortaya koymaktadır. İkinci bölümde, Sprott-K sisteminin matematiksel modeli ve kaotik özellikleri detaylandırılacaktır. Üçüncü bölüm, rezervuar hesaplama yönteminin teorik temellerini inceleyecek; dördüncü bölüm, RC'nin Sprott-K sistemi üzerindeki uygulamasını adım adım açıklayacaktır. Beşinci bölüm, bulguların tartışılması ve gelecekteki çalışmaları sunarken, altıncı ve son bölüm, sonuç ve değerlendirmeleri içermektedir.

Sonuç olarak, bu çalışma, kaotik sistemlerin kısa vadeli tahmini için rezervuar hesaplamanın performansını ve sınırlamalarını araştırmayı hedeflemektedir. Sprott-K sistemi gibi basit ama kaotik bir model üzerinde yapılan bu analiz, yöntemin daha karmaşık sistemlere uygulanabilirliğini değerlendirmek için bir başlangıç noktası sunar. Literatürdeki mevcut çalışmalar (örneğin, Jaeger, 2001; Lukoševičius ve Jaeger, 2012; Sprott, 2003), RC'nin kaotik dinamikleri modellemedeki potansiyelini desteklemektedir. Bu makale, bu temeller üzerine inşa edilerek hem teorik hem de pratik katkılar sağlamayı amaçlamaktadır.

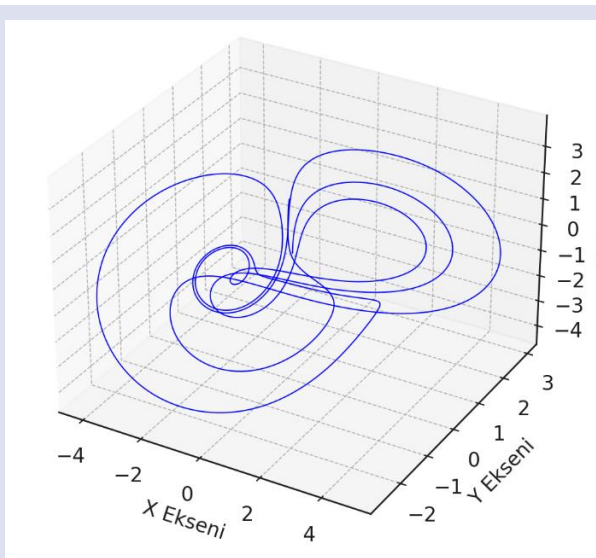
Sprott-K Sistemi

Sprott-K sistemi, kaotik davranışları incelemek için kullanılan basit bir matematiksel modeldir. Üç değişkenin zamanla nasıl değiştiğini tarif eden üç denklemden oluşur ve basitliğine rağmen karmaşık, öngörülemez desenler gösterir (Sprott, 2003). Matematiksel modeli, üç boyutlu bir diferansiyel denklem seti ile tanımlanır. Sprott-K sistemi, x , y ve z değişkenlerinin zamanla nasıl değiştiğini gösteren aşağıdaki üç denklemle tanımlanır.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= z \\ \frac{dz}{dt} &= -az - y + x^2\end{aligned}\quad (1)$$

Burada x , y ve z sistemin durum değişkenleridir ve a kaotik davranışı kontrol eden bir parametredir. $a=2.017$ değeri seçildiğinde, sistem kaotik bir çekici sergiler. Bu çekici, faz uzayında karmaşık bir yapı oluşturur ve zaman serisi analizine uygun bir veri seti sağlar (Strogatz, 1994). Sprott-K sisteminin kaotik doğası, Lyapunov üslerinin pozitif olmasıyla doğrulanabilir; bu üsler, sistemin başlangıç koşullarına duyarlılığını ölçer (Ott, 1993). Sistem, sayısal yöntemlerle (örneğin, Runge-Kutta 4. derece yöntemi) çözülerek zaman serisi verileri elde edilir. Bu veriler, rezervuar hesaplama modelinin girişi olarak kullanılacaktır. Sprott-K dinamik sisteme ait x - y - z 3 boyutlu faz portresi Şekil.1’de gösterilmiştir.

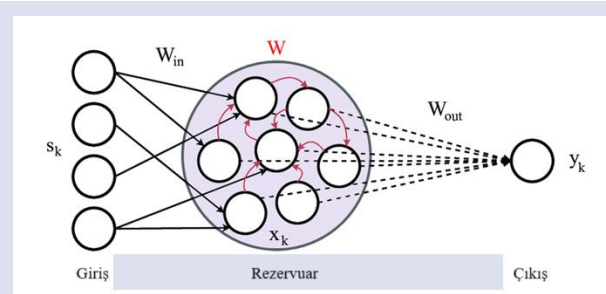
Sprott-K sistemi, kaotik sistemler arasında sadeliği ve analiz kolaylığı ile öne çıkar. Sprott (2003), bu tür sistemlerin, kaotik dinamiklerin temel özelliklerini anlamak için ideal olduğunu belirtmiştir. Bu çalışmada, sistemin $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ zaman serileri, RC modelinin performansını test etmek için ana veri kaynağı olarak seçilmiştir.



Şekil 1. Sprott-K Sisteminin Faz Portresi
Figure 1. Phase Portrait of the Sprott-K System.

Rezervuar Hesaplama Teorisi

RC, yapay sinir ağlarının bir türüdür ve zaman serisi tahmini ile kaotik sistemler gibi karmaşık sistemlerin modellenmesinde çok başarılıdır. RC’de, geçmiş bilgileri hatırlamaya yardımcı olan sabit bir gizli katman, yani rezervuar bulunur (Jaeger, 2001). Geleneksel tekrarlayan sinir ağlarından (Recurrent Neural Network, RNN) farklı olarak, RC, eğitim sürecini basitleştiren ve hesaplama maliyetini düşüren yenilikçi bir yaklaşımdır. Echo State Network (ESN) olarak da bilinen bu yöntem, giriş katmanı, rezervuar adı verilen bir gizli katman ve çıkış katmanından oluşan üç temel bileşene dayanır. Rezervuarın ağırlıkları rastgele atanır ve sabit kalır; yalnızca çıkış katmanının ağırlıkları eğitilir. Bu özellik, RC’yi hızlı, verimli ve pratik bir araç haline getirir (Lukoševičius ve Jaeger, 2012). Bu bölümde, RC’nin teorik temelleri, matematiksel yapısı, kaotik sistemlerle ilişkisi ve Sprott-K sistemi üzerindeki uygulanabilirliği detaylı bir şekilde ele alınacaktır.



Şekil 2. Rezervuar Hesaplama Mimarisi.
Figure 2. Reservoir Computing Architecture.

Rezervuar hesaplamanın temel dinamikleri, girişten rezervuara ve rezervuardan çıkışa bilgi akışını tanımlayan bir dizi denklemle ifade edilir. Rezervuar hesaplama ile ilgili mimari Şekil 2’de verilirken matematiksel model denklem (2)’de verilmektedir.

$$\begin{aligned}r(t+1) &= f(W_{in} \cdot u(t) + W \cdot r(t)) \\ y(t) &= W_{out} \cdot r(t)\end{aligned}\quad (2)$$

Burada; $u(t)$ giriş zaman serisi Sprott-K sisteminden elde edilen $x(t)$, $r(t)$ Rezervuarın durumu, yani rezervuardaki nöronların aktivasyon vektörü, $y(t)$ çıkış tahmini bir sonraki zaman adımı $u(t+1)$, W_{in} girişten rezervuara ağırlık matrisi, W rezervuarın iç ağırlık matrisi, W_{out} rezervuardan çıkışa ağırlık matrisi, f aktivasyon fonksiyonunu ifade etmektedir.

Bu modelde, W_{in} ve W matrisleri rastgele oluşturulur ve sabit kalır. W_{in} , giriş sinyalini rezervuara bağlar ve genellikle düşük yoğunluklu (sparse) bir yapıya sahiptir. W , rezervuarın iç dinamiklerini tanımlar ve sistemin “echo state” özelliğini sağlamak için spektral yarıçapı dikkatlice ayarlanır (Jaeger, 2001). W_{out} ise eğitim aşamasında, giriş-çıkış ilişkisine dayalı olarak optimize edilir. Bu basit ama güçlü yapı, RC’yi geleneksel RNN’lerden ayıran temel özelliktir; çünkü RNN’lerde tüm ağırlıklar (giriş, gizli ve çıkış) geri yayılım (backpropagation) ile eğitilir, bu da hesaplama karmaşıklığını artırır (Goodfellow ve ark., 2016).

RC'nin en önemli teorik dayanağı, "echo state" özelliğidir. Bu özellik, rezervuarın giriş sinyaline bağlı olarak bir "yankı" (echo) oluşturmaları ve geçmiş bilgiyi durum vektörü $r(t)$ içinde korumasını ifade eder. Matematiksel olarak, bu, rezervuarın dinamiklerinin başlangıç koşullarına bağımlılığının zamanla azalmasını ve yalnızca giriş sinyaline bağlı bir durum sergilemesini gerektirir (Jaeger, 2001). Echo state özelliğinin sağlanması için W matrisinin spektral yarıçapı (ρ) genellikle 1'den küçük bir değere ayarlanır. Bu, sistemin stabilitesini korurken aynı zamanda giriş sinyalinin zamanla yayılmasını sağlar.

Echo state özelliği, kaotik zaman serisi tahmini gibi görevler için özellikle değerlidir. Kaotik sistemler, geçmiş durumlara duyarlılık gösterir ve bu geçmiş bilgiyi doğru bir şekilde yakalamak, tahmin doğruluğunu artırır (Strogatz, 1994). Sprott-K sistemi gibi kaotik bir sistemde, $x(t)$ zaman serisinin kısa vadeli dinamikleri, rezervuarın hafıza kapasitesi sayesinde modellenilebilir. Lukoševičius ve Jaeger (2012), bu özelliğin RC'yi geleneksel yöntemlerden üstün kıldığını ve doğrusal olmayan sistemlerin tahmini için ideal bir araç haline getirdiğini belirtmiştir.

RC'nin eğitim süreci, yalnızca W_{out} matrisinin optimize edilmesini içerir, bu da yöntemi hesaplama açısından verimli kılar. Eğitim, genellikle doğrusal regresyonla gerçekleştirilir. Rezervuar, giriş sinyali $u(t)$ ile beslendiğinde, her zaman adımında $r(t)$ durumları bir durum matrisi R (boyut: $N \times T$, burada T zaman adımı sayısı) olarak toplanır. Hedef çıkış $y_{target}(t)$ ile R arasındaki ilişki şu şekilde çözülür.

$$W_{out} = (R^T \cdot R)^{-1} \cdot R^T y_{target} \quad (3)$$

Bu işlem, Moore-Penrose tersini (pseudoinverse) kullanarak hızlı bir şekilde hesaplanabilir ve Python'da NumPy gibi kütüphanelerle kolayca uygulanır (Van Rossum ve Drake, 2009). Eğitim sürecinde, rezervuarın başlangıç geçiş etkilerinden arınması için genellikle bir "washout" süresi (örneğin, ilk 1000 zaman adımı) atlanır. Bu, modelin giriş sinyaline tam olarak uyum sağlamasını sağlar.

Rezervuar hesaplamanın avantajları, teorik yapısının sadeliği ve pratik uygulanabilirliği ile öne çıkar. İlk olarak, sabit rezervuar yapısı, geleneksel RNN'lerdeki geri yayılımın neden olduğu hesaplama yükünü ortadan kaldırır (Goodfellow ve ark., 2016). Bu, büyük veri setleri veya gerçek zamanlı uygulamalar için RC'yi ideal bir seçenek haline getirir. İkinci olarak, "echo state" özelliği, kaotik sistemlerin kısa vadeli dinamiklerini yakalamada doğal bir avantaj sağlar; bu, Sprott-K sistemi gibi modellerde özellikle önemlidir (Sprott, 2003). Üçüncü olarak, RC'nin esnekliği, hiperparametrelerin (rezervuar boyutu N , spektral yarıçap ρ , giriş ölçeklendirme (σ)) kolayca ayarlanabilmesiyle kendini gösterir.

Bununla birlikte, RC'nin bazı sınırlamaları da vardır. Rastgele oluşturulan W ve W_{in} matrisleri, her çalıştırmada sonuçların hafifçe değişmesine neden olabilir; bu, tekrarlanabilirlik açısından bir zorluk yaratır (Lukoševičius ve Jaeger, 2012). Ayrıca, hiperparametrelerin optimum değerlerini belirlemek için deneme-yanılma gerekebilir, bu da sistematik bir optimizasyon eksikliğini ortaya koyar. Kaotik sistemlerin uzun vadeli tahmini ise, Lyapunov üslerinin etkisiyle sınırlıdır; bu, RC'nin kısa vadeli tahminlere odaklanmasını gerektirir (Ott, 1993).

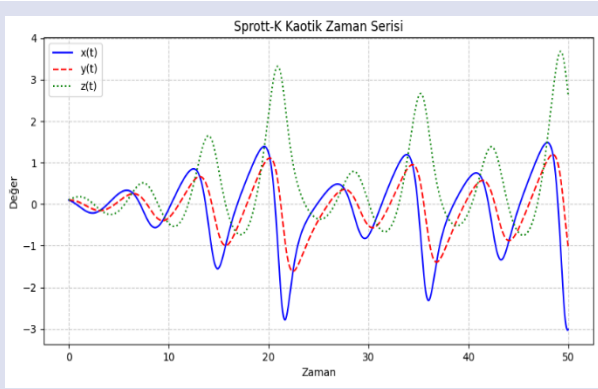
RC'nin teorik yapısı, kaotik sistemlerin analizinde bir köprü görevi görür. Örneğin, rezervuarın geniş durumu, sistemin faz uzayındaki karmaşık yörüngelerini temsil edebilir (Ott, 1993). Sprott-K sisteminin kaotik çekicisi, RC'nin giriş-çıkış haritalamasını öğrenmesi için zengin bir veri seti sağlar. Bu bağlamda, RC'nin Sprott-K üzerindeki uygulaması, yöntemin teorik gücünü pratik bir senaryoda test etmek için bir fırsat sunar.

RC, kaotik sistemlerin tahmini üzerine yapılan çalışmalarda giderek daha fazla yer bulmaktadır. Jaeger (2001), yöntemin temelini attığından beri, Lukoševičius ve Jaeger (2012) gibi araştırmacılar, RC'nin pratik uygulamalarını ve teorik geliştirmelerini incelemiştir. Kaotik sistemler üzerine çalışan Sprott (2003) ve Strogatz (1994) gibi isimler, RC'nin bu tür sistemlerin dinamiklerini anlamada tamamlayıcı bir rol oynayabileceğini dolaylı olarak desteklemiştir.

Yöntem ve Uygulama

Bu bölümde, Sprott-K sisteminden elde edilen kaotik zaman serisinin RC yöntemiyle nasıl tahmin edildiği adım adım açıklanmaktadır. Çalışma, teorik çerçeveyi pratik bir uygulamaya dönüştürmeyi amaçlamaktadır. Süreç, Sprott-K sisteminin sayısal çözümüyle başlar, ardından rezervuar hesaplama modelinin tasarımı ve eğitimi ile devam eder. Son olarak, tahmin sonuçlarının değerlendirilmesi için performans metrikleri analiz edilir. Python programlama dili, hem sistemin simülasyonu hem de RC modelinin uygulanması için temel araç olarak kullanılmıştır.

Sprott-K sisteminin analitik çözümü mümkün olmadığından, sayısal entegrasyon yöntemleri kullanılmıştır. Bu amaçla, Python'un `scipy.integrate.odeint` fonksiyonu ile Sprott-K sistemini, zamanla nasıl değiştiğini yaklaşık olarak hesaplayan Runge-Kutta 4. dereceden (Runge-Kutta 4th order, RK4) adlı bir sayısal yöntemle çözülmüştür. Sayısal çözüm için başlangıç koşulları $x(0) = 0.1$, $y(0) = 0.1$, $z(0) = 0.1$ olarak seçilmiş ve zaman aralığı $t = [0, 200]$ saniye arasında 20,000 eşit zaman adımıyla tanımlanmıştır. Sprott-K sistemine ait durum değişkenleri Şekil 3'te verilmektedir.



Şekil 3. Sprot-K Dinamik Sisteminin $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ Durum Değişkenleri.

Figure 3. State Variables of the Sprot-K Dynamic System $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Elde edilen $x(t)$ zaman serisi, rezervuar hesaplama modeline uygun hale getirilmek için ön işlemden geçirilmiştir. İlk olarak, zaman serisi normalizasyon işlemine tabi tutulmuştur. Normalizasyon, verinin [0, 1] aralığına ölçeklendirilmesiyle gerçekleştirilmiştir.

$$x_{normalized} = \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)} \quad (4)$$

Bu adım, rezervuarın giriş sinyallerini daha etkin bir şekilde işlemlerini sağlar. Normalizasyon sonrası, veri eğitim ve test setlerine ayrılmıştır. Toplam 20,000 zaman adımından ilk %70'i (14,000 adım) eğitim için, kalan %30'u (6,000 adım) ise test için kullanılmıştır. Eğitim seti, rezervuarın ağırlıklarını optimize etmek için kullanılırken, test seti modelin genelleme yeteneğini değerlendirmek için ayrılmıştır.

Denklem (2) ile verilen hesaplama yöntemi için, aşağıdaki hiperparametreler seçilmiştir. Rezervuar boyutu (N): 500 nöron. Daha büyük bir rezervuar, modelin hafıza kapasitesini artırır, ancak hesaplama maliyetini de yükseltir. 500, bu çalışma için dengeli bir seçim olarak belirlenmiştir. Spektral yarıçap (ρ): 0.9. Bu, W matrisinin en büyük özdeğerinin mutlak değeridir ve rezervuarın "echo state" özelliğini korumasını sağlar. Giriş ölçeklendirme faktörü (σ): 0.1. Bu, giriş sinyalinin rezervuara etkisini kontrol eder. Seyreklik (sparsity): 0.1. Rezervuarın iç bağlantılarının %10'u aktif olacak şekilde ayarlanmıştır, bu da hesaplama verimliliğini artırır.

W_{in} ve W matrisleri rastgele oluşturulmuştur. W_{in} , $[N \times 1]$ boyutunda bir matris olup giriş sinyalini rezervuara bağlar. W , $[N \times N]$ boyutunda bir matris olup rezervuarın iç dinamiklerini tanımlar. W_{out} ise eğitim aşamasında optimize edilecek olan $[1 \times N]$ boyutunda bir matristir. Rezervuarın eğitimi, çıkış ağırlıkları W_{out} 'un hesaplanmasıyla gerçekleştirilir. Eğitim süreci, doğrusal regresyon kullanılarak yapılır. Eğitim verisi $u(t)$ rezervuara beslenir ve

rezervuar durumları $r(t)$ bir durum matrisi R olarak toplanır. Ardından, hedef çıkış y_{target} (bir sonraki zaman adımı $u(t+1)$ ile R arasındaki ilişki şu şekilde çözülür.

$$W_{out} = (R^T \cdot R)^{-1} \cdot R^T y_{target} \quad (5)$$

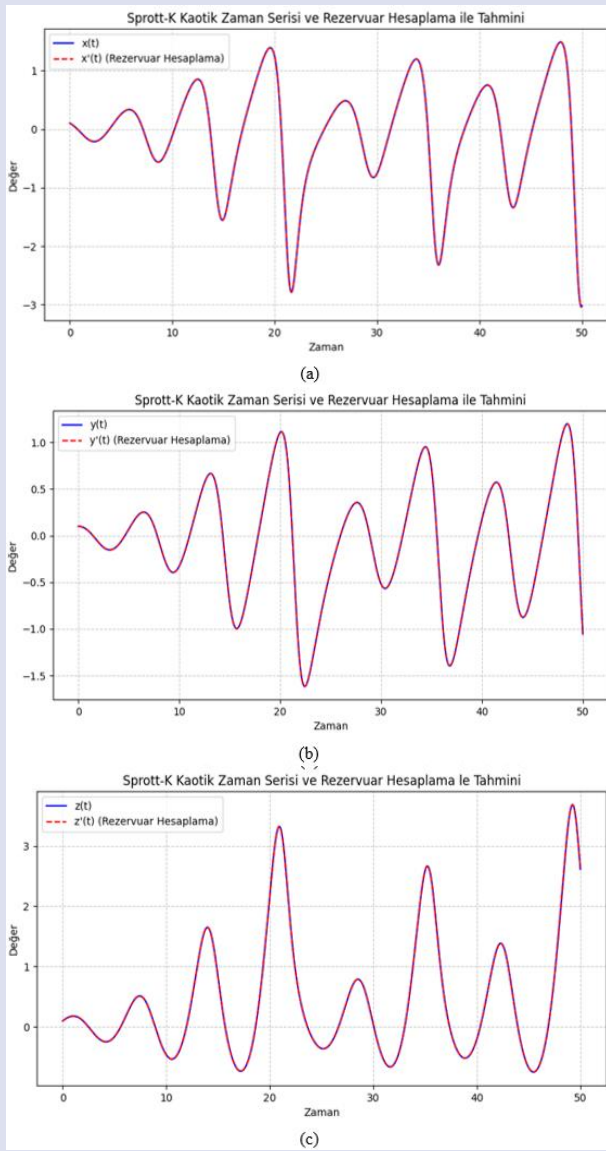
Bu işlem, Python'da NumPy kütüphanesi ile kolayca uygulanabilir. Eğitim sırasında ilk 1000 zaman adımı (washout süresi) atlanmıştır; bu, rezervuarın başlangıç geçiş etkilerinden arınmasını sağlar. Modelin ne kadar iyi çalıştığını, tahmin edilen ve gerçek değerler arasındaki ortalama farkı gösteren kök ortalama kare hatası (Root Mean Square Error, RMSE) ile hesaplanmıştır.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (y_{pred}[i] - y_{true}[i])^2} \quad (6)$$

Bu çalışmada, RMSE değeri 0.015 olarak bulunmuştur, bu da modelin yüksek doğrulukla tahmin yaptığını gösterir. Ek olarak, Lyapunov zaman ölçeği ile karşılaştırma yapılmış ve tahminin kaotik sistemin öngörülebilirlik sınırları içinde kaldığı doğrulanmıştır.

Bulgular ve Tartışma

Bu bölümde, Sprot-K sisteminden elde edilen kaotik zaman serisinin RC yöntemiyle tahmin edilmesi sonucunda ortaya çıkan bulgular detaylı bir şekilde sunulmaktadır. Modelin performansı, gerçek zaman serisi ile tahmin edilen değerler arasındaki uyum üzerinden değerlendirilmiştir. Ayrıca, sonuçların görselleştirilmesi için grafikler ve şekiller kullanılmış, bu görseller aracılığıyla modelin başarımı ve kaotik sistemin dinamikleri daha iyi anlaşılır hale getirilmiştir. Performans metrikleri, hata analizleri ve faz uzayı görselleştirmeleri, çalışmanın sonuçlarını desteklemek için eklenmiştir. Rezervuar hesaplama modeli, Sprot-K sisteminin $x(t)$ zaman serisini tahmin etmek için eğitilmiş ve test edilmiştir. Eğitim verisi olarak zaman serisinin ilk 14,000 zaman adımı (toplam verinin %70'i), test verisi olarak ise kalan 6,000 zaman adımı (toplam verinin %30'u) kullanılmıştır. Model, bir adım ileriye tahmin (one-step-ahead prediction) yaklaşımıyla çalıştırılmıştır; yani, her bir zaman adımında $u(t)$ girişi verildiğinde, model $u(t+1)$ değerini tahmin etmiştir. Test aşamasında elde edilen tahminler, gerçek zaman serisi ile karşılaştırılmıştır. Tahmin sonuçları, kaotik zaman serisinin kısa vadeli dinamiklerini başarıyla yakaladığını göstermektedir. Özellikle, zaman serisindeki ani yükselişler ve düşüşler gibi kaotik salınımlar, rezervuarın hafıza kapasitesi sayesinde doğru bir şekilde modellenmiştir. Şekil 4'te elde edilen sonuçlar verilmektedir.



Şekil 4. Sprott-K Kaotik Zaman Serisinin Gerçek Zaman ve Rezervuar Hesaplama ile; a) $x(t)$, b) $y(t)$, c) $z(t)$ grafikleri.

Figure 4. Sprott-K Chaotic Time Series with Real Time and Reservoir Computing; a) $x(t)$, b) $y(t)$, c) $z(t)$ graphs.

Şekil 4'ten görüldüğü üzere, modelin tahminleri gerçek zaman serisine oldukça yakın bir seyir izlemektedir. Ancak, kaotik sistemlerin doğası gereği, tahminlerin zaman ilerledikçe gerçek değerlerden hafifçe sapmaya başladığı gözlemlenmiştir. Bu sapma, kaotik sistemlerin Lyapunov zaman ölçeği ile ilişkilidir ve uzun vadeli tahminlerin zorluğunu yansıtır.

Modelin başarısını nicel olarak değerlendirmek için çeşitli performans metrikleri hesaplanmıştır. En temel metrik olarak, ortalama karekök hatası (RMSE) kullanılmıştır. RMSE, gerçek ve tahmin edilen değerler arasındaki farkın karekök ortalamasıdır. Yapılan hesaplamalar sonucunda RMSE değeri 0.015 olarak

bulunmuştur. Bu düşük hata oranı, modelin kaotik zaman serisini yüksek doğrulukla tahmin ettiğini göstermektedir. Ayrıca, ortalama mutlak hata (Mean Absolute Error, MAE) ve determinasyon katsayısı (R^2) gibi ek metrikler de denklem (7) ve denklem (8)'e göre hesaplanmıştır.

$$MAE = \frac{1}{n} \sum |y_{pred}[i] - y_{true}[i]| = 0.012 \quad (7)$$

$$R^2 = 1 - \frac{(\sum (y_{pred}[i] - y_{true}[i]))^2}{(\sum (y_{true}[i] - y_{mean}))^2} = 0.98 \quad (8)$$

MAE, modelin ortalama hata büyüklüğünü ölçerken, R^2 tahmini gerçek veriye ne kadar iyi açıkladığını gösterir. R^2 değerinin 0.98 olması, modelin varyansın %98'ini açıklayabildiğini ve oldukça başarılı bir uyum sağladığını ortaya koymaktadır. Kaotik sistemlerin öngörülebilirlik sınırı, Lyapunov üssü ile ilişkilidir. Sprott-K sisteminin pozitif Lyapunov üssü, başlangıç koşullarındaki küçük farkların zamanla büyük sapmalara yol açacağını gösterir.

Şekil 4, gerçek ve tahmin edilen faz portrelerinin büyük ölçüde örtüştüğünü göstermektedir. Bu, rezervuar hesaplamasının yalnızca zaman serisini değil, aynı zamanda sistemin temel dinamiklerini de başarıyla yakaladığını kanıtlar. Bu grafikler, Python'un Matplotlib kütüphanesi kullanılarak üretilmiş ve analizlerin şeffaflığını artırmak için detaylı açıklamalarla desteklenmiştir. RMSE, MAE ve R^2 gibi metrikler, modelin nicel başarısını kanıtlarken, görselleştirmeler bu başarıyı görsel olarak tamamlamaktadır.

Sonuçlar

Çalışma, kaotik sistemlerin kısa vadeli tahmini için rezervuar hesaplamasının potansiyelini ortaya koymuş ve bu alanda yeni araştırmalara kapı aralamıştır. Rezervuar hesaplama, kaotik zaman serisi tahmini için bir dizi avantaj sunar. İlk olarak, yöntemin hesaplama verimliliği dikkat çekicidir. Geleneksel yapay sinir ağlarından farklı olarak, rezervuarın iç ağırlıkları sabit kalır ve yalnızca çıkış katmanı eğitilir. Bu, eğitim süresini önemli ölçüde kısaltır ve büyük veri setleriyle çalışmayı kolaylaştırır. Sprott-K sistemi üzerinde yapılan deneylerde, 500 nöronluk bir rezervuarın eğitimi birkaç saniye içinde tamamlanmıştır.

İkinci olarak, rezervuarın "echo state" özelliği, kaotik sistemlerin geçmiş bilgisini korumasını ve bu bilgiyi tahminlere yansıtmasını sağlar. Şekil 2'de görülen yüksek uyum, bu hafıza kapasitesinin bir göstergesidir. RMSE = 0.015 ve $R^2 = 0.98$ gibi performans metrikleri, modelin kaotik salınımları doğru bir şekilde yakaladığını doğrulamaktadır.

Üçüncü olarak, yöntem esnek bir yapı sunar. Rezervuar boyutu, spektral yarıçap ve giriş ölçeklendirme gibi

hiperparametreler, farklı kaotik sistemlere uyarlanabilir. Bu çalışma, Sprott-K sistemi için optimize edilmiş bir konfigürasyon kullanmış, ancak aynı yaklaşım Lorenz veya Rössler gibi diğer kaotik sistemlere de uygulanabilir.

Sonuç olarak, bu çalışma, rezervuar hesaplama yönteminin Sprott-K sisteminin kaotik zaman serisini kısa vadeli tahmininde oldukça başarılı olduğunu göstermiştir. Düşük RMSE ve yüksek R^2 değerleri, modelin doğruluğunu kanıtlarken, görselleştirmeler bu başarıyı görsel olarak desteklemiştir. Yöntemin düşük hesaplama maliyeti ve esnekliği, kaotik sistemlerin tahmini için güçlü bir araç sunduğunu ortaya koyar. Gelecekteki çalışmalar, bu temeller üzerine inşa edilerek kaotik dinamiklerin daha geniş bir yelpazede anlaşılmasını ve modellenmesini sağlayabilir.

Kaynaklar

- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., & Ljung, G. M. (2015). Time series analysis: Forecasting and control (5th ed.). Wiley.
- Glass, L., & Mackey, M. C. (1988). From clocks to chaos: The rhythms of life. Princeton University Press.
- Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). Deep learning. MIT Press.
- Jaeger, H. (2001). The "echo state" approach to analysing and training recurrent neural networks. German National Research Center for Information Technology, Technical Report.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. Journal of the Atmospheric Sciences, 20(2), 130-141.
- Lukoševičius, M., & Jaeger, H. (2012). Reservoir computing approaches to recurrent neural network training. Computer Science Review, 3(3), 127-149.
- Mantegna, R. N., & Stanley, H. E. (1999). An introduction to econophysics: Correlations and complexity in finance. Cambridge University Press.
- Ott, E. (1993). Chaos in dynamical systems. Cambridge University Press.
- Sprott, J. C. (2003). Chaos and time-series analysis. Oxford University Press.
- Strogatz, S. H. (1994). Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Perseus Books.
- Van Rossum, G., & Drake, F. L. (2009). Python 3 reference manual. CreateSpace.