

Düzlem Gerilme Sonlu Elemanı Kullanılarak Uzun ve Kısa Konsol Kiriş ile Küp Yarma Deneyi Problemlerinin Numerik İncelenmesi

Cengiz Duran Atış^{1*}, Zeynep Nur Yılmaz², Furkan Kaan Durak², Ezgi Örklemmez², Müslüm Kılınç¹, Fatih Yılmaz¹, Uğur Durak¹, Serhan İlkentapar¹, Okan Karahan¹

¹ Erciyes Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği, KAYSERİ

² Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, KAYSERİ

*Sorumlu Yazar: Cengiz Duran Atış

(Alınış / Received: 09.04.2025, Kabul / Accepted: 28.05.2025, Online Yayınlanma / Published Online: 31.07.2025)

Anahtar Kelimeler

Sonlu Eleman Analizi,
Uzun ve Kısa Konsol Kirişler,
Küp Yarma Deneyi,

Öz: Bu çalışmada, sonlu eleman yöntemi kullanılarak uzun ve kısa konsol kiriş ile küp yarma deneyi elemanlarında düzlem gerilme değerleri hesaplanarak karşılaştırılmıştır. İlk önce bu elemanlara ait rijitlik matrisi türetilmiştir. Düğüm noktalarında iki serbestlik derecesine sahip olan düzlem gerilme elemanının rijitlik matrisi elde edildikten sonra, bilgisayar programı olan Mathematica kullanılarak bu elemanlarda meydana gelen düzlem gerilme değerleri sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Serbest ucunda tekil yük bulunan uzun ve kısa konsol kirişler, düşey ve yatay yüklere maruz perde duvarlar ile küp yarma deneyi gibi mühendislik problemleri irdelenmiş ve analitik sonuçlarla sonlu elemanlar yönteminden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Yapılan analizler sonucunda, ilgili deplasman ve gerilme dağılımları belirlenmiş ve sonlu eleman ağındaki eleman sayısının artırılmasıyla elde edilen çözümlerin, analitik çözüme yakınsadığı gözlemlenmiştir. Sonuç olarak uzun ve kısa konsol kiriş ile küp yarma arasında sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında en yakınsak sonuç sırasıyla küp yarma, uzun konsol ve kısa konsol probleminden elde edilmiştir.

Numerical Investigation of Long and Short Cantilever Beam and Cube Splitting Test Problems Using Plane Stress Finite Element

Keywords

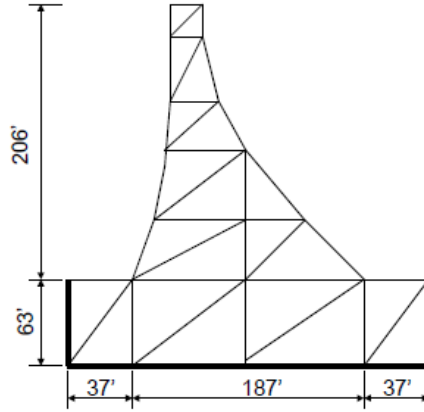
Finite Element Analysis,
Long and Short Cantilever
Beams,
Cube Splitting Test,

Abstract: In this study, plane stress values in long and short cantilever beams and cube splitting test elements were calculated and compared using the finite element method. First, the stiffness matrices of these elements were derived. After obtaining the stiffness matrix for the plane stress element, which has two degrees of freedom at each node, the plane stress values were computed using the finite element method through the Mathematica software. Engineering problems such as long and short cantilever beams with a concentrated load at the free end, shear walls subjected to vertical and horizontal loads, and the cube splitting test were analyzed, and the results obtained by the finite element method were compared with analytical results. As a result of the analyses, relevant displacement and stress distributions were determined, and it was observed that the solutions obtained by increasing the number of elements in the finite element mesh converged toward the analytical solution. Consequently, when comparing the results obtained using the finite element method for long and short cantilever beams and the cube splitting test, the most convergent results were found respectively in the cube splitting test, the long cantilever beam, and the short cantilever beam.

1. Giriş

Sonlu elemanlar metodu veya sonlu elemanlar yönteminin esası bir sınır değer diferansiyel denkleminin çözümünden ibarettir [1]. Bu yöntem sayesinde mevcut problem sonlu elemanlara veya parçalara ayrıştırılarak çözülür. Sonlu parçalar üzerinde diferansiyel denklemin çözümünü temsil eden interpolasyon fonksiyonu seçilir ve bu interpolasyon fonksiyonu sonlu parçanın belirli noktalarında çözülmesi istenen diferansiyel denklemin belirli noktalarda ki değerine odaklanır. Bu değerler çözülmesi gereken bilinmeyenlerdir. İnterpolasyon fonksiyonunun eleman üzerindeki belirli noktalarda bilinmeyen değerleri ile idare eden diferansiyel denklem arasındaki bağıntılar eleman için bünye denklemleri (gerilme şekil değiştirme, moment eğrilik bağıntıları) vasıtasıyla gerçekleştirilir.

Clough [2] 1967 yılında üçgen elemanlar kullanarak birkaç düzlem gerilme problemini çözmek için matris cebir programını kullanmıştır. Tüm matrisler elle hesaplandığından, basit bir yapının analizi dahi önemli miktarda zaman almıştır. Bu nedenle, Şekil 1'de verilen ağırlık barajının analizi için kullanılan ilk sonlu eleman ağı'ndan anlaşılacağı üzere sadece kaba sonlu eleman ağ çözümleri mümkündür. Ancak, bu yaklaşım, Clough tarafından Eylül 1960'ta 2. ASCE Elektronik Hesaplamalar Konferansı'nda sunulan Düzlemsel Gerilme Analizinde Sonlu Elemanlar Yöntemi adlı makaledeki tüm örnekleri üretmek için kullanılmıştır. Bu makale Berkeley Kampüsü dışında yayınlanan ve sonlu elemanlar terminolojisini kullanan ilk makale olmuştur. Böylece, bu yapısal analiz yönteminin sürekli ortamlardaki gerilmeleri ve deplasmanların hesabında kullanılabileceği gösterilmiştir [2]. Sonlu elemanların tarihçesi ile ilgili daha detaylı bilgiler sonlu elemanlarla ilgili öncü çalışmalar isimli çalışmada sunulmaktadır [3].



Şekil 1. Ağırlık barajının analizi için kullanılan ilk sonlu eleman ağı [2-3]

Atiş [4] düzlem gerilme elemanı ve plak eğilme elemanı üzerinde çalışma yaparak, uzay kabuk elemanı rijitlik matrisini elde edip, bunu kullanan Fortran dilinde bir program kodlamıştır. Malzemenin lineer elastik ve deplasmanların çok küçük olduğu kabulü ile birinci mertebe teorisi kullanılmıştır. Çalışmada eğrisel kabuk yapılar, katlanmış plak ve kutu kesitli kirişlerin çözümünü yapmış olup, elde ettiği sonuçların literatürle uyumlu bulunmuştur.

Cünedioğlu [5], yapmış olduğu yüksek lisans tezinde, sonlu elemanlar metodunu düzlemsel gerilme analizine uygulamak için üçgen elemanlar kullanmıştır. Üçgen eleman seçmesinin sebebi düzensiz şekillere sahip elemanların üçgen elemanlarla temsiline kolaylığı ve matematiksel bağıntılarının daha basit olmasıdır. Örnek problemler olarak normal çekme gerilmelerine bağlı çeşitli levhaları analiz etmiştir. Bir levha probleminde parabolik çekme yükü uygulayarak analiz etmiştir. Ayrıca, somun sıkma anahtarına uygulanan yük nedeniyle somun sıkma anahtarı üzerinde özellikle uç kısımlarda gerilmelerin hesabını yapmıştır. Üçgen eleman kullanımının bazı problemlerde iyi sonuç verdiğini, bazı problemlerde ise doğru sonuçtan önemli miktarda sapma olduğunu belirtmiştir. Eleman sayısını ise bilgisayar hafızasının düşük olmasından dolayı istenen düzeyde yüksek tutamamıştır.

Öztorun [6], düzlemi içinde moment taşıyabilen dikdörtgen düzlem gerilme elemanı için sonlu eleman formülasyonu üzerine çalışmıştır. Bu eleman ve plak eğilme elemanını birleştirerek üç boyutlu yapı problemlerini çözmeyi hedeflemiştir. Birleşik elemanı kullanan bir bilgisayar programı kodlayarak tünel kalıp ile üretilen yapıların statik ve dinamik analizini gerçekleştirmiştir. Çözdüğü örnek problemleri SAP2000 ve literatürle kıyaslamış olup, sonuçlarının oldukça uyum içinde olduğu sonucuna varmıştır.

Gazi [7], yürüttüğü yüksek lisans tezinin konusu olarak üçgen düzlem gerilme sonlu elemanı kullanarak, eleman rijitlik matrisini elde etmiştir. Bu elemanı kullanan Fortran dilinde bir program kodlayarak, çeşitli problemler çözmüştür. Üçgen eleman kullanarak elde edilen sonuçların doğruluğunun artması için eleman sayısının artırılması gerektiği sonucuna ulaşmıştır.

Attealmanan ve Ali [8], sonlu elemanlar ile dikdörtgen kirişin analizi çalışmasında dört noktali düzlem gerilme elemanını kullanıp, izoparametrik formülasyon kullanarak rijitlik matrisini elde etmiştir. Daha sonra yayılı yüke maruz basit mesnetli kirişi enine ikiye bölmüş boyuna ise 10, 12 ve 15'e bölerek Matlab ile kodladığı kendi programıyla çözümünü yapmıştır. Problemi aynı sonlu eleman ağları için SAP2000 ile de çözmüştür. Kiriş boyunca oluşan deplasman grafiklerini çizerek karşılaştırmıştır. Elde ettiği sonuçların SAP2000 ile uyumlu olduğu sonucuna varmıştır.

Rezaiee-Pajand vd. [9,10], düzlem yapıların analizi için birim uzama tabanlı formülasyonlar üzerine kaynak taraması yapmış, çalışmanın birinci bölümünde konu üzerine yapılan varsayımlar ve bu yöntemin temelleri tanıtılmıştır. İkinci bölümünde ise incelenen elemanların çeşitli problemlerin çözümünde kullanılması ve gösterdikleri performans sunulmuştur.

Sabah vd. [11], Öztoran'un [6] geliştirdiği dört noktali düzlem gerilme elemanı ve klasik kiriş eleman rijitlik matrisini kullanarak yüksek yapıların statik analizi için bir bilgisayar programı kodlamıştır. Çalışmasında yüksek yapıların analiz sonuçları SAP2000 programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçların uyum içinde olduğu sonucuna varılmıştır.

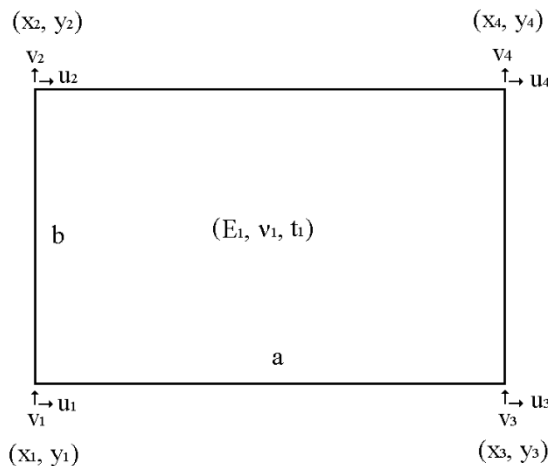
Li vd. [12], çalışmasında Hellinger-Reissner varyasyonal prensibine bağlı olarak sekiz noktali düzlem hibrit eleman geliştirmiş ve yapı mekaniği problemlerine uygulamıştır. Geliştirdiği düzlem elemanın çeşitli yaygın kesme kilitleme davranışlarının üstesinden geldiği sonucuna varmıştır. Sekiz noktali elemanın makul ağ şekli çeşitli eğri kenarlı eğilme problemlerin detaylı analizinde kullanılabileceğini ve sayısal doğruluğun iyileştiğini göstermiştir.

Yukarıda, dikdörtgen düzlem gerilme sonlu elemanına ilişkin kısa bir tarihçe sunulmuş ve bu alanda daha önce gerçekleştirilen bazı çalışmalar özetlenmiştir. Bu alanda birçok çalışma yapılmasına rağmen hala dikdörtgen düzlem gerilme sonlu elemanının incelenmesine yönelik yeteri kadar bir çalışma yapılmamıştır. Bu çalışmada, yerel koordinat sisteminde rijitlik matrisinin analitik türetilişi detaylandırılmış ve elde edilen rijitlik matrisi kullanılarak, serbest ucunda tekil yük bulunan uzun ve kısa konsol kiriş problemleri, perde duvarı ve küp yarma deneyi problemleri çözülmüş ve sonuçlar kendi içinde eleman bazında değerlendirilmiştir.

2. Materyal ve Metot

2.1 Rijitlik matrisinin oluşturulma işlemlerinde izlenen yol

Dikdörtgen düzlem gerilme sonlu elemanının rijitlik matrisinin çıkarılışı aşağıda detaylı halde verilmektedir. Şekil 2'de, çalışmanın konusu olan dikdörtgen düzlem gerilme elemanının yerel koordinatlarında geometrisi ve malzeme bilgileri verilmiştir. Elemanın düğüm noktaları numaralandırılmış olup, her noktada iki serbestlik derecesine sahip olup, hem "x" yönünde hem de "y" yönünde numaralandırılmış bilinmeyen deplasmanlar mevcuttur. Elemanın Elastisite Modülü "E", Poisson oranı "ν" ve kalınlığı ise "t" dir.



Şekil 2. Dikdörtgen düzlem gerilme elemanı ve parametreleri

Rijitlik matrisinin çıkarılmasında aşağıda verilen yol izlenmiştir. Eleman üzerinde çözümü aranmakta olan sınır değer diferansiyel denkleminin çözüm fonksiyonu için baz polinomları (P_u (d.1) ve P_v (d.2)) Pascal üçgeninden alınmış olup, diğer araştırmacıların kullandığı ile aynıdır [4, 13]. Baz polinomlarının katsayıları bilinmeyen olarak " a_i " ile temsil edilmiştir (d.3). Baz polinomları ile " a_i " vektörünün çarpımı eleman için çözümü aranan deplasmanların fonksiyonu olan " u " ve " v " leri temsil eder (d.4 ve d.5). Bu fonksiyonlar düzlem elemanın her bir düğüm noktası için elde edilebilir. 1 nolu düğümün " u " ve " v " deplasmanları " u_1 " ve " v_1 " olarak, " x " yerine " 0 " " y " yerine " 0 " konularak elde edilir (d.6 ve d.7). Aynı şekilde 4 nolu düğümün " u " ve " v " deplasmanları " u_4 " ve " v_4 ", " x " yerine " a " " y " yerine " b " konularak elde edilir (d.12 ve d.13). Diğer nokta deplasmanları ise benzer şekilde aşağıda elde edilmektedir (d.8, d.9, d.10, d.11).

$$P_u = \{1, x, y, xy, 0, 0, 0, 0\} \quad (d.1)$$

$$P_v = \{0, 0, 0, 0, 1, x, y, xy\} \quad (d.2)$$

$$a_i = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\} \quad (d.3)$$

$$u = P_u \cdot a_i^T = \{1, x, y, xy, 0, 0, 0, 0\} \cdot \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}^T \quad (d.4)$$

$$v = P_v \cdot a_i^T = \{0, 0, 0, 0, 1, x, y, xy\} \cdot \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}^T \quad (d.5)$$

1 nolu düğüm için $x_1=0$ ve $y_1=0$ değerleri, u ve v fonksiyonlarında yerine konursa u_1 ve v_1 değerleri elde edilir.

$$u_1 = \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \cdot \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}^T \quad (d.6)$$

$$v_1 = \{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0\} \cdot \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}^T \quad (d.7)$$

2 nolu düğüm için $x_2=0$ ve $y_2=b$ değerleri, u ve v fonksiyonlarında yerine konursa u_2 ve v_2 değerleri elde edilir.

$$u_2 = \{1, 0, b, 0, 0, 0, 0, 0\} \cdot \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}^T \quad (d.8)$$

$$v_2 = \{0, 0, 0, 0, 1, 0, b, 0\} \cdot \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}^T \quad (d.9)$$

3 nolu düğüm için $x_3=a$ ve $y_3=0$ değerleri, u ve v fonksiyonlarında yerine konursa u_3 ve v_3 değerleri elde edilir.

$$u_3 = \{1, a, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \cdot \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}^T \quad (d.10)$$

$$v_3 = \{0, 0, 0, 0, 1, a, 0, 0\} \cdot \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}^T \quad (d.11)$$

4 nolu düğüm için $x_4=a$ ve $y_4=b$ değerleri, u ve v fonksiyonlarında yerine konursa u_4 ve v_4 değerleri elde edilir.

$$u_4 = \{1, a, b, ab, 0, 0, 0, 0\} \cdot \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}^T \quad (d.12)$$

$$v_4 = \{0, 0, 0, 0, 1, a, b, ab\} \cdot \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}^T \quad (d.13)$$

Yukarıda elde edilen düğüm noktası deplasmanları toplu halde aşağıda verilen matris notasyonunda yazılır. Burada $\{de\}$ eleman düğüm deplasman vektörünü ve " a_i " ler bilinmeyen katsayılar vektörünü göstermekte olup, bunları birbirine bağlayan kare matris ise $[A]$ olarak tarif edilirse, $\{de\} = [A] \cdot \{a_i\}$ olarak ifade edilir. $\{a_i\}$ vektörünü elde etmek için her iki taraf $[A]$ ile bölünür. Cebirsel işlemlerde böyle ifade edilse de, matrislerde bölüm olmadığı için her iki taraf $[A]$ matrisinin tersi ile çarpılır. Bu ifadede $\{a_i\} = [A]^{-1} \cdot \{de\}$, bilinmeyen katsayılar matrisi eleman düğüm deplasmanları cinsinden elde edilir.

$$\{de\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & a.b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & a.b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix}$$

İkinci aşamada şekil değiştirmeler ve düğüm deplasmanları arasındaki bağıntılar kullanılır. Düzlem eleman için birim deformasyon ve deplasman fonksiyonları arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibi verilmektedir [14, 15].

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} du/dx \\ dv/dy \\ du/dy + dv/dx \end{bmatrix}$$

Şekil değiştirme ve deplasman fonksiyonları arasındaki bağıntılar deplasman fonksiyonlarının türevlerini içermektedir. Yukarıda polinom olarak seçilen deplasman fonksiyonları olan “ u ” ve “ v ” nin ilgili türevleri birim deformasyon bağıntılarında yerine konulur. Birim deformasyonlar baz polinomları ve “ a_i ” katsayıları cinsinden matris formunda aşağıdaki hali alır.

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix}$$

Bilinmeyen “ a_i ” katsayılarının birim deformasyona bağlayan matris [C] olarak tarif edilsin. Birim deformasyon ifadesi $\{\varepsilon\}=[C].\{a_i\}$ halini alır, $\{a_i\}$ bilinmeyen katsayılar vektörü daha önce düğüm deplasmanları cinsinden $\{a_i\}=[A]^{-1}.\{de\}$ ifade edilmiştir. Birim deformasyon ifadesinde yerine konulursa, birim deformasyon ifadesi düğüm deplasmanları cinsinden $\{\varepsilon\}=[C].[A]^{-1}.\{de\}$ olarak elde edilir. Burada, $[B]=[C].[A]^{-1}$ tarifi yapılmış, birim deformasyonlar $\{\varepsilon\}=[B].\{de\}$ şeklinde düğüm deplasmanlarına bağlanmış olur. [B] matrisine, birim deformasyon matrisi de denilir. [B] matrisi aşağıda açık olarak verilmiştir.

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} \\ -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & -\frac{y}{ab} & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} \end{bmatrix}$$

Üçüncü aşamada ise şekil değiştirme ve gerilme arasındaki ilişkiler kullanılarak, gerilme değerleri eleman uç deplasmanları cinsinden elde edilir. Düzlem gerilme hali için, gerilme-şekil değiştirme ilişkisinin ifadesi aşağıdaki gibi verilmektedir [14, 16].

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Bu ifade kapalı olarak $\{\sigma\}=[D].\{\varepsilon\}$ şeklinde yazılabilir. Burada [D] matrisi malzeme ile ilgili katsayılar matrisi olup, E elastisite modülü, ν ise Poisson oranıdır. Birim deformasyonları düğüm deplasmanlarına bağlayan ifade $\{\varepsilon\}=[B].\{de\}$ idi. Şekil değiştirme $\{\varepsilon\}$ ifadesi gerilme ifadesinde yerine konulursa, $\{\sigma\}=[D].[B].\{de\}$ gerilmeyi birim deformasyona bağlayan ifade elde edilir.

Dördüncü aşamada eleman rijitlik matrisinin ve yük vektörünün elde edilmesi için, virtüel iş veya minimum potansiyel enerji yöntemlerinden biri kullanılarak rijitlik matrisinin ifadesi aşağıdaki gibi elde edilebilir [14, 17]. Minimum potansiyel enerji yöntemi sistemin toplam enerjisinin minimum olduğunu ifade eder. Burada, dış kuvvetler $\{Q\}$ ve onlara ait deplasmanlar $\{d_e\}$ vektörü ile gösterilirse; “ W ” dış kuvvetlerin işi (d.14) ve “ U ” iç kuvvetlerin işi olmak üzere (d.15) potansiyel enerji “ π ” aşağıda verilmektedir (d.16).

$$W = \{Q\} \cdot \{de\}^T \quad (d.14)$$

$$U = \int_V \{\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma\} \cdot dV \quad (d.15)$$

$$\pi = W - U = \min \quad (d.16)$$

Yukarıda bulunan gerilme ve deformasyon bağıntıları yerine konar ve matris notasyonuna göre yeniden düzenlenirse iç kuvvetlerin işi “ U ” ve potansiyel enerji “ π ” aşağıdaki gibi elde edilir (d.17 ve d.18);

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{B\}^T \{D\} \cdot \{B\} \cdot \{d_e\}^2 \cdot dV \quad (d.17)$$

$$\pi = \{Q\} \cdot \{de\}^T - U = \frac{1}{2} \int_V \{B\}^T \{D\} \cdot \{B\} \cdot \{d_e\}^2 \cdot dV \quad (d.18)$$

Burada potansiyel enerji (π) deplasmanların fonksiyonudur. (π) fonksiyonunun minimum olması bağlı olduğu deplasmanlara göre türevinin sıfır olmasını gerektirir. (π) fonksiyonunun $\{de\}$ ye göre türevinin sıfıra eşitlenmesi sonucunda (d.19) elde edilir.

$$\{Q\} = \int_V \{B\}^T \cdot \{D\} \cdot \{B\} \cdot \{d_e\} \quad (d.19)$$

Burada, (d.20) tarifi yapılırsa, $[K]$ rijitlik matrisi olarak (d.21) de verildiği gibi bulunur.

$$\{Q\} = [K] \cdot \{de\} \quad (d.20)$$

$$[K] = \int_V \{B\}^T \cdot \{D\} \cdot \{B\} \cdot dV \quad (d.21)$$

Burada integral hacim integrali olduğundan üç katlı integrali temsil eder. $[K]$ aşağıdaki gibi yazılabilir (d.22).

$$[K] = \int_0^t \int_0^a \int_0^b \{B\}^T \cdot \{D\} \cdot \{B\} dx dy dz \quad (d.22)$$

Düzlem eleman kalınlığı “ t ” olduğundan, z ye göre integral sonucu (d.22) aşağıdaki hali alır (d.23);

$$[K] = t \int_0^a \int_0^b \{B\}^T \cdot \{D\} \cdot \{B\} dx dy \quad (d.23)$$

Yukarıda $[B]$ matrisi, $[D]$ matrisi, “ a ” ve “ b ” değerleri verilmiştir. $[B]$ birim deformasyon matrisi “ x ” ve “ y ” nin fonksiyonudur. Bu değerler integral içinde yerine konar matris çarpımları yerine getirilir ve belirli integraller alınarak $[K]$ matrisinin elemanları tespit edilmiş olur. Bu yol haritası izlendiğinde $[B]$ ve $[D]$ matrisi yukarıda açık olarak verildiğinden $[K]$ matrisinin elde edilmesi oldukça kolaydır.

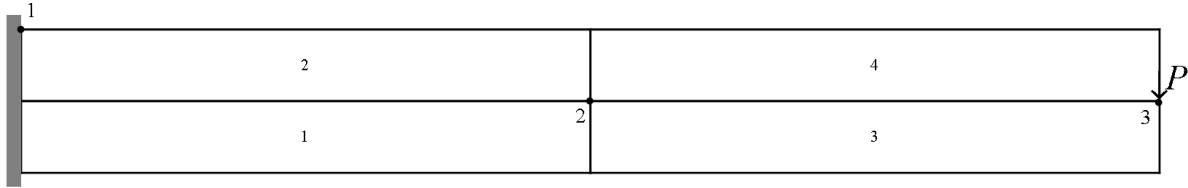
Yukarıda verilen eleman rijitlik matrisi kullanılarak Mathematica ortamında bir bilgisayar programı kodlanmıştır. Problemin sınır şartı bilgileri, serbestlik dereceleri, mesnetleri uygun olarak tarif edilmektedir. Tekil kuvvetlerin düğüm noktalarına etkidiği düşünülecek sonlu eleman ağı tesis edilmektedir. Sonlu eleman ağını oluşturan elemanların köşe düğüm koordinatları girilmektedir. Elemanların hangi düğüm noktalarına bağlı olduğu tarif edilmektedir. Elemanlara ait malzeme bilgileri (E ve ν) ayrı ayrı tanımlanmaktadır. Bu veriler program tarafından kullanılarak, her bir elemanın rijitlik matrisi hesaplanmakta, kodlama tekniği yöntemi ile probleme ait ana rijitlik matrisi oluşturulmaktadır. Düğüm noktalarına etkiyen tekil kuvvetler yardımı ile sisteme ait ana yük vektörü belirlenmektedir. Esas rijitlik matrisi ve yük vektörünün oluşturduğu lineer denklem takımı gauss-eliminasyon yöntemi ile çözülmektedir. Çözüm sonucunda düğümlere ait “ x ” ve “ y ” yönündeki deplasmanlar elde edilmektedir. Her bir elemana ait gerilme matrisi eleman bilgileri kullanılarak oluşturulduktan sonra, eleman uçlarında bulunan deplasmanlar daha önce çözülen deplasmanlar arasından süzülerek alınıp, elemana ait gerilme matrisiyle çarpılmaktadır ($\sigma = [D] \cdot [B] d_e$). Bu çarpım sonucu eleman üzerinde geçerli olan gerilme değerleri “ x ” ve “ y ” cinsinden elde edilmektedir. Gerilme fonksiyonlarında eleman üzerindeki herhangi bir noktada gerilmeleri hesaplamak da mümkündür. “ x ” ve “ y ” yerine eleman düğüm noktası koordinatları girildiğinde düğümde oluşan gerilmeler hesaplanabilmektedir. Program kullanılarak aşağıda verilen problemler çözülmüştür.

3. Bulgular ve Tartışma

Bu kısımda yukarıda belirtildiği üzere kodlanmış bilgisayar programıyla çeşitli örnek problemler çözülerek elde edilen veriler değerlendirilerek tartışılmıştır.

3.1 Serbest ucunda tekil yük bulunan uzun konsol kiriş

Serbest uçundan tekil yük yüklü konsol kiriş örneği ele alınmıştır (Şekil 3). Basit eğilmeyi temsil açısından konsol boyu uzun seçilmiş olup $L=8m$ alınmıştır. Kesit yüksekliği " h " ve kesit genişliği " b " (düzlem eleman kalınlığı t) ise "1" alınmıştır. Malzeme elastisite modülü 100000 ton/m^2 alınmıştır. P tekil yükü "1" ton ve Poisson oranı sıfır alınmıştır. Kiriş eksen kesit ağırlık merkezinde olup, kesit yüksekliğinin ortasındadır. Problem çeşitli bölme sayıları için çözülmüş olup, aşağıdaki Tablo 1'de çözüm sonuçlarından bazı değerler sunulmuştur. P yükünün uygulandığı noktada (3 nolu nokta) düşey deplasman değeri verilmiştir. Ayrıca, konsol mesnette kesit üst yüzeyinde (1 nolu nokta) oluşan maksimum çekme gerilme değeri verilmiştir. İlaveten kesit ekseninde konsol (2 nolu nokta) hesaplanan kayma gerilmesi değerleri sunulmuştur.

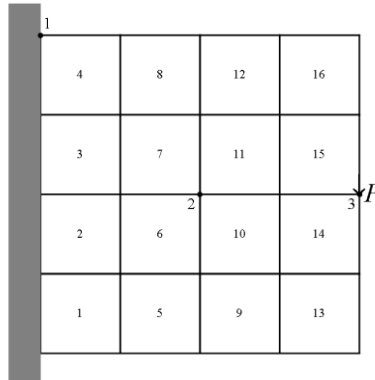


Şekil 3. Serbest uçundan tekil yük uygulanan konsol kiriş ve seçilen noktalar

Tablo 1 incelendiğinde, çözüm no 1-8 için " y " eksenini 2 ye bölünmüş fakat " x " eksenini 2 den 1024 de kadar bölünerek çözüm tekrarlanmıştır. Bu çözümlerin sonunda " x " eksenini bölünme sayısı arttıkça uç deplasman değeri kesin sonuca yaklaşmıştır. Kayma gerilmesi ise başarılı bulunmamıştır. Çekme gerilmesi ise kesin sonuca yaklaşmıştır. Çözüm no 9-16 için " y " eksenini 4'e bölünmüş fakat " x " eksenini 2 den 1024 de kadar bölünerek çözüm tekrarlanmıştır. Bu çözümlerin sonunda x eksenini bölünme sayısı arttıkça uç deplasman değeri kesin sonuca yaklaşmıştır. Kayma gerilmesi ise başarılı bulunmamıştır. Çekme gerilmesi ise kesin sonuca yaklaşmıştır. Benzer durum " y " eksenini 8 ve 16 ya bölünüp, " x " eksenini 2 den 1024 e kadar bölündüğünde deplasman değeri kesin sonuç binde bir hata ile hesaplanmıştır. Kayma gerilmesi ise kesin sonuca çok yaklaşmıştır. Çekme gerilmesi değeri ise %4 hata ile hesaplanmıştır. Tablo 1'den yapılan gözlemlere göre, x ekseninde bölme sayısını artırmak çekme gerilmesi ve düşey deplasman değerini doğru sonuca yaklaştırmakta olup, kayma gerilmesini de önemli miktarda etkilemektedir. " y " eksenindeki bölme sayısının artması hem düşey deplasman değerini hem de maksimum çekme gerilmesi değerini ihmal edilecek derecede etkilemektedir. Buna karşın " y " eksenindeki bölme sayısının artması çalışılan düzlem gerilme sonlu elemanın kayma gerilmesi performansını artırmaktadır. " y " ekseninin 16 ve x eksenini ise 8192 ye bölündüğünde kayma gerilmesi değeri kesin sonuca eşitlenmektedir.

3.2 Serbest ucunda tekil yük bulunan kısa konsol kiriş

Düzlem gerilme sonlu elemanın kesme etkilerinin arttığı kısa konsol probleminde göstereceği performansı değerlendirmek amacıyla kenar uzunlukları eşit olan konsol problemi ele alınmıştır. Kısa konsol problemi Şekil 4'te sunulmuş olup, malzeme özellikleri, kalınlığı ve P yükü problem 1 deki ile aynıdır. Konsolun boyu 1 metre alınmıştır. Çeşitli sonlu eleman ağları için 2×2 den başlayıp, 128×128 sonlu eleman ağı için çözüm yapılmıştır. Çözüm sonucu elde edilen maksimum çekme gerilmesi (nokta 1), maksimum kayma gerilmesi (nokta 2) ve maksimum düşey deplasman (nokta 3) değerleri, Tablo 2'de sunulmuştur.



Şekil 4. Serbest uçundan tekil yük uygulanan kısa konsol kiriş ve seçilen noktalar

Tablo 1: Farklı ağ sayıları için konsolda seçilen noktalarda gerilme ve deplasman değerleri

Çözüm No	X eksen Bölme S.	Y eksen Bölme S.	Nokta 1 σ max	Nokta 2 τ max	Nokta 3 δ max
1	2	2	4.00	3.67	-0.002293
2	4	2	14.00	6.99	-0.006881
3	8	2	30.00	7.99	-0.013762
4	16	2	41.33	6.00	-0.018350
5	32	2	45.81	3.82	-0.020019
6	64	2	47.25	2.46	-0.020485
7	128	2	47.72	1.74	-0.020608
8	1024		47.97	1.09	-0.020645
9	2	4	4.00	3.73	-0.002294
10	4	4	14.01	7.11	-0.006883
11	8	4	30.07	8.24	-0.013771
12	16	4	41.57	6.33	-0.018367
13	32	4	46.29	4.18	-0.020041
14	64	4	47.93	2.83	-0.020509
15	128	4	48.53	2.11	-0.020630
16	1024	4	48.92	1.47	-0.020670
17	2	8	4.00	3.74	-0.002294
18	4	8	14.01	7.14	-0.006884
19	8	8	30.10	8.31	-0.013775
20	16	8	41.66	6.42	-0.018373
21	32	8	46.47	4.27	-0.020048
22	64	8	48.24	2.93	-0.020518
23	128	8	48.98	2.21	-0.020640
24	1024	8	49.52	1.56	-0.020681
25	2048	8	49.56	1.52	0.020682
26	4096	8	49.58	1.49	-0.020682
27	2	16	4.00	3.74	-0.002294
28	4	16	14.01	7.15	-0.006884
29	8	16	30.10	8.32	-0.013775
30	16	16	41.68	6.44	-0.018375
31	32	16	46.53	4.29	-0.020050
32	64	16	48.37	2.95	-0.020521
33	128	16	49.19	2.23	-0.020644
34	1024	16	49.94	1.58	-0.020687
35	4096	16	50.03	1.52	-0.020688
36	8192	16	50.04	1.50	-0.020688
Basit Eğilme	-	-	48.00	1.50	0.020480
Timeshenko	-	-	48.00	1.50	0.020672

Tablo 2’de verilen değerler incelendiğinde, maksimum çekme gerilmesinin teorik olarak hesaplanan değerden oldukça farklı olduğu görülmüştür. Sonlu eleman ağının artmasıyla çekme gerilmesi değeri teorik değerden fazla bulunmuştur. Maksimum kayma gerilmesi değeri ise benzer şekilde oldukça farklı çıkmış olup, fazla bölme sonucunda teorik değer altında çıkmıştır. Maksimum düşey deplasman değerlerinin ise Timeshenko’nun verdiği değerden daha fazla bulunmuştur. Kullanılan dört noktalı düzlem gerilme sonlu elemanın performansı kesme etkilerinin arttığı kısa konsolda düşük bulunmuştur.

Tablo 2: Kısa konsol problemi için seçilen noktalarda elde gerilme ve deplasman değerleri

Çözüm No	Bölme S.	Nokta 1 σ max	Nokta 2 τ max	Nokta 3 δ max
1	2×2	4.00	1.75	-0.0000568627
2	4×4	5.56	1.48	-0.0000662876
3	8×8	6.58	1.50	-0.0000723423
4	16×16	7.28	1.43	-0.0000772191
5	32×32	7.80	1.38	-0.0000817539
6	64×64	8.21	1.36	-0.0000861993
Basit Eğilme	-	6.00	1.500	-0.0000400000
Timeshenko	-	6.00	1.500	-0.0000640000

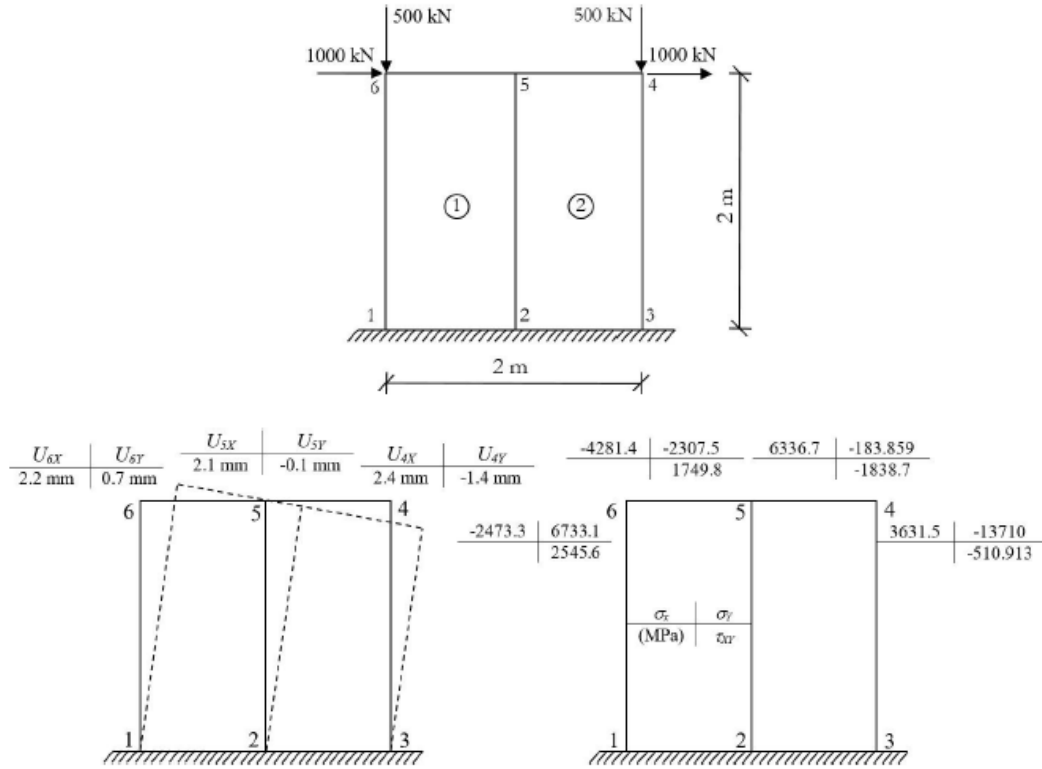
Performansı artırmak amacıyla serbest uca etkiyen P düşey yükü parabolik olarak yükün bulunduğu yüzeye dağıtılarak çözümler tekrarlanmıştır. Tablo 3’te sunulan parabolik dağılım sonuçları incelendiğinde, deplasman değerlerinin Timeshenko’nun [18] sonuçlarına çok yakın olduğu görülebilir. Ayrıca kayma gerilmesi performansı da çok iyi hale gelmiş olup, 64×64 bölme için kesin değere eşitlenmiştir. Çekme gerilmesinde ise iyileşme görülmemiştir.

Tablo 3: Kısa konsolda yükün parabolik dağılımının seçilen noktalarda gerilme ve deplasman değerlerine etkisi

Çözüm No	Bölme S.	Nokta 1 σ max	Nokta 2 τ max	Nokta 3 δ max
1	2×2	3	1.30	-0.0000426471
2	4×4	5.21	1.52	-0.0000573471
3	8×8	6.47	1.58	-0.0000619453
4	16×16	7.25	1.55	-0.0000631946
5	32×32	7.80	1.52	-0.0000635170
6	64×64	8.20	1.50	-0.0000635987
Basit Eğilme	-	6.00	1.500	-0.0000400000
Timeshenko	-	6.00	1.500	-0.0000640000

3.3 Perde duvar örneği

Ergun ve Ateş [13], dikdörtgen sonlu elemanlar kullanarak matris yer değiştirme yöntemi ile bir perde duvarının gerilme ve deplasman analizi için eleman rijitlik matrisini elde etmiştir. Çalışmalarında aşağıda Şekil 5’te verilen perde duvarının iki eleman ile analizini yapmış olup, elde ettikleri sonuçları şekil üzerinde sunmuşlar. Kullanılan malzemeye ait Elastisite Modülü 2.1×10^7 kN/m², Poisson oranı 0.2’dir. Perde kalınlığı 20 cm, perde duvarın uzun kenarı 2 m kısa kenarı 1 m dir.



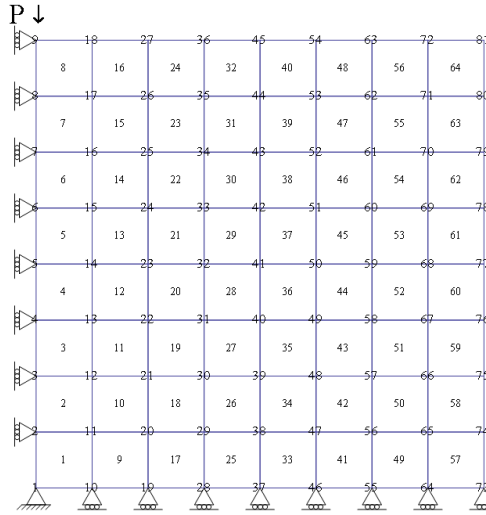
Şekil 5. Perde duvar problemi [13]

Aynı problem bu çalışmada tekrar ele alınmıştır. Aynı sayıda eleman kullanılarak gerilme ve deplasman çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen değerler Ergun ve Ateş [13]'in çalışması ile tam olarak örtüşmüştür. Aynı deformasyon şekli elde edilmiştir. Sayısal veriler burada tekrar verilmemiştir. Yazarların şekillerinde bulunan değerler elde edilmiştir.

Burada tartışılması gereken konu iki elemanla perde duvarının analizin yapılmasında bulunan sakıncalardır. Bu problemi çok sayıda elemana bölerek yapılacak çözümün daha iyi sonuç vereceği düşünüldüğünden. Mevcut çalışmada perde duvarı x yönünde 32 ve y yönünde ise 32 elemana bölünerek fazladan çözülmüştür. Şekilde görülen 5 nolu noktada perde duvarın orta üst noktasında hesaplanan "x" yönündeki deplasman 3.02 mm olup, kaynakta 2.10 mm olarak verilmiştir. "x" ve "y" yönündeki normal gerilme değerleri 6526.46 ve 210.54 MPa olup, kayma gerilmesi ise 1218.66 MPa dır. Bu değerler kaynakta sırasıyla 6336.7, 183.85 ve 1838.7 MPa dır. Verilen değerler arasında anlamlı fark bulunmaktadır. Daha fazla eleman ile çözüm yapıldığında kesin sonuca yaklaşılmaktadır.

3.4 Küp yarma deneyi yüklemesi sonucu oluşacak gerilmelerin hesabı

Küp yarma deneyini temsil eden problemin sonlu eleman ağı aşağıda Şekil 6'da verilmiştir. Küp yarma problemi simetrik olduğundan burada küpün çeyrek kısmı alınmış, mesnetlenme durumu buna göre ayarlanmıştır. Küp ortasını temsil eden "x" ve "y" eksenlerinde kayıcı mesnetler konulmuştur. Çeyrek küpün bir kenarı 7.5 cm olarak alınmış olup, elastisite modülü 10000 MPa, poisson oranı sıfır alınmıştır. P yükü 5 ton dur. Şekil 6'da köşede bulunan sabit mesnetin düğüm noktası küpün ortasını temsil etmektedir. Bu noktada hesaplanan gerilme değerleri Tablo 3'te sunulmuştur. Mevcut problem x ve y yönünde çeşitli eşit uzunlukta bölmeler yapılarak çözüm yapılmıştır.



Şekil 6. Beton Küp yarma deneyinin düzlem gerilme sonlu eleman ağı, sınır koşulları ve yükleme halini

Tablo 4'te verilen küp ortasında oluşan maksimum yarma çekme gerilmesi değerleri incelendiğinde, elde edilen çözümün eleman sayısı arttıkça kesin sonuca doğru yaklaştığı anlaşılmaktadır. Kesin değer ise elastisite formülünden [18, 19] elde edilmiştir. Çeyrek küpün 64×64 elemana bölünmesi ile %1 hata ile yarma dayanımı hesaplanmaktadır.

Tablo 4: Küp yarma deneyi sonucu oluşan yarma dayanımı (MPa)

Bölme Sayısı	Gerilme
4×4	2.598
8×8	2.731
16×16	2.782
32×32	2.796
64×64	2.800
Kesin	2.829

4. Sonuç

Çalışmada dikdörtgen düzlem gerilme sonlu elemanının rijitlik matrisi elde edilmiştir. Elde edilen rijitlik matrisi kullanılarak çeşitli düzlem gerilme elemanı problemleri çözülmüştür. Uzun konsol kiriş probleminin çözümünden, "x" eksen (uygulanan yüke dik eksen) yönündeki bölme sayısı arttıkça deplasman değeri ve çekme gerilmesi değerleri iyileşmiştir. Uygulanan yüke paralel olan "y" eksenindeki bölme sayısının artması ise kayma gerilmesi değerini iyileştirmektedir. Kısa konsol probleminin çözümünde de aynı sonuçlara ulaşılmıştır. Kısa konsolda ise daha verimli bir sonuç elde edilmesinde serbest uca etkiyen yükün parabolik olarak dağıtılmasının önemli bir rolü olmuştur. Küp yarma deneyini temsil eden problemde gerilme değerinin düzlem gerilme sonlu elemanı kullanılarak hesap edilebileceği anlaşılmıştır.

Kaynakça

- [1] Logan, DL, 2007, A first course in the finite element method, Thomson Canada Limited, USA, ISBN: 0-534-55298-6.
- [2] Clough, RW, "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis", Proc. 2nd ASCE Conf. On Electronic Computation, Pittsburg, Pa. Sept. 1960.
- [3] Clough, RW, Wilson, EL, Early Finite Element Research at Berkeley, Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics, Aug. 4-6, 1999.
- [4] Atiş CD, 1991, Eğrisel kabuk yapılar, katlanmış plak ve kutu kesitli kirişlerin bilgisayar yardımı ile çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği, Adana, Türkiye.

- [5] Cünedioğlu, Y, 1997, Sonlu elemanlar yönteminin düzlemsel gerilme analizine uygulanması, Yüksek Lisans Tezi, Niğde Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği, Niğde, Türkiye.
- [6] Öztörün, NK, 2006, A rectangular finite element formulation, *Finite Elements in Analysis and Design*, 42 (2006) 1031 – 1052.
- [7] Gazi, H, 2008, Sonlu elemanlar yöntemi ile çalışan bir bilgisayar programının geliştirilmesi ve düzlem gerilme-düzlem deformasyon problemlerinin analizi, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği, İstanbul, Türkiye.
- [8] Attelmenan, AAA, Ali, AHM, Finite element analysis of rectangular beams, 2019, *FES Journal of Engineering Sciences*, (8) 1, 1,7.
- [9] Rezaiee-Pajand_M., , Gharaei-Moghaddam, N, and Ramezani, M., 2021a, Review of the strain-based formulation for analysis of plane structures, Part I: Formulation of basics and the existing elements, *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization* 11 (2), 437-483.
- [10] Rezaiee-Pajand_M., Gharaei-Moghaddam, N., and Ramezani, M., 2021b, Review of the strain-based formulation for analysis of plane structures, Part II: Evaluation of the numerical performance, *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization* 11 (2), 437-483.
- [11] Sabah R, Oztörün NK, Sayin B, 2022, Development of YAY2020, an FEA program with full-size stiffness matrix for static analysis of high-rise buildings: A comparison with SAP2000, *Case Studies in Construction Materials*, 7-e01576.
- [12] Li, H, Wang, W, Shen, Q, Yao, L, 2024, An 8-Node Plane Hybrid Element for Structural Mechanics Problems Based on the Hellinger-Reissner Variational Principle, *Computer Modelling in Engineering and Sciences*, 138 (2) 1277-1299.
- [13] Ergun, M, Ateş, Ş, 2021, The stress analysis of a shear wall with matrix displacement method using rectangular finite element, *Journal of Structural Engineering & Applied Mechanics*, (4) 1, 18-27. Golden Light Pub., <https://doi.org/10.31462/jseam.2021.01018027>.
- [14] Zienkiewicz, OC, Taylor, RL, 2000, *The finite element method*, Butterworth-Heinemann, ISBN-0-7506-5049-4.
- [15] Nath, B, 1993, Mühendisler için sonlu elemanlar metodunun temelleri, Çeviren. Durmuş Günay, Sakarya Üniversitesi yayınları, Sayı 003, Türkiye.
- [16] Hutton, DV, 2004, *Fundamentals of finite element method*, McGrawHill, USA, ISBN 0-07-239536-2.
- [17] Reddy, JN, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC Press, Boca Raton, FL, Second Edition, (2004).
- [18] Timoshenko, S, Goodier, JN, 1951, *Theory of Elasticity*, McGrawHill, London.
- [19] Tugal, M, Arıcı, E, 2011, Betonun yarma dayanımında geometrik şeklin etkisinin incelenmesi, *e-Journal of New World Sciences*, (6) 4, 1086-1092, 1A0218.