

## Karmaşık Yayınım İmge Gürültü Azaltma

Bekir Dizdaroğlu\*

\*1 Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, TRABZON

(Alınış / Received: 19.12.2017, Kabul / Accepted: 19.03.2018, Online Yayınlanma / Published Online: 30.04.2018)

### Anahtar Kelimeler

Gürültü azaltma, karmaşık yayılım, ısı denklemi, Perona-Malik yaklaşımı, düzenleme ve uygunluk terimleri, Lagrange çarpanı

**Öz:** Bu çalışmada girdi imgesindeki Gauss gürültüsünün giderilmesi için iyileştirilmiş karmaşık yayılım yaklaşımları önerilmiştir. Karmaşık yayımda gerçel kısım alçak geçiren süzgeç davranışı gösterirken, sanal kısım ise yüksek geçiren süzgeç davranışı göstermektedir. Böylece imgedeki gürültüyü gerçel kısımdaki süzgeç azaltırken imgenin yapı bilgisi sanal kısımdaki süzgeçle korunmaktadır. Önerilen yöntemlerde, doğrusal yayılımı dikkate alan ve yönden bağımsız olarak çalışan ısı denkleminde ve doğrusal olmayan yayılımı göz önüne alan Perona-Malik yaklaşımında düzenleme terimine ek olarak uygunluk terimi de kullanılmıştır. Uygunluk terimi sonuç imgesinin yapı bilgisini daha iyi korumuştur. Diğer yandan gürültü standart sapması yarı otomatik olarak kestirilmiş, uygunluk terimindeki Lagrange çarpanı da her iterasyonda optimize edilmiş ve böylece karmaşık yayılım yaklaşımlarıyla girdi imgesindeki toplamsal gürültü azaltma başarımı iyileştirilmiştir. Önerilen yöntemlerdeki bu başarımlar, gürültü standart sapmasının fazla yüksek olmadığı durumlarda, hem nitel hem de nicel sonuçlarla desteklenmiştir.

## Image Noise Reduction via Complex Diffusion

### Keywords

Noise reduction, complex diffusion, heat equation, Perona-Malik approach, regularization and fidelity terms, Lagrange multiplier

**Abstract:** In this study, improved complex diffusion approaches are proposed for eliminating Gaussian noise in the input image. In the complex diffusion, meanwhile, the real component behaves as a low pass filter and the imaginary component behaves as a high pass filter. Thus, while the filter in the real component reduces the noise in the image, the filter in the imaginary component protects the structure information of the image. In the proposed methods, the fidelity term is used in the heat equation approach, where the linear diffusion is taken into account and operations is isotopically performed, and in the Perona-Malik approach, where the nonlinear diffusion is considered, addition to the regularization term. The fidelity term better preserves the structure information of the resulting image. On the other hand, the noise standard deviation is semi-automatically estimated, the Lagrange multiplier in the fidelity term is also optimized in each iteration and thus the additive noise reduction performance in the input image is improved via complex diffusion approaches. This performance in the proposed methods is supported by both qualitative and quantitative results when the noise standard deviation is not too high.

bekir@ktu.edu.tr

### 1. Giriş

İmgelerde bozulma etkisi olarak ortaya çıkan gürültülerin giderilmesi için literatürde kısmi diferansiyel denklem tabanlı birçok çalışma yer almaktadır. Bu çalışmalar yerel, yarı yerel ve yerel olmayan yaklaşımlar olarak üç ana başlık altında toplanabilir. Yerel yaklaşımlar, yeğinlik değişiminin hemen hemen hiç olmadığı türdeş bir bölgede gürültülü pikseli yön bağımsız olarak onarmaya çalışır. Diğer taraftan, eğer kenar veya köşe gibi yeğinlik değişiminin olduğu türdeş olmayan bir bölgede onarma işlemi gerçekleştirilecekse, yapı bilgisini korumak için yön bağımlılık göz önüne alınır. Bu yaklaşımlarda değişimin yön bilgisi ve şiddeti yapı tensörüyle hesaplandıktan

sonra, yayılım tensörü, yön bilgisini değişimin şiddetine bağlı ağırlıklandırarak onarma işlemini gerçekleştirmektedir. Bu bağlamda türdeş bölgelerde yayılım tensörü birim matris olarak elde edilmektedir. Yön bağımlı yaklaşımlarda imgedeki yapı bilgisi çoğu durumda iyi bir şekilde korunabilmekte fakat doku bilgisi yok edilmektedir. İmgenin yapı bilgisi gürültü ve doku gibi salınım içermeyen yumuşatılmış bir bileşen olarak düşünülebilir ve bu türden imgelere karikatürler örnek olarak verilebilir. Diğer yandan doku ve gürültü, gerçek imgelerde her zaman karşımıza çıkmaktadır. Onarma işlemlerinde, imgelerdeki yapı bilgisinin yanında doku bilgisinin de korunması için yerel olmayan yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlarda, gürültülü piksel onarılırken, imgedeki doku bilgisinin yok edilmemesi için, arama bölgesindeki küçük boyutlu uygun parçaların içerisindeki verilerden yararlanılmaktadır. Yerel olmayan yaklaşımların tekrarlı olmayan imge yapılarında onarma işlemini tam olarak gerçekleştirememeleri bir dezavantaj olarak karşımıza çıkmaktadır [1]. Bu yüzden, bazı yarı yerel yaklaşımlarda, yapı bilgisi kısmi diferansiyel denklemlere dayalı olarak onarılırken doku bilgisi ise parça tabanlı yaklaşımlar dikkate alınarak korunabilmektedir [2]. Aşağıda, temel bazı gürültü azaltma yaklaşımlarından bahsedilecek ve bu bağlamda karmaşık yayılımın avantajlarının neler olabileceği üzerinde durulacaktır.

$I(x, y): \Omega \rightarrow \mathcal{R}$  iki boyutlu özgün bir imge,  $\partial\Omega$  imge sınırı olmak üzere,  $\Omega \subset \mathcal{R}^2$  bölgesinde tanımlı olsun, toplamsal Gauss gürültüsü bulaşmış imge  $f = I + \eta$  olarak gösterilsin ve işlenen veya sonuç imgesi ise,  $u|_{t=0} = f$  olmak üzere,  $u$  ile temsil edilsin. Burada  $\eta \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  ortalaması  $\mu = 0$  ve değişintisi  $\sigma^2$  olan normal dağılımlı gürültüdür.  $u_t = \frac{du}{dt}$ ,  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$  ve  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  sırasıyla adi ve kısmi türevleri gösterebilir. Gradyan vektörü,  $\nabla u = (u_x, u_y)$ , gradyan vektörün genliği,  $|\nabla u| = (u_x^2 + u_y^2)^{1/2}$  ve Laplace işleci ise,  $\Delta u = \text{div}(\nabla u) = u_{xx} + u_{yy}$  olarak verilsin.

Gauss gürültüsü elektronik devrelerdeki ısınmadan dolayı meydana gelir ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$p_X(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$  olarak verilir. Gauss gürültüsünün istatistiksel modelini çıkarmak için imgenin türdeş bölgelerindeki histogram dağılımına bakmak yeterli olacaktır. Bu bağlamda gürültünün ortalaması sıfır olduğundan standart sapmasının kestirilmesi onarma işlemleri açısından önemli bir adımı teşkil etmektedir:

$\sigma = \frac{1}{(m-2)(n-2)} \sqrt{\frac{\pi}{72} \int_{\Omega} f * \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}$ , burada  $m$  imge genişliği,  $n$  imge yüksekliği ve  $*$  ise katlama işlecidir [3].

Gauss süzgeci, alçak geçiren süzgeç davranışı göstermekte ve yerel olarak çalışmaktadır. Benzer şekilde, ısı denklemi [4],  $u_t = c(u_{xx} + u_{yy})$ ,  $c > 0$  doğrusal yayılım yapmakta, başka bir ifadeyle yön bağımsız olarak çalışmakta ve Gauss süzgeci gibi alçak geçiren süzgeç davranışı göstermektedir:  $G(x, y; t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-(x^2+y^2)/4t}$ ,  $\sigma = \sqrt{2t}$ . Bu süzgeçlerin dezavantajı, imgedeki salınımları yumuşatmalarına rağmen, imgenin yapı ve doku bilgisini koruyamamalarıdır. Dahası, iterasyon sonsuza gittiğinde, girdi imgesindeki yapı ve doku bilgisinden oldukça uzaklaşarak sabit bir sonuç imgesi elde edilmektedir.

Yerel olarak çalışan doğrusal olmayan yayıma Perona-Malik yaklaşımı,  $u_t = \text{div}(c(|\nabla u|)\nabla u)$ ,  $c(\cdot) > 0$  örnek olarak verilebilir [5]. Burada  $c(|\nabla u|) = (1 + (|\nabla u|/k_{PM})^2)^{-1}$ , gradyan vektörün genliğine bağlı olarak azalan bir fonksiyon şeklinde seçilmektedir. Bu yaklaşım, imgenin yapı bilgisini fazla bulanıklaştırmadan gürültüyü gidermeye çalışmaktadır. Fakat bu yaklaşımın sakıncaları arasında merdivenleşme etkisi ve ters yayılım vardır. Ters yayılımın ortaya çıkmasıyla,  $k$  sabit değerine bağlı olarak bazı durumlarda  $c(\cdot)$  fonksiyonunun negatif değer üretmesine ve dolayısıyla gürültünün azaltılmak yerine daha da belirgin hale getirilmesine olanak sağlanmaktadır. Kısacası bu durum istenmeyen bir etkidir.

Yön bağımlı yayımlarda, imgedeki yapı bilgisi fazla bulanıklaştırılmadan korunmaya çalışılmaktadır [6-7]. Burada, ilk önce girdi imgesine ait yapı tensörü oluşturulmaktadır. Çoğu durumda girdi imgesi gürültü içerdiğinden yumuşatılmış yapı tensörü dikkate alınmaktadır. Yapı tensörü, imgedeki her bir piksel için  $2 \times 2$ 'lik bir kare matris olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu simetrik ve yarı pozitif tanımlı matris,  $\lambda_1 \theta_1 \theta_1^T + \lambda_2 \theta_2 \theta_2^T$  olarak daha açık bir şekilde yazılabilir. Burada  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  değişimin şiddetini veren özdeğerleri ve  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  ise değişimin yönünü veren özdeğerlerle ilişkili birimdik özvektörleri göstermektedir. Bu tür yöntemlerde daha sonraki işlem adımında ise, yapı tensörüyle elde edilen özvektörlerinin özdeğerlere bağlı olarak ağırlıklandırılarak gürültülü pikseli onarmak için yayılım işlemi gerçekleştirilmektedir.

Yerel olmayan yayımlarda, gürültü azaltma işleminde, girdi imgesinin hem yapı bilgisi hem de doku bilgisi korunmaktadır. Bu bağlamda, arama bölgesindeki benzer imge parçalarının ortalaması hesaplanarak gürültü azaltma işlemi yapılmaktadır [8-9].

$u_G|_{t=0} = f$  ve  $u_S|_{t=0} = 0$  olmak üzere, girdi imgesi  $u = u_G + iu_S, i = \sqrt{-1}$  olarak güncellenirse, karmaşık yayılım, hem ısı denkleminde hem de Perona-Malik yaklaşımına kolayca uyarlanabilmekte ve böylece gürültüsü azaltılacak imgenin yapı bilgisi daha iyi bir şekilde korunabilmektedir. Örneğin ısı denkleminde, karmaşık yayılım katsayısı,  $c = e^{i\varphi} = c_G + ic_S = \cos \varphi + i \sin \varphi$  olarak alınabilir [10]. Burada kosinüs terimi  $c_G = \cos \varphi$ , gerçel kısmı temsil etmekte ve alçak geçiren süzgeç davranışı gösterdiğinden verilen imgedeki toplamsal gürültü etkili bir şekilde giderilmektedir. Diğer taraftan sanal kısmı temsil eden sinüs terimi,  $c_S = \sin \varphi$  ise yüksek geçiren süzgeç davranışı göstermekte ve imgedeki yapı bilgisinin çok fazla bozulmadan onarılmış imgeye aktarılmasını sağlamaktadır. Perona-Malik yönteminde ise, karmaşık yayılım katsayısı,  $c(u_S) = \frac{e^{i\varphi}}{1+(u_S/k_{PM}\varphi)^2}$  olarak alınmaktadır [10]. Karmaşık yayımdaki faz açısı parametresi, karmaşık yayılım katsayısının pozitif değerli elde edilmesi için  $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  olması gerekmektedir. Aksi durumda karmaşık yayılım katsayısı negatif değer üreteceğinden gürültü azaltma süzgeci ters yayılım gerçekleştirecektir. Karmaşık yayılım, ısı denkleminde doğrusal, başka bir ifadeyle yön bağımsız ve Perona-Malik yönteminde ise doğrusal olmayan bir yayılım üretmektedir [10].

Yukarıda açıklamaları yapılan süzgeçler, gürültü azaltma işleminde gri düzeyli imgelere kolayca uygulanabilmektedir. Ayrıca bu yöntemler, renkli imgelerdeki gürültüyü azaltmak için her bir renk kanalına ayrı olarak uygulanabilmektedir. İmge işlemede, özellikle kırmızı, mavi ve yeşil renk uzayında, renk kanalları birbirleriyle ilintili olduğundan bu kanallarının birbirinden bağımsız olarak işlenmesi bazı sakıncaları da ortaya çıkarmaktadır. Fakat bu sakıncalar çoğu durumda göz ardı edilebilmektedir. Ayrıca renkli imgelerde gürültü azaltma işlemleri için de literatürde bazı yöntemler geliştirilmiştir [7,11-12].

Bu çalışmada, girdi imgesindeki Gauss gürültüsünün azaltılması için karmaşık yayıma bağlı bazı yöntemler önerilmiştir. Kısmi diferansiyel tabanlı gürültü azaltma işleminde literatürde var olan bazı temel yöntemler için hem düzenleme terimi hem de uygunluk terimi göz önüne alınmış ve ayrıca uygunluk teriminin katsayısı, Lagrange çarpanı da her iterasyon sonunda güncellenerek yöntemlerde iyileştirme yapılmıştır.

## 2. Karmaşık Yayılım

Önerilen yöntemlerin daha iyi anlaşılabilmesi için, Bayes formülüne bağlı aşağıdaki ifade verilsin [13]:

$$P(u|f) = \frac{P(f|u)P(u)}{P(f)}. \quad (1)$$

Burada model terimi  $P(f|u)$  gözlemlenebilen olasılık yoğunluk fonksiyonudur ve veri biçimleme işlemini modellemektedir. Bu terim kısmi diferansiyel denklem tabanlı yaklaşımlarda uygunluk veya veri terimi olarak adlandırılmakta ve işlenen imgenin özgün imgeden fazlaca uzaklaşmamasını sağlamaktadır. Eğer özgün imgeye Gauss gürültüsü bulaşmışsa bu terimde  $L_2^2$  normu dikkate alınmaktadır. Çünkü Gauss gürültüsü, özgün imgenin bütün piksellerine bulaşmaktadır. Eğer gürültü özgün imgenin bazı piksellerine bulaşmış olsaydı, o zaman veri seyrekliğinin dikkate alındığı  $L_1$  normu kullanılabilirdi. Bu duruma tuz-biber gürültüsü örnek olarak verilebilir. Model terimi gürültü azaltma işlemlerinde göz önüne alınmaz ise, sonuç imgesindeki yapı bilgisi tam anlamıyla korunamamakta ve hatta iterasyon sonsuza giderken ( $t \rightarrow \infty$ ) sonuç imgesi sabit bir değer olarak elde edilmektedir.

Model terimi  $P(f|u)$  için aşağıdaki ifade dikkate alınmaktadır:

$$P(f|u) = \prod_{\Omega} k e^{-\frac{(u-f)^2}{2\sigma^2}} = (\prod_{\Omega} k) e^{-\sum_{\Omega} \frac{(u-f)^2}{2\sigma^2}} = c e^{-\sum_{\Omega} \frac{(u-f)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2)$$

burada  $c = \prod_{\Omega} k$  normalizasyon sabitidir.

Önsel terim  $P(u)$  ise, gürültülü imge  $f$ 'nin yumuşatılmış bir versiyonunu temsil etmektedir. Bu terimin modellenmesi için literatürde birçok gürültü azaltma yaklaşımı geliştirilmiştir.  $P(f)$  terimi ise sonuç imgesi  $u$ 'ya bağlı olmadığından gürültü azaltma işlemlerinde dikkate alınmaz. İşlenen imge  $u$ 'nun kestirimi maksimum sonsal ölçütüne (MAP) göre aşağıdaki gibi yapılmaktadır:

$$\underset{u}{\text{maks}} P(u|f) \leftrightarrow \underset{u}{\text{maks}} \{P(u)P(f|u)\} \leftrightarrow \underset{u}{\text{min}} \{-\log P(u) - \log P(f|u)\}. \quad (3)$$

Bu durumda, uygunluk terimi için aşağıda verilen enerji fonksiyonelinin minimize edilmesi gerekmektedir:

$$E(u) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\Omega} (u - f)^2. \quad (4)$$

Sürekli zamanlı imgeler için minimizasyon işlemi,

$$E(u) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_{\Omega} (u - f)^2 d\Omega, \quad (5)$$

denklemleri kullanılır. Minimize edilecek enerji fonksiyoneline uygunluk teriminin yanında düzenleme terimi de eklenirse aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$E(u) = R(u) + \lambda \int_{\Omega} (u - f)^2 d\Omega, \quad (6)$$

burada  $R(\cdot)$  düzenleme terimini temsil etmektedir. Bu terim, gürültü azaltma yaklaşımlarına bağlı olarak farklılık göstermektedir.  $\lambda$  Lagrange çarpanıdır ve düzenleme terimine göre her iterasyonda optimize edilmektedir.

Karmaşık yayımda, imgelerin hem gerçel hem de sanal kısımları dikkate alınmaktadır. Faz açısı parametresi  $\varphi$  küçük değerli olduğundan, başlangıç aşaması  $t = 0$ 'da, gerçel kısma gürültülü imge atanırken, sanal kısma ise sıfır değeri atanmaktadır. Bu bağlamda enerji fonksiyonelinin karmaşık düzlemde minimize edilmesi için aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$E(u_G + iu_S) = R(u_G + iu_S) + (\lambda_G + i\lambda_S) \int_{\Omega} (u_G + iu_S - f)^2 d\Omega. \quad (7)$$

## 2.1. Doğrusal Karmaşık Yayınım

Isı denklemi doğrusal yayılım yapmaktadır. Yumuşatma işlemi, ısı denklemi kullanıldığında, Denklem (6) aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega + \lambda \int_{\Omega} (u - f)^2 d\Omega. \quad (8)$$

Denklem (8), Neumann sınır şartları dikkate alınarak Euler-Lagrange eşitliğine bağlı çözümlenir:

$$\begin{cases} -(\Delta u + \lambda(f - u)) = 0, \Omega \text{ bölgesinde,} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, \partial\Omega \text{ imge sınırında.} \end{cases} \quad (9)$$

Burada  $\mathbf{n}$  imge sınırına dik birim vektördür. Denklem (9), iteratif yöntem olan bayır inişi yaklaşımına bağlı olarak yeniden düzenlenirse

$$u_t = \Delta u + \lambda(f - u), \quad (10)$$

elde edilir. Burada Lagrange çarpanı her iterasyonda  $\lambda = \frac{1}{\sigma^2|\Omega|} \int_{\Omega} \Delta u (u - f) d\Omega$  alınarak güncellenmektedir. Isı denkleminin sayısallaştırılması ise aşağıdaki gibi yapılır:

$$u_{i,j}^{l+1} = u_{i,j}^l + \mu^l \left( D_t u_{i,j}^l + \lambda^l (f_{i,j} - u_{i,j}^l) \right),$$

$$D_t u_{i,j}^l = u_{i+1,j}^l + u_{i-1,j}^l + u_{i,j+1}^l + u_{i,j-1}^l - 4u_{i,j}^l,$$

$$\mu^l = \frac{\Delta t}{\max(D_t u_{i,j}^l) - \min(D_t u_{i,j}^l)},$$

$$\lambda^l = \frac{1}{\sigma^2|\Omega|} \sum_{(i,j) \in \Omega} D_t u_{i,j}^l (u_{i,j}^l - f_{i,j}), \quad (11)$$

burada  $i, j$  indisleri sırasıyla satır ve sütunu temsil etmekte,  $l$  iterasyonu göstermekte ve  $\Delta t$  ise zaman adımı sabittir.

Isı denkleminin karmaşık düzlemdeki çözümü içinse aşağıdaki ifadeler verilebilir:

$$\begin{aligned}
 u_{RGt} &= c_G u_{Rxx} - c_S u_{Sxx}, \\
 u_{RSt} &= c_S u_{Rxx} + c_G u_{Sxx}, \\
 u_{Gt} &= u_{RGt} + \lambda_G (f - u_S) + \lambda_S u_S, \\
 u_{St} &= u_{RSt} + \lambda_S (f - u_S) - \lambda_G u_S, \\
 \lambda_G &= \frac{1}{\sigma^2 |\Omega|} \int_{\Omega} (u_{RGt} (u_G - f) - u_{RSt} u_S) d\Omega, \\
 \lambda_S &= \frac{1}{\sigma^2 |\Omega|} \int_{\Omega} (u_{RSt} (u_G - f) + u_{RGt} u_S) d\Omega,
 \end{aligned} \tag{12}$$

burada  $u_t = u_{Gt} + i u_{St}$  olarak alınmaktadır. Karmaşık yayınlı ısı denkleminin sayısallaştırılması Denklem (11)'dekine benzer işlem adımlarıyla yapılmaktadır. Fakat burada  $\mu_G^l = \frac{\Delta t \cos \varphi}{\max(|\max(D_t u_{i,j,RGt}^l)|, |\min(D_t u_{i,j,RGt}^l)|)}$  ve  $\mu_S^l = \frac{\Delta t \cos \varphi}{\max(|\max(D_t u_{i,j,RSt}^l)|, |\min(D_t u_{i,j,RSt}^l)|)}$  olarak alınmaktadır.

Isı denklemini karmaşık yayınlı da, uygunluk terimi dikkate alınmazsa, alçak geçiren süzgeç davranışı göstermektedir. Bu bağlamda girdi imgesindeki gürültünün azaltılması için aşağıdaki denklemler verilebilir [10, 14]:

$$\begin{aligned}
 u(x, y; t) &= u_G(x, y; t) + i u_S(x, y; t), \\
 u_G(x, y; t) &= f(x, y) * \frac{A}{2\pi\sigma(t)^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2(t)} \cos \alpha(x, y; t), \\
 u_S(x, y; t) &= f(x, y) * \frac{A}{2\pi\sigma(t)^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2(t)} \sin \alpha(x, y; t),
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}}, \sigma(t) = \sqrt{\frac{2t}{\cos \varphi}}, \alpha(x, y; t) = \frac{(x^2+y^2) \sin \varphi}{4t} - \frac{\varphi}{2}.$$

Karmaşık yayınlı ısı denkleminin alçak geçiren süzgeç davranışının sayısallaştırılması işleminde, gerçel kısım için  $t = \frac{\Delta t}{|\max(u_{i,j,G}^l)|}$  ve sanal kısım için  $t = \frac{\Delta t}{|\max(u_{i,j,S}^l)|}$  alınmaktadır.

## 2.2. Doğrusal Olmayan Karmaşık Yayınım

Doğrusal olmayan yayınlı Perona-Malik yaklaşımı örnek olarak gösterilebilir. Bu yaklaşım için aşağıdaki enerji fonksiyoneline bağlı olarak çözüm üretilmektedir:

$$\begin{aligned}
 E(u) &= \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) d\Omega + \lambda \int_{\Omega} (u - f)^2 d\Omega, \\
 u_t &= \begin{cases} \operatorname{div}(\Psi(|\nabla u|)\nabla u) + \lambda(f - u), & \Omega \text{ bölgesinde,} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \partial\Omega \text{ imge sınırında,} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\Psi(|\nabla u|) = \frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|},$$

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2|\Omega|} \int_{\Omega} \text{div}(\Psi(|\nabla u|)\nabla u)(u - f)d\Omega.$$

Perona-Malik yönteminde karmaşık yayılım katsayısı  $\Psi(\cdot) = c(u_s)$  olarak alınmaktadır [10, 15]. Perona-Malik yaklaşımının sayısallaştırılması Denklem (11) ve Denklem (12)'dekine benzer işlem adımlarıyla yapılmaktadır.

### 3. Bulgular

Bu çalışmada, test işlemleri için, Şekil 1a-c)'de gösterildiği gibi, yapı bilgisine sahip Pepper, ağırlıklı olarak yapı bilgisine sahip Lena ve ağırlıklı olarak doku bilgisine sahip Barbara renkli imgeleri kullanılmıştır. Burada, gürültü azaltma yöntemleri, aksi belirtilmedikçe, her bir renk kanalına ayrı olarak uygulanmıştır. Önerilen yöntemlerin hem nitel hem nicel olarak literatürdeki var olan bazı yaklaşımlarla karşılaştırması yapılmıştır.

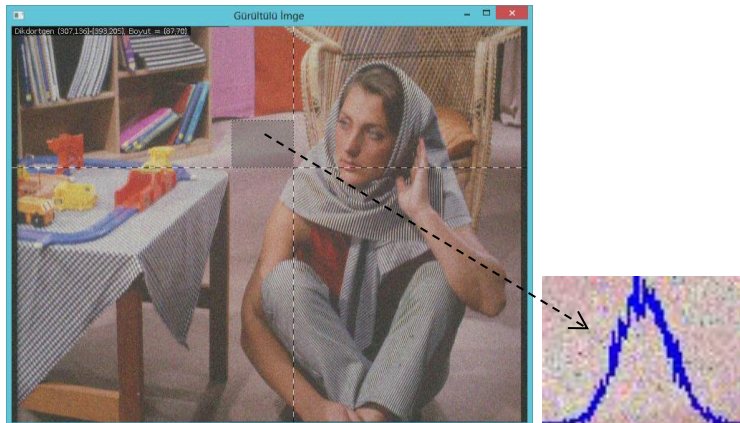
İlk önce, Şekil 2'de verildiği gibi, kullanıcı tarafından gürültülü imgede tekdüze bölge seçimi yapılmış ve seçilen bölgede gürültünün standart sapması kestirilmiştir. Standart sapma hesaplamasında [3]'deki sunulan yöntemde renkli imgeler için aşağıdaki düzenleme yapılmıştır [16]:

$$\sigma = \frac{1}{3(m-2)(n-2)} \sqrt{\frac{\pi}{72}} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left| f_i * \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right| d\Omega, \quad (15)$$

burada  $i \in \{1, 2, 3\}$  imgedeki kırmızı, yeşil ve mavi renk kanallarını göstermektedir. Tablo 1'de verildiği gibi, gerçek değerleriyle karşılaştırma yapıldığında, standart sapmaların kestirilen değerlerinde biraz farklılıklar vardır. Bu durum seçilen bölgeye bağlı olarak ortaya çıkmaktadır. Gürültünün standart sapmasının en iyi kestirimi Barbara test imgesi için elde edilmiştir.



**Şekil 1.** Test işlemleri için kullanılan renkli imgeler: a) 512x512 boyutunda Pepper, b) 512x512 boyutunda Lena ve c) 720x576 boyutunda Barbara



**Şekil 2.** Barbara imgesine yapay olarak eklenen standart sapması  $\sigma = 20$  olan Gauss gürültüsünün kestirimi: Kullanıcı tarafından tekdüze bir bölge seçilmektedir. Seçilen bu bölgedeki piksel parlaklıklarının histogramı Gauss dağılımı özelliği gösterdiği açıktır ve gürültünün standart sapması  $\sigma = 20.75$  olarak kestirilmiştir

**Tablo 1.** Kestirilen gürültü standart sapmaları

Standart sapma, $\sigma$	5	10	15	20	25		
Kestirilen standart sapmalar	7.19	12.29	16.75	21.83	27.53	Pepper	Test imgesi
	6.10	10.96	16.13	21.18	27.12	Lena	
	5.42	10.48	15.69	20.75	25.80	Barbara	

Bu çalışmada, nicel başarımlar ölçütleri olarak ortalama kare hata (MSE), tepe işaret gürültü oranı (PSNR) ve yapısal benzerlik indeksi (SSIM) [17] kullanılmıştır:  $MSE = \frac{1}{3|\Omega|} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} (u_i - I_i)^2 d\Omega$ ,  $PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{255^2}{MSE} \right)$  ve  $SSIM = \text{Ortalama} \left( \frac{(2\mu_I \mu_u + C_1)(2\sigma_{Iu} + C_2)}{(\mu_I^2 + \mu_u^2 + C_1)(\sigma_I^2 + \sigma_u^2 + C_2)} \right)$ . Burada  $\mu_I$  ve  $\mu_u$  yerel ortalama değerler,  $\sigma_I^2$  ve  $\sigma_u^2$  yerel değişimler ve  $\sigma_{Iu}$  yerel ortak değişimdir.  $C_1 = 2.55^2$  ve  $C_2 = 7.65^2$  değerlerine setlenmiştir.

Literatürdeki kısmi diferansiyel denklem tabanlı klasik gürültü azaltma yöntemlerine ısı denklemi ve Perona-Malik yaklaşımı örnek olarak verilebilir. Karmaşık yayılım içermeyen bu yaklaşımlar için Şekil 3'de bazı sonuçlar verilmiştir. Şekil 3a)'da özgün Barbara imgesine standart sapması  $\sigma = 20$  olan yapay Gauss gürültüsü eklenmiştir (Bakınız Şekil 3b). Yaklaşımlarda zaman adımı sabiti  $\Delta t = 4$ , iterasyon sayısı 100 ve Perona-Malik katsayısı  $k_{PM} = 2$  alınmıştır. Şekil 3c)'de sadece düzenleme terimi içeren ısı denkleminin ait sonuçlar verilmiştir. Aslında ısı denklemi Gauss süzgeci gibi davranmaktadır. Bu bağlamda süzgecin pencere boyutu  $5 \times 5$  ve  $\Delta t = 26$  alınarak elde edilen sonuç Şekil 3d)'de gösterilmiştir. Şekillerden de görülebileceği gibi alçak geçiren süzgeç ve kısmi diferansiyel denklem tabanlı yaklaşımla edilen sonuçlar, hemen hemen aynı olmasına rağmen, oldukça bulanıklaştırılmıştır. Şekil 3e)'de verildiği gibi, sadece düzenleme terimi içeren Perona-Malik yaklaşımıyla ve Şekil 3f)'de hem düzenleme terimi hem de uygunluk terimi içeren Perona-Malik yaklaşımıyla elde edilen sonuçlar verilmiştir. Perona-Malik yaklaşımlarıyla elde edilen sonuç imgelerinde merdivenleşme etkisi ortaya çıkmıştır ve bazı gürültülü pikseller tam olarak onarılamamıştır. Son olarak Şekil 3g)'de görsel sonucu verilen hem düzenleme terimi hem de uygunluk terimi içeren ısı denkleminin ait sonuçlar verilmiştir. Fakat bu yöntemle de gürültülü pikseller tam anlamıyla yumuşatılamamıştır.

Renkli imgelerde ise, renk kanallarının birbirlerinden bağımsız olarak işlenmesi durumunda bazı sorunlar ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda literatürde renkli imgeler için de gürültü azaltma yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlere yerel ve yön bağımlı olarak çalışan iz tabanlı [7] ve işbirlikçi toplam değişim [12] yaklaşımları örnek olarak verilebilir. Ayrıca yerel olan yöntemler çoğu durumda imgedeki doku bilgisini tam olarak koruyamadığından yerel olmayan ortamlar [8] gibi yerel olmayan yöntemler geliştirilmiştir. Şekil 4a)'da iz tabanlı yaklaşımla elde edilen sonuç, Şekil 4b)'de yerel olmayan ortamlar yaklaşımına ait sonuç ve Şekil 4c)'de ise işbirlikçi toplam değişim yaklaşımıyla üretilen sonuç verilmiştir. Şekillerden de görülebileceği gibi, iz tabanlı yaklaşımda imgenin doku bilgisi tam olarak korunamamasına rağmen, yerel olmayan ortamlar yaklaşımında imgedeki doku bilgisi iyi bir şekilde korunabilmiştir. İşbirlikçi toplam değişim yaklaşımında ise merdivenleşme etkisi ortaya çıkmıştır. Burada literatürdeki yaklaşımların başarımlarını elde edilirken varsayılan parametre değerleri kullanılmıştır.

Karmaşık yayılım, imgeyi yumuşatırken, literatürdeki diğer yerel yöntemlerin aksine, imgenin doku bilgisini de korumaya çalışmaktadır. Bu duruma Şekil 5a-b)'deki karmaşık yayımlı alçak geçiren süzgeçle [10] elde edilen sonuçlar örnek olarak gösterilebilir. Şekil 5a)'da zaman adımı sabiti büyük değerli seçilmesi durumunda sonuç imgesi fazlaca bulanıklaştırılmışken, küçük değerli zaman adımı sabitinde sonuç imgesindeki doku bilgisi korunabilmiştir. Önerilen yaklaşımlarda ise, daha önceden de ifade edildiği gibi, hem düzenleme terimi hem de uygunluk terimi dikkate alınmakta, Lagrange çarpanı da her iterasyon sonunda güncellemekte ve ayrıca eğer gürültü tipi biliniyorsa, bu çalışmada verilen imgeye sadece Gauss gürültüsü bulaştığı varsayılmaktadır, gürültünün standart sapması yarı otomatik olarak kestirilmektedir. Burada, faz açısı parametresi  $\varphi = \pi/30$ , karmaşık yayımlı ısı denkleminde  $\Delta t = 1.5$ , Perona-Malik yaklaşımında  $\Delta t = 4$  ve Perona-Malik katsayısı  $k_{PM} = 5$  olarak alınmıştır. Bu bağlamda, Barbara imgesine standart sapması  $\sigma = 20$  olan yapay Gauss gürültüsü eklenmiştir. Şekil 6a)'de ısı denkleminde sadece düzenleme terimi [10], Şekil 6b)'de ısı denkleminde hem düzenleme terimi hem de uygunluk terimi, Şekil 6c)'de Perona-Malik yaklaşımında sadece düzenleme terimi [10] ve Şekil 6d)'de Perona-Malik yaklaşımında hem düzenleme terimi hem de uygunluk terimi dikkate alınması durumunda elde edilen sonuçlar verilmiştir. Sonuçlardan da görülebileceği gibi, imgenin dokusu fazlaca bozulmadan sonuç imgesine aktarılabilmiştir. Fakat gürültü azaltma işleminde uygunluk teriminin de göz önüne alınması durumunda, imgenin doku bilgisi iyi bir şekilde korunmasına rağmen, gürültülü bölgeler tam anlamıyla yumuşatılamamıştır. Şekil 7a-c)'de hem düzenleme terimi hem de uygunluk terimi içeren karmaşık yayımlı

Perona-Malik yaklaşımı için, özgün, gürültülü ve onarılmış Barbara imgelerinin seçilen satırına ait renk kanallarındaki değişimler grafiksel olarak verilmiştir. Şekillerden görülebileceği, önerilen yöntemde, tekdüze bölgelerde yumuşatma işlemi başarılı bir şekilde gerçekleştirilmiş fakat ani değişimlerin olduğu bölgelerde başarı oranı biraz düşmüştür. Bu sorun, Perona-Malik yönteminde kullanılan karmaşık yayılım katsayısına bağlı olarak ortaya çıkmaktadır.



**Şekil 3.** Klasik yaklaşımlarla gürültü azaltma: a) Özgün imge, b) Yapay olarak standart sapması  $\sigma = 20$  olan Gauss gürültüsü eklenmiş imge, c) Sadece düzenleştirme terimi içeren ısı denklemiyle elde edilen sonuç [4], d) Alçak geçiren süzgeçle elde edilen sonuç, e) Sadece düzenleştirme terimi içeren Perona-Malik yaklaşımıyla elde edilen sonuç [5] ve f) Hem düzenleştirme terimi hem de uygunluk terimi içeren Perona-Malik yaklaşımıyla elde edilen sonuç ve g) Hem düzenleştirme terimi hem de uygunluk terimi içeren ısı denklemiyle elde edilen sonuç

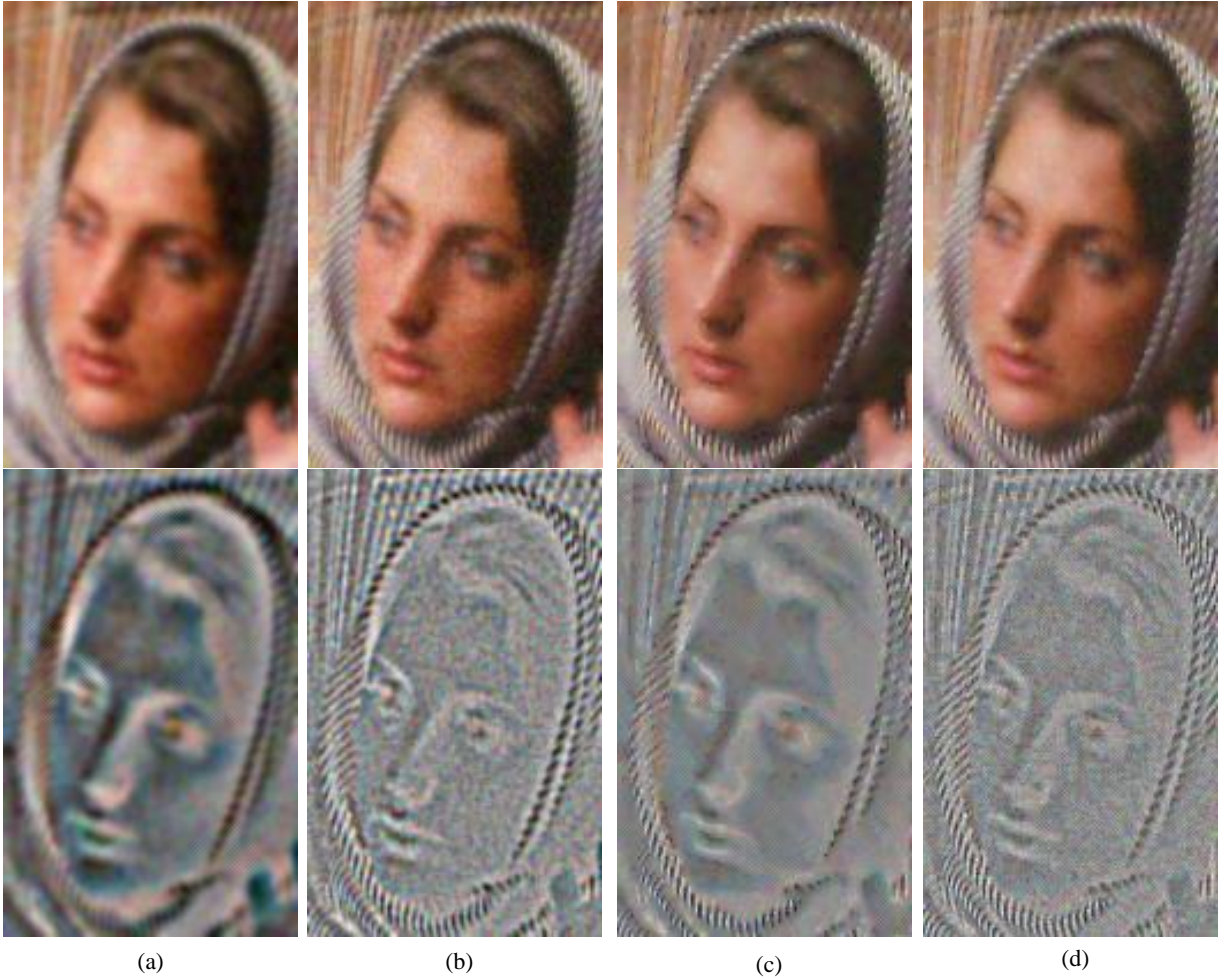




**Şekil 4.** Yapay olarak standart sapması  $\sigma = 20$  olan Gauss gürültüsü eklenmiş Barbara imgesinin yerel ve yerel olmayan yaklaşımlarla gürültüsünü azaltma: a) İz tabanlı yaklaşımla elde edilen sonuç [7], b) Yerel olmayan ortalamalar yaklaşımıyla elde edilen sonuç [8] ve c) İşbirlikçi toplam değişim yaklaşımıyla elde edilen sonuç [12]



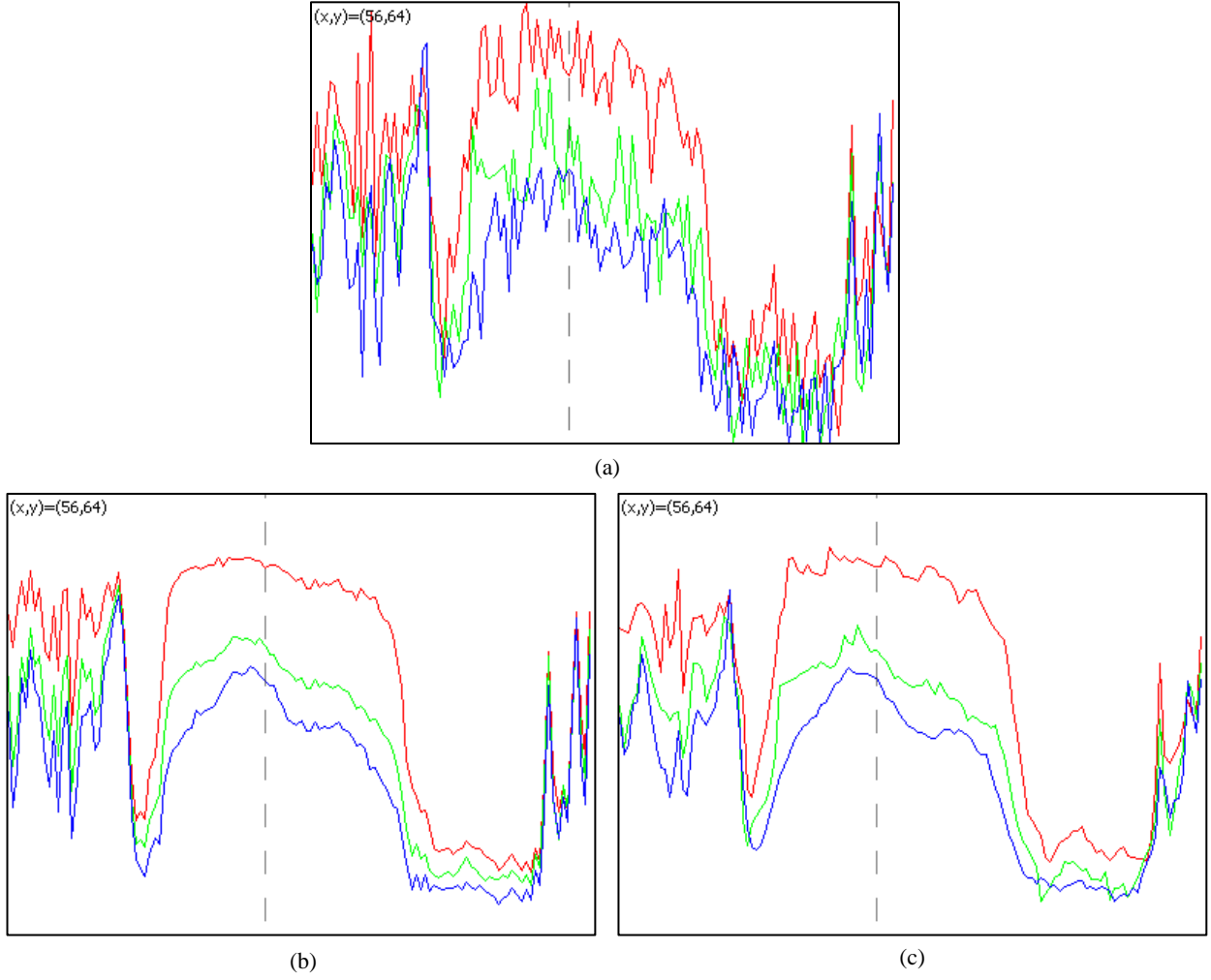
**Şekil 5.** Yapay olarak standart sapması  $\sigma = 20$  olan Gauss gürültüsü eklenmiş Barbara imgesinin gürültüsünü karmaşık yayınlı alçak geçiren süzgeçle giderme: a) Gerçel kısım süzgeç çıkışı ( $\Delta t = 26$ ) [10] ve b) Gerçel kısım süzgeç çıkışı ( $\Delta t = 13$ ) [10]



**Şekil 6.** Yapay olarak standart sapması  $\sigma = 20$  olan Gauss gürültüsü eklenmiş Barbara imgesinin gürültüsünü karmaşık yayınımla giderme (Üst satır, gerçel kısım süzgeç çıkışı ve alt satır ise sanal kısım süzgeç çıkışıdır): a) Isı denkleminde sadece düzenleme terimi kullanılmasıyla elde edilen sonuç [10] (MSE = 310.3, PSNR = 23.21 ve SSIM = 0.68), b) Isı denkleminde hem düzenleme terimi hem de uygunluk terimi kullanılmasıyla elde edilen sonuç (MSE = 204.40, PSNR = 25.02 ve SSIM = 0.74), c) Perona-Malik yaklaşımında sadece düzenleme terimi kullanılmasıyla elde edilen sonuç [10] (MSE = 204.19, PSNR = 25.03 ve SSIM = 0.75) ve d) Perona-Malik yaklaşımında hem düzenleme terimi hem de uygunluk terimi kullanılmasıyla elde edilen sonuç (MSE = 146.03, PSNR = 25.48 ve SSIM = 0.75)

Tablo 2-5'de sırasıyla iz tabanlı yaklaşım [7], yerel olmayan ortalamalar yaklaşımı [8], işbirlikçi toplam değişim yaklaşımı [12] ve en iyi performanslı hem düzenleme terimi hem de uygunluk terimi içeren önerilen karmaşık yayınımlı Perona-Malik yaklaşımı için nicel sonuçlar verilmiştir. Sonuçlardan da görülebileceği gibi, yerel gürültü azaltmaya dayalı önerilen yaklaşım gürültü düzeyinin az olduğu durumlarda iyi sonuç üretmektedir. Yerel olmayan ortalamalar yaklaşımının [8] gürültü düzeyine fazla bir bağımlılığı yoktur. İşbirlikçi toplam değişim yaklaşımında [12] gürültü düzeyi düşük olmasına rağmen özellikle doku içeren görüntülerde başarı oranı düşmektedir. Diğer taraftan uygunluk terimi içermeyen yerel ve yön bağımlı iz tabanlı yaklaşımda [7], gürültü düzeyinin az olduğu durumlarda, en düşük performans elde edilmiştir.

Çalışmaya ait kaynak kodlar Microsoft Visual C++ platformunda yazılmış ve Intel® Core™ i5-3470 3.20 GHz işlemciye sahip ve 8 GB RAM bellekli bir masaüstü bilgisayarda koşulmuştur. Ayrıca yöntemlerin gerçekleştirilmesinde CImg imge işleme kütüphanesinden [18] de yararlanılmıştır. Bu bağlamda, Barbara imgesine ait ortalama gürültü azaltma işlem süreleri, iz tabanlı yaklaşım [7] için 365 saniye, yerel olmayan ortalamalar yaklaşımı [8] için 43 saniye, işbirlikçi toplam değişim yaklaşımı [12] için 75 saniye ve önerilen karmaşık yayınımlı Perona-Malik yaklaşımı içinse 152 saniyedir. Dikkat edilirse, en fazla işlem süresi iz tabanlı yaklaşıma [7] aittir.



**Şekil 7.** Yapay olarak standart sapması  $\sigma = 20$  olan Gauss gürültüsü eklenmiş Barbara imgesinin gürültüsünü Perona-Malik yaklaşımında hem düzenleştirme hem de uygunluk terimi içeren karmaşık yayımla giderme: a) Kırpılmış gürültülü imgenin seçilen satırındaki kırmızı, yeşil ve mavi renk kanallarına ait değerler, b) Kırpılmış özgün imgenin seçilen satırındaki kırmızı, yeşil ve mavi renk kanallarına ait değerler ve c) Kırpılmış sonuç imgesinin seçilen satırındaki kırmızı, yeşil ve mavi renk kanallarına ait değerler (Gerçek kısım süzgeç çıkışı)

**Tablo 2.** İz tabanlı yöntemin başarımı [7]

Standart sapma, $\sigma$	5	10	15	20	25		
OKH	51.26	59.31	67.99	77.19	88.30	Pepper	Test İmgesi
PSNR	31.03	30.40	29.80	29.25	28.67		
SSIM	0.76	0.76	0.75	0.73	0.72		
OKH	47.44	54.77	63.20	71.21	78.95	Lena	
PSNR	31.36	30.74	30.12	29.60	29.15		
SSIM	0.80	0.79	0.77	0.76	0.76		
OKH	93.75	125.30	150.61	174.90	202.3	Barbara	
PSNR	28.41	27.15	26.35	25.70	25.07		
SSIM	0.81	0.78	0.76	0.74	0.71		

**Tablo 3.** Yerel olmayan ortalamalar yaklaşımının başarımı [8]

Standart sapma, $\sigma$	5	10	15	20	25		
OKH	40.17	48.55	58.53	69.59	81.80	Pepper	Test imgesi
PSNR	32.09	31.26	30.45	29.70	29.00		
SSIM	0.81	0.79	0.77	0.75	0.72		
OKH	27.50	37.02	47.10	57.77	69.21	Lena	
PSNR	33.73	32.44	31.40	30.51	29.72		
SSIM	0.85	0.83	0.80	0.78	0.76		
OKH	40.24	64.19	92.79	122.22	150.81	Barbara	
PSNR	32.08	30.05	28.45	27.25	26.34		
SSIM	0.90	0.86	0.82	0.78	0.74		

**Tablo 4.** İşbirlikçi toplam değişim yaklaşımının başarımı [12]

Standart sapma, $\sigma$	5	10	15	20	25		
OKH	42.00	43.82	46.68	52.38	66.84	Pepper	Test imgesi
PSNR	31.89	31.71	31.43	30.93	29.87		
SSIM	0.80	0.79	0.79	0.78	0.73		
OKH	43.28	44.13	45.65	49.82	63.06	Lena	
PSNR	31.76	31.68	31.53	31.15	30.13		
SSIM	0.82	0.82	0.81	0.81	0.77		
OKH	110.62	110.70	111.21	114.96	128.68	Barbara	
PSNR	27.69	27.68	27.67	27.52	27.03		
SSIM	0.80	0.80	0.80	0.80	0.77		

**Tablo 5.** Hem düzenleme hem de uygunluk terimi içeren önerilen karmaşık yayınım Perona-Malik yaklaşımının başarımı

Standart sapma, $\sigma$	5	10	15	20	25		
OKH	23.21	44.68	59.66	77.61	112.83	Pepper	Test imgesi
PSNR	34.47	31.63	30.37	29.23	27.60		
SSIM	0.89	0.82	0.77	0.72	0.62		
OKH	20.94	40.32	53.37	68.83	97.93	Lena	
PSNR	34.91	32.07	30.86	29.75	28.22		
SSIM	0.91	0.85	0.80	0.75	0.66		
OKH	31.32	66.44	114.81	146.03	184.06	Barbara	
PSNR	33.17	29.90	27.53	26.48	25.48		
SSIM	0.92	0.86	0.80	0.75	0.67		

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada yerel ve doğrusal olmayan karmaşık yayınım yöntemleri üzerinde durulmuştur. Gürültü azaltma yöntemleri düzenleme terimi ve uygunluk terimi olmak üzere genelde iki ana terim içerir. Literatürde düzenleme terimi için birçok yöntem geliştirilmiş ve bu bağlamda yerel ve yarı-yerel ve yerel olmayan yaklaşımlar kullanılmıştır. Yerel olmayan yaklaşımların, imgedeki gürültü düzeyi fazla olsa bile, performansında fazla bir düşüş olmamaktadır. Önerilen yaklaşımlarda gürültü azaltma işlemlerinde aynı anda hem alçak geçiren süzgeç hem de yüksek geçiren süzgeç dikkate alındığından, gürültü düzeyinin az olduğu durumlarda çok iyi sonuçlar elde edilmiştir. Fakat önerilen yaklaşımlar yerel olarak çalıştığından gürültü düzeyi artıka elde edilen sonuçlarda performans açısından düşüşler meydana gelmektedir. Uygunluk terimi ise, imgeye eklenen gürültü tipine bağlı olarak seçilmektedir. Ayrıca bu terim, imgedeki gürültü düzeyine göre ağırlıklandırılmaktadır.

İleriki araştırmalar, imgedeki gürültü düzeyinin [19]'deki çalışmada olduğu gibi otomatik olarak kestirilmesi ve yerel olmayan yayına [9] karmaşık yayının nasıl uygulanabileceği üzerine olacaktır.

**Kaynakça**

- [1] Aström, F. 2015. Variational tensor-based models for image diffusion in non-linear domains. Linköping University, Ph.D. Thesis, 170s, Sweden.
- [2] Gilboa, G., Sochen, N., and Zeevi, Y. Y. 2006. Variational Denoising of Partly Textured Images by Spatially Varying Constraints. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15.8(2006), 2281-2289.
- [3] Immerkaer, J. 1996. Fast Noise Variance Estimation. *Computer Vision and Image Understanding*, 64.2(1996), 300-302.
- [4] Tikhonov, A. N. 1963. Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization. *Soviet Math. Dokl.*, 4(1963), 1035-1038.
- [5] Perona, P., Malik, J. 1990. Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12.7(1990), 629-639.
- [6] Weickert, J. 1998. *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. Teubner-Verlag, Stuttgart, Germany, 170s.
- [7] Tschumperle, D., Deriche, R. 2005. Vector-Valued Image Regularization with PDE's: A Common Framework for Different Applications. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 27.4(2005), 506-517.
- [8] Buades, A., Coll, B., Morel, J. -M. 2005. A Non-Local Algorithm for Image Denoising. *Computer Vision and Pattern Recognition*, 2(2005), 60-65.
- [9] Gilboa, G., Osher, S. 2007. Nonlocal Linear Image Regularization and Supervised Segmentation, *Multiscale Modeling & Simulation*, 6.2(2007), 595-630.
- [10] Gilboa, G., Sochen, N., Zeevi, Y. Y. 2004. Image Enhancement and Denoising by Complex Diffusion Processes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26.8(2004), 1020-1036.
- [11] Tschumperle, D. 2006. Fast Anisotropic Smoothing of Multi-Valued Images Using Curvature-Preserving PDE's. *International Journal of Computer Vision*, 68.1 (2006), 65-82.
- [12] Duran, J., Moeller, M., Sbert, C., Cremers, D. 2016. Collaborative Total Variation: A General Framework for Vectorial TV Models. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 9.1(2016), 116-151.
- [13] Vese, L. A., Guyader, C. L. 2015. *Variational Methods in Image Processing*. Chapman and Hall/CRC, 386s.
- [14] Araújo, A., Barbeiro, S., Cuesta, E., Durán, A. 2017. Cross-Diffusion Systems for Image Processing: I. The Linear Case. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 58.3(2017), 447-467.
- [15] Araújo, A., Barbeiro, S., Cuesta, E., Durán, A. 2017. Cross-Diffusion Systems for Image Processing: II. The Nonlinear Case. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 58.3(2017), 427-446.
- [16] Ulu, A., Dizdaroğlu, B. 2016. Variational Additive Noise Removal of Color Images. *Signal Processing and Communication Application Conference (SIU)*, 16-19 May 2016, Zonguldak.
- [17] Wang, Z., Bovik, A.C., Sheikh, H. R., Simoncelli, E.P. 2004. Image Quality Assessment: From Error Measurement to Structural Similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13.4(2004), 600-612.
- [18] Tschumperle, D. 2004. The CImg Library. <http://cimg.eu/>. (Erişim Tarihi: 15.03.2018).
- [19] Sutour, C., Aujol, J. F., Deledalle, C. A. 2016. Automatic Estimation of the Noise Level Function for Adaptive Blind Denoising. *Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, 28 August - 2 September 2016, Budapest, Hungary, 76-80.