SAKARYA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ
SAKARYA UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE

e-ISSN: 2147-835X
Dergi sayfası: http://dergipark.gov.tr/saufenbilder

Geliş/Received
03.09.2017
Kabul/Accepted
09.05.2018

Doi
10.16984/saufenbilder.341517

$\mathbb{R}^2$ de Bir n-li Eğri Ailesinin Afin Diferansiyel İnvaryantları

Uğur Gözütok*, Yasemin Sağıroğlu

ÖZ

Bu çalışmada n tane eğrinin üreteç diferansiyel invaryantları belirlenmiş olup, bu üreteç kümesinin fonksiyonel bağımsız olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu diferansiyel invaryantlar kullanılarak $\mathbb{R}^2$ de iki tane n −li eğri ailesinin denklik problemi araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: afin diferansiyel geometri, invaryant, eğriler

Affine Differential Invariants of a Family of n Curves in $\mathbb{R}^2$

ABSTRACT

In this study, we determine generating differential invariants for n curves, which is shown to be fonctionally independent. In addition, using these diffenrial invariants, the equivalence problem of two families of n curves in $\mathbb{R}^2$ is investigated.

Keywords: affine differential geometry, invariant, curves

* Corresponding Author / Sorumlu Yazar ugurgozutok@ktu.edu.tr

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Diferansiyel geometride invaryantlar, geçmiş yıllardan günümüze kadar oldukça ilgi görmüştür. Özellikle afin diferansiyel invaryantlar teorisinin tarihi 1920'lere dayanır, bu alandaki en temel eserler Blaschke [2], Su [11] ve Schirokow [10] tarafından oluşturulmuştur. Afin diferansiyel geometri ile ilgili diğer çalışmalar [3-5] da bulunabilir.

Afin diferansiyel geometride en önemli konuların başında eğrilerin afin diferansiyel geometrisi gelmektedir. Eğriler teorisinde, bir eğrinin yay uzunluğu, eğrilikleri gibi invaryantları incelenmektedir. [7] de, n-boyutlu bir afin uzayda bir eğrinin centro-afin invaryantları incelenmiştir. Ayrıca afin grubun alt gruplarında da eğriler ve invaryantları farklı metotlarla ele alınmıştır [1,4,6,10]. Yine afin diferansiyel geometride, diferansiyel invaryantlar kullanılarak eğrilerin denkliğinin araştırılması başka bir problemdir. $SL(n,\mathbb{R})$ grubuna göre eğri ailelerinin denkliği [9] da verilmiştir.

Bu çalışmada n tane eğrinin üreteç diferansiyel invaryantları belirlenmiş olup, bu üreteç kümesinin fonksiyonel bağımsız olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu diferansiyel invaryantlar kullanılarak $\mathbb{R}^2$ de iki tane $n-$li eğri ailesinin denklik problemi araştırılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER (PRELIMINARIES)

Determinantı sıfırdan farklı olan, reel bileşenli $n \times n$ tipli matrisler kümesi $GL(n,\mathbb{R})$ olarak gösterilir ve

$$GL(n,\mathbb{R}) = \left\{A = (a_{ij})_{n\times n} \mid detA \neq 0, a_{ij} \in \mathbb{R}\right\}$$

biçimindedir. Bu küme matrislerin çarpma işlemine göre bir gruptur.

$$Aff(n,\mathbb{R}) = \left\{F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{matrix} F(x) = gx + b, \exists g \in GL(n,\mathbb{R}) \\ \exists b \in \mathbb{R}^n \end{matrix}\right\}$$

kümesi de dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir grup olup, bu gruba da afin grup denir.

$GL(2,\mathbb{R})$ grubunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki etkisi $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$ ve $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$gx = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}x_1 + g_{12}x_2 \\ g_{21}x_1 + g_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Ayrıca $Aff(2,\mathbb{R})$ grubunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki etkisi de $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$Fx = F(x) = gx + b = \begin{pmatrix} g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + b_1 \\ g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

olarak verilir.

Tanım 1. $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $x: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{R}^2$ de bir eğri (parametrik eğri) denir. Burada $\forall t \in I$ için $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ biçiminde olup $x_i: I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

x, $\mathbb{R}^2$ de bir parametrik eğri olmak üzere $\exists k \in \mathbb{N}$ için bilinmeyenleri $x, x', \dots, x^{(k)}$ olan, reel katsayılı bir polinom $P\{x\} = P(x, x', \dots, x^{(k)})$ olarak ifade edilir. x_1 ve x_2 parametrik eğrilerini ve türevlerini içinde bilinmeyen olarak bulunduran bir reel katsayılı polinom ise $\exists k \in \mathbb{N}$ için $P\{x_1, x_2\} = P(x_1, x_2, x_1', x_2', \dots, x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ biçimindedir. Bu tanımı n tane $x_1, x_2, \dots, x_n$ eğrilerine genelleştirerek, n tane parametrik eğri ve onun türevlerini bilinmeyen olarak bulunduran, reel katsayılı bir polinom $\exists k \in \mathbb{N}$ için

$$P\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = P(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1', x_2', \dots, x_n', \dots, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

olarak verilir. Bu polinoma $x_1, x_2, \dots, x_n$ nin diferansiyel polinomu denir. $x_1, x_2, \dots, x_n$ nin diferansiyel polinomları kümesi $\mathbb{R}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ile gösterilir. Bu küme

$$\mathbb{R}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n, x_1', , \dots, x_n', \dots, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]$$

olarak yazılır [8].

Buradaki toplama ve çarpma işlemleri $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinomlar halkasındakine benzer biçimde tanımlanır [8]. Buradan $\mathbb{R}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de bir tamlık bölgesi olup, onu içeren bir kesir cismi vardır. Bu kesir cismi $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >$ ile gösterilir. Bu kesir cisminin bir elemanı $P_1\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, P_2\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $P_2\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \neq 0$ olmak üzere

$$f < x_1, x_2, \dots, x_n > = \frac{P_1\{x_1, x_2, \dots, x_n\}}{P_2\{x_1, x_2, \dots, x_n\}}$$

biçimindedir. $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >$ nin elemanlarına diferansiyel rasyonel fonksiyonlar denir. $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >$ kümesi bir diferansiyel $\mathbb{R}$-cebir ve cisimdir [5].

Tanım 2. $S \subseteq \mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >$ boştan farklı bir alt küme olsun. $H_i \in \mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >$ alt diferansiyel $\mathbb{R}$-cebir ve diferansiyel cisim olmak üzere $(S) = \bigcap_{S \subseteq H_i} H_i$ kümesi S yi kapsayan en küçük alt diferansiyel $\mathbb{R}$-cebir ve diferansiyel cisimdir. $(S) = \mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >$ oluyor ise S ye $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >$ nin üreteç kümesi denir. Eğer S sonlu ise $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >$ ye sonlu üreteçli diferansiyel $\mathbb{R}$-cebir ve diferansiyel cisim denir.

Tanım 3. $f < x_1, x_2, \dots, x_n > \in \mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >$ olsun. $\forall g \in GL(2, \mathbb{R})$ ve $\forall b \in \mathbb{R}^2$ için

$$f < gx_1 + b, gx_2 + b, \dots, gx_n + b > = f < x_1, x_2, \dots, x_n >$$

ise f ye afin invaryant diferansiyel rasyonel fonksiyon denir. Afin invaryant diferansiyel polinom tanımı benzer şekilde verilir.

$H = Aff(2, \mathbb{R})$ olmak üzere tüm G-invaryant diferansiyel rasyonel fonksiyonlar kümesi $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >^H$ ile gösterilir. $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >^H$, $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >$ kümesinin diferansiyel alt $\mathbb{R}$-cebir ve diferansiyel cismidir.

3. AFİN İNVARYANT DİFERANSİYEL RASYONEL FONKSİYONLARIN ÜRETEÇLERİ (GENERATORS OF AFFINE DIFFERENTIAL RATIONAL FUNCTIONS)

Önerme 1. Sabitten farklı afin invaryant diferansiyel polinom yoktur.

İspat. $P\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ afin invaryant diferansiyel polinom olsun. Bu durumda

$$P\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \sum a_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{k+mn}} (x_1)^{\alpha_0} \dots (x_n)^{\alpha_n} \dots (x_n^{(m)})^{\alpha_{k+mn}}$$

biçimindedir. P afin invaryant olduğundan

$$P\{gx_1 + b, gx_2 + b, \dots, gx_n + b\} = P\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

dir. O halde $\exists \varphi\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ $GL(2, \mathbb{R})$-invaryant polinomu

$$P\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \varphi\{x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n\}$$

olacak şekilde mevcuttur. Gerçekten

$$\varphi\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} = P\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0\}$$

olarak alalım. P, $Aff(2, \mathbb{R})$-invaryant polinom olduğundan özel olarak $b = 0$ alınırsa $GL(2, \mathbb{R})$-invaryanttır. Dolayısıyla $g = e$ ve $b \in \mathbb{R}^2$ olarak alınırsa, P $Aff(2, \mathbb{R})$-invaryant polinom olduğundan;

$$P\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\} = P\{x_1 + b, x_2 + b, \dots, x_n + b\}$$

dir. $b = -x_n$ olarak alırsak;

$$P\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = P\{x_1 - x_n, \dots, x_n - x_n\} = \varphi\{x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n\}$$

olup, eşitlik sağlanır. Buradaki φ polinomu $GL(2, \mathbb{R})$-invaryanttır. Dolayısıyla değişkenlerini $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ diye alırsak, $\forall g \in GL(2, \mathbb{R})$ için

$$\varphi\{gy_1, gy_2, \dots, gy_{n-1}\} = \varphi\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$$

dir.

$$\varphi\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} = \sum a_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m} (y_1)^{\alpha_1} (y_2)^{\alpha_2} \dots ({y_{n-1}}^{(K)})^{\alpha_m}$$

alınırsa

$$\varphi\{gy_1, gy_2, \dots, gy_{n-1}\} = \sum a_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_m}(gy_1)^{\alpha_1}(gy_2)^{\alpha_2}\dots(gy_{n-1}{}^{(K)})^{\alpha_m} = \sum a_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_m} g^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m}(y_1)^{\alpha_1}\dots(y_{n-1}{}^{(K)})^{\alpha_m} = \varphi\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$$

olur. İki tarafın eşitliğinden $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ için

$$a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m} = g^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m} a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$$

elde edilir. Buradan

$$a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(g^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m} - 1) = 0$$

olur. $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \neq 0$ ise $g^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m} \neq 1$ olup, $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ için $a_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m} = 0$ ve $\varphi = 0$ bulunur. Buradan $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 0$ olmalıdır. Bu durumda $\alpha_i \in \mathbb{N}$ olduğundan $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ elde edilir. Buradan

$$\varphi\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} = a_{00\dots0} = sabit$$

olur. O halde

$$P\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \varphi\{x_1 - x_n, x_2 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n\} = \varphi\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\} = sabit$$

olup, keyfi P $Aff(2,\mathbb{R})$-invaryant polinomu sabittir. □

Notasyon. $x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t))$, $x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t))$ parametrik eğrilerinin bileşenleri ile oluşturulan

$$\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix}$$

determinantını $[x_1(t)\ x_2(t)]$ ile göstereceğiz.

Tanım 4. $\forall t \in I$ için $[x_1{}'(t)\ x_1{}''(t)] \neq 0$ oluyorsa $x_1(t)$ parametrik eğrisine $Aff(2,\mathbb{R})$-regüler denir.

Teorem 1. $x_1, x_2, \dots, x_n$ $\mathbb{R}^2$ de, x_1 regüler olmak üzere, n tane parametrik eğri ve $H = Aff(2,\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >^H$ kümesinin üreteç kümesi

$$\left\{\frac{[x_1'\ x_1''']}{[x_1'\ x_1'']}, \frac{[x_1''\ x_1''']}{[x_1'\ x_1'']}, \frac{[x_1 - x_i\ x_1'']}{[x_1'\ x_1'']}, \frac{[x_1'\ x_1 - x_i]}{[x_1'\ x_1'']},\ i = 2,3,\dots,n\right\}$$

biçimindedir.

İspat. $f \in \mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >^H$ olsun. Bu durumda $\exists k \in \mathbb{N}$ için

$$f < x_1, \dots, x_n >= f < x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n', \dots, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} >$$

H-invaryanttır. O halde $\forall g \in GL(2,\mathbb{R})$, $\forall b \in \mathbb{R}^2$ için

$$f < gx_1 + b, gx_2 + b, \dots, gx_n + b >= f < x_1, x_2, \dots, x_n >$$

dir. Buradan

$$f < gx_1 + b, \dots, gx_n + b, gx_1', \dots, gx_n', \dots, gx_1^{(k)}, \dots, gx_n^{(k)} >= f < x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n', \dots, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} >$$

olur. $g = e$ alınırsa

$$f < x_1 + b, \dots, x_n + b, x_1', \dots, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} > = f < x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_1^{(k)} \dots, x_n^{(k)} >$$

elde edilir. Bu eşitlik $\forall b$ için geçerli olduğundan $b = -x_1$ alınırsa

$$f < x_1 - x_1, \dots, x_n - x_1, x_1', \dots, x_n', \dots, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} >= \varphi < x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1, x_1', \dots, x_n', \dots, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} >$$

olur. φ $GL(2,\mathbb{R})$-invaryant olduğundan

$$\varphi < g(x_2 - x_1), \dots, g(x_n - x_1), gx_1', \dots, gx_n', \dots, gx_1^{(k)}, \dots, gx_n^{(k)} >= \varphi < x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1, x_1', \dots, x_n', \dots, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} >$$

dır. Burada $x_i - x_1 = y_i$, $i = 2,3,\dots,n$ ve $x_1' = y_1$ dersek $\forall g \in GL(2,\mathbb{R})$ için $\exists \psi$ öyle ki

$$\varphi < g(x_2 - x_1), \dots, g(x_n - x_1), gx_1', \dots, gx_n', \dots, gx_1^{(k)}, \dots, gx_n^{(k)} >= \psi < gy_1, \dots, gy_n, \dots, gy_1^{(k)}, \dots, gy_n^{(k)} >= \psi < y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(k)}, \dots, y_n^{(k)} >$$

elde edilir. ψ $GL(2,\mathbb{R})$-invaryant olduğundan

$$\frac{[y_1\, y_1'']}{[y_1\, y_1']}, \frac{[y_1'\, y_1'']}{[y_1\, y_1']}, \frac{[y_i\, y_1']}{[y_1\, y_1']}, \frac{[y_1\, y_i]}{[y_1\, y_1']}, \quad i = 2,3,\dots,n$$

ile üretilebilir. $y_i = x_i - x_1$, $i = 2,3,\dots n$ ve $y_1 = x_1'$ ifadelerini yerine yazarsak, bu üreteçler aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{[x_1'\, x_1''']}{[x_1'\, x_1'']}, \frac{[x_1''\, x_1''']}{[x_1'\, x_1'']}, \frac{[x_1 - x_i\, x_1'']}{[x_1'\, x_1'']}, \frac{[x_1'\, x_1 - x_i]}{[x_1'\, x_1'']}, \quad i = 2,3,\dots,n$$

O halde $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_n >^H$ kümesi için $2n$ tane üreteç elde edilmiş olur. □

Tanım 5. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ iki parametrik eğri ailesi olsun. Eğer $\exists g \in GL(2,\mathbb{R})$, $\exists b \in \mathbb{R}^2$ için $y_i(t) = gx_i(t) + b$, $\forall t \in I$, $i = 2,3,\dots,n$ oluyor ise bu eğri ailelerine $Aff(2,\mathbb{R})$-denktir denir ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ile gösterilir.

$\mathbb{R}^2$ de iki eğri ailesi verildiğinde, bu iki eğri ailesinin denklik koşulları aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 2. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ iki eğri ailesi ve x_1, y_1 regüler olsun. Eğer

$$\frac{[x_1'\, x_1''']}{[x_1'\, x_1'']} = \frac{[y_1'\, y_1''']}{[y_1'\, y_1'']}, \frac{[x_1''\, x_1''']}{[x_1'\, x_1'']} = \frac{[y_1''\, y_1''']}{[y_1'\, y_1'']},$$
$$\frac{[x_1 - x_i\, x_1'']}{[x_1'\, x_1'']} = \frac{[y_1 - y_i\, y_1'']}{[y_1'\, y_1'']}, \frac{[x_1'\, x_1 - x_i]}{[x_1'\, x_1'']} = \frac{[y_1'\, y_1 - y_i]}{[y_1'\, y_1'']}$$

oluyor ise $\exists g \in GL(2,\mathbb{R})$, $\exists b \in \mathbb{R}^2$ için $y_i(t) = gx_i(t) + b$, $\forall t \in I$ dır, yani $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ dır.

İspat. $x_1' = a_1$, $y_1' = b_1$, $x_i - x_1 = a_i$, $y_i - y_1 = b_i$, $i = 2,\dots,n$ olsun. Bu durumda yukarıdaki eşitlikler

$$\frac{[a_1'\, a_1'']}{[a_1\, a_1']} = \frac{[b_1\, b_1'']}{[b_1\, b_1']}, \frac{[a_1'\, a_1'']}{[a_1\, a_1']} = \frac{[b_1'\, b_1'']}{[b_1\, b_1']},$$
$$\frac{[\text{-}a_i\, a_1']}{[a_1\, a_1']} = \frac{[b_i\, b_1']}{[b_1\, b_1']}, \frac{[a_1\, a_i]}{[a_1\, a_1']} = \frac{[b_1\, b_i]}{[b_1\, b_1']}$$

olarak yazılabilir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{11}'(t) \\ a_{12}(t) & a_{12}'(t) \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11}'(t) & a_{11}''(t) \\ a_{12}'(t) & a_{12}''(t) \end{pmatrix}$$

matrislerini göz önüne alalım. $[x_1'\, x_1''] = [a_1\, a_1'] \neq 0$ olduğundan A matrisi regülerdir. $A^{-1}A' = C$ olsun. Buradan $A' = AC$ dir. O halde

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{11}'' \\ a_{12}' & a_{12}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}' \\ a_{12} & a_{12}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

olur. Buradan aşağıdaki iki denklem sistemi elde edilir:

$$a_{11}' = c_{11}a_{11} + c_{21}a_{11}'$$
$$a_{12}' = c_{11}a_{12} + c_{21}a_{12}'$$
$$a_{11}'' = c_{12}a_{11} + c_{22}a_{11}'$$
$$a_{12}'' = c_{12}a_{12} + c_{22}a_{12}'$$

Bu denklem sistemlerinin çözümlerinden:

$$c_{11} = 0, \qquad c_{21} = 1, \qquad c_{12} = \frac{[a_1'\, a_1'']}{[a_1\, a_1']}, \quad c_{22} = \frac{[a_1\, a_1'']}{[a_1\, a_1']}$$

bulunur.

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{11}' \\ b_{12} & b_{12}' \end{pmatrix}$ matrisini göz önüne alalım. Teoremdeki eşitliklerden $B^{-1}B' = A^{-1}A'$ bulunur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}(BA^{-1})' &= B'A^{-1} + B(A^{-1})' \\ &= B'A^{-1} - BA^{-1}A'A^{-1} \\ &= B(B^{-1}B' - A^{-1}A')A^{-1} = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\exists y \in GL(2,\mathbb{R})$ için $BA^{-1} = g$ dir. O halde $B = gA$ dır. Bunu açık olarak yazarsak:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{11}' \\ b_{12} & b_{12}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}' \\ a_{12} & a_{12}' \end{pmatrix}$$

olur. Buradan $b_1(t) = ga_1(t)$ ve $y_1'(t) = gx_1'(t)$, $\forall t \in I$ bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$y_1(t) = gx_1(t) + b \tag{1}$$

olur.

$D_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{i1} \\ a_{12} & a_{i2} \end{pmatrix}$, $i = 2,3,\dots,n$ matrislerini göz önüne alalım. $A^{-1}D_i = H$, $i = 2,3,\dots,n$ olsun. O halde $D_i = AH$, $i = 2,3, \dots, n$ dir. Bunu açık şekilde yazarsak

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{i1} \\ a_{12} & a_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a'_{11} \\ a_{12} & a'_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad i = 2,3, \dots, n$$

olur. Buradan aşağıdaki denklem sistemleri elde edilir:

$$\begin{aligned} a_{11} &= h_{11}a_{11} + h_{21}a'_{11} \\ a_{12} &= h_{11}a_{12} + h_{21}a'_{12} \\ a_{i1} &= h_{12}a_{11} + h_{22}a'_{11} \\ a_{i2} &= h_{12}a_{12} + h_{22}a'_{12} \end{aligned}, i = 2,3, \dots, n.$$

Bu denklem sistemlerinin çözümlerinden:

$$h_{11} = 1, \quad h_{21} = 0, \quad h_{12} = \frac{[a_i\ a'_1]}{[a_1\ a'_1]}, \quad h_{22} = \frac{[a_1\ a_i]}{[a_1\ a'_1]}, \quad i = 2,3, \dots, n$$

bulunur.

$E_i = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{i1} \\ b_{12} & b_{i2} \end{pmatrix}$, $i = 2,3, \dots, n$ matrisi için aynı işlemler yapılırsa, teoremdeki eşitliklerden $A^{-1}D_i = H = B^{-1}E_i$, $i = 2,3, \dots, n$ elde edilir. $B = gA$ olduğunu biliyoruz. O halde $A^{-1}D_i = (gA)^{-1}E_i = A^{-1}g^{-1}E_i$, $i = 2,3, \dots, n$ dir. Buradan her iki tarafı soldan A matrisi ile çarparsak $D_i = g^{-1}E_i$ ve $E_i = gD_i$, $i = 2,3, \dots, n$, $g \in GL(2, \mathbb{R})$ bulunur. Bunu açık şekilde yazarsak:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{i1} \\ b_{12} & b_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{i1} \\ a_{12} & a_{i2} \end{pmatrix}, \quad i = 2,3, \dots, n$$

olur. O halde $b_i = ga_i$, $i = 2,3, \dots, n$, $g \in GL(2, \mathbb{R})$ elde edilir. Yani, $y_i - y_1 = g(x_i - x_1)$, $i = 2,3, \dots, n$ dir. $y_1 = gx_1 + b$ olduğunu biliyoruz. O halde $y_i - (gx_1 + b) = gx_i - gx_1$ olup

$$y_i = gx_i + b, \quad i = 2,3, \dots, n, \quad g \in GL(2, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

elde edilir. (1) ve (2) eşitliklerinden $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ bulunur. □

Teorem 3. $f_1(t), f_2(t), g_i(t), h_i(t)$, $i = 2,3, \dots, n, t \in I$ 2n tane C^∞-fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\frac{[a'_1\ a'''_1]}{[a'_1\ a''_1]} = f_1(t), \frac{[a''_1\ a'''_1]}{[a'_1\ a''_1]} = f_2(t),$$
$$\frac{[a_i - a_1\ a''_1]}{[a'_1\ a''_1]} = g_i(t), \frac{[a'_1\ a_i - a_1]}{[a'_1\ a''_1]} = h_i(t), \quad i = 2,3, \dots, n$$

olacak şekilde, a_1 regüler olmak üzere, $a_1, a_2, \dots, a_n$ parametrik eğrileri mevcuttur.

İspat. $a'_1 = x_1$ ve $a_i - a_1 = x_i$, $i = 2,3, \dots, n$ olsun. Bu durumda teoremdeki şartları aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\frac{[x'_1\ x''_1]}{[x_1\ x'_1]} = f_1(t), \frac{[x'_1\ x''_1]}{[x_1\ x'_1]} = f_2(t) \tag{3}$$

$$\frac{[x_i\ x'_1]}{[x_1\ x'_1]} = g_i(t), \frac{[x_1\ x_i]}{[x_1\ x'_1]} = h_i(t). \tag{4}$$

Diğer yandan,

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x'_{11} \\ x_{12} & x'_{12} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} x'_{11} & x''_{11} \\ x'_{12} & x''_{12} \end{pmatrix}$$

ve $A^{-1}A' = H$ olsun. Buradan $A' = AH$ dır. Yani

$$\begin{pmatrix} x'_{11} & x''_{11} \\ x'_{12} & x''_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x'_{11} \\ x_{12} & x'_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

dir. Bu eşitlikten aşağıdaki denklem sistemleri elde edilir:

$$\begin{aligned} x'_{11} &= h_{11}x_{11} + h_{21}x'_{11} \\ x'_{12} &= h_{11}x_{12} + h_{21}x'_{12} \\ x''_{11} &= h_{12}x_{11} + h_{22}x'_{11} \\ x''_{12} &= h_{12}x_{12} + h_{22}x'_{12} \end{aligned}$$

Bu denklem sistemlerinin çözümlerinden,

$$h_{11} = 0, \quad h_{21} = 1, \quad h_{12} = \frac{[x''_1\ x'_1]}{[x_1\ x'_1]}, \quad h_{22} = \frac{[x_1\ x''_1]}{[x_1\ x'_1]}$$

elde edilir. Buradan h matrisi

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -f_2(t) \\ 1 & f_1(t) \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. $A' = AH$ olduğundan

$$x''_{11} = -f_2(t)x_{11} + f_1(t)x'_{11}$$
$$x''_{12} = -f_2(t)x_{12} + f_1(t)x'_{12}$$

olur. Yani,

$$\begin{pmatrix} x''_{11} \\ x''_{12} \end{pmatrix} = -f_2(t)\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} + f_1(t)\begin{pmatrix} x'_{11} \\ x'_{12} \end{pmatrix}$$

dir. $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = y_1$ dersek

$$y''_1 = -f_2(t)y_1 + f_1(t)y'_1$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemi bulunur. Diferansiyel denklemler teorisinden biliyoruz ki bu denklemin çözümü vardır ve bu çözüm için $[y_1\, y'_1] \neq 0$ dır. Ayrıca, bu $y_1(t)$ eğrisi (3) koşullarını sağlar.

$$B_i = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{i1} \\ x_{12} & x_{i2} \end{pmatrix}, \qquad i = 2,3,\dots,n$$

matrislerini göz önüne alalım. $A^{-1}B_i = C_i, i = 2,3,\dots,n$ olsun. Buradan $B_i = AC_i, i = 2,3,\dots,n$ olur. Bunu açık şekilde yazarsak:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{i1} \\ x_{12} & x_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x'_{11} \\ x_{12} & x'_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad i = 2,3,\dots,n$$

olup, buradan

$$\left.\begin{aligned} x_{11} &= c_{11}x_{11} + c_{21}x'_{11} \\ x_{12} &= c_{11}x_{12} + c_{21}x'_{12} \\ x_{i1} &= c_{12}x_{11} + c_{22}x'_{11} \\ x_{i2} &= c_{12}x_{12} + c_{22}x'_{12} \end{aligned}\right., i = 2,3,\dots,n$$

denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemlerinin çözümlerinden

$$c_{11} = 1, \qquad c_{21} = 0, \qquad c_{12} = \frac{[x_i\, x'_1]}{[x_1\, x'_1]}, \qquad c_{22} = \frac{[x_1\, x_i]}{[x_1\, x'_1]}, \qquad i = 2,3,\dots,n$$

bulunur. O halde $C_i = \begin{pmatrix} 1 & g_i(t) \\ 0 & h_i(t) \end{pmatrix}, i = 2,3,\dots,n$ olarak bulunur. Buradan aşağıdaki denklem sistemleri elde edilir:

$$\left.\begin{aligned} x_{i1} &= g_i(t)x_{11} + h_i(t)x'_{11} \\ x_{i2} &= g_i(t)x_{12} + h_i(t)x'_{12} \end{aligned}\right., i = 2,3,\dots,n$$

ya da

$$\begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{pmatrix} = g_i(t)\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} + h_i(t)\begin{pmatrix} x'_{11} \\ x'_{12} \end{pmatrix}, i = 2,3,\dots,n$$

olur. $\begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{pmatrix} = y_i, i = 2,3,\dots,n$ dersek, bu denklem sistemi:

$$y_i(t) = g_i(t)x_1 + h_i(t)x'_1, i = 2,3,\dots,n$$

şeklinde yazılır. Yine diferansiyel denklemler teorisinden bu denklem sisteminin çözümü vardır ve bu denklem sistemlerinin çözümleri olan y_i fonksiyonları için $[y_i\, y'_i] \neq 0, i = 2,3,\dots,n$ dir. Ayrıca bu $y_i, i = 2,3,\dots,n$ fonksiyonları (4) eşitliklerini sağlar.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ lerin seçiminden $a'_1 = y_1$ ve $a_i - a_1 = y_i, i = 2,3,\dots,n$ olur. Buradan

$$a_1(t) = \int y_1(t)dt + c_1$$

ve

$$a_i(t) = y_i(t) + a_1(t)$$
$$a_i(t) = y_i(t) + \int y_1(t)dt + c_1, \quad i = 2,3,\dots,n$$

olarak elde edilir. Ayrıca $[y_1\, y'_1] \neq 0$ olduğundan $[a'_1\, a''_1] \neq 0$ olup, a_1 eğrisi regülerdir. Bu şekilde elde edilen $a_1, a_2, \dots, a_n$ eğrileri istenilen koşulları sağlayan eğrilerdir. □

KAYNAKLAR (REFERENCES)

[1] R.G. Aripov, D. Khadjiev, The Complete system of global differential and integral invariants of a curve in Euclidean geometry, *Russian Mathematics*, vol. 51, no. 7, pp. 1-14, 2007.

[2] W. Blaschke, Affine Differentialgeometrie, Springer, Berlin, 1923.

[3] R.B. Gardner, G.R. Wilkens, The fundamental theorems of curves and hypersurfaces in centro-affine geometry, *Bull. Belg. Math. Soc.*, vol. 4, pp. 379-401, 1997.

[4] S. Izumiya, T. Sano, Generic afine differential geometry of space curves, *Proceedings of the Royal Society of Edinburg*, vol. 128, no. A, pp. 301-314, 1998.

[5] D. Khadjiev, The Application of Invariant Theory to Differential Geometry of Curves. Fan Publ, Tashkent, 1988.

[6] D. Khadjiev, Ö. Pekşen, The Complete system of global differential and integral invariants for equi-affine curves, *Differential Geom. Appl.*, vol. 20, pp. 167-175, 2004.

[7] H. Liu, Curves in affine and semi-Euclidean Spaces, *Result. Math.*, vol. 65, pp. 235-249, 2014.

[8] Y. Sağıroğlu, Affine Differential Invariants of Curves: The Equivalence of Parametric Curves in Terms of Invariants. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.

[9] Y. Sağıroğlu, The Equivalence problem for parametric curves in one-dimensional affine space, *Int. Math. Forum*, vol. 6, no. 4, pp. 177-184, 2011.

[10] P.A. Schirokow, A.P. Schirokow, Affine Differentialgeometrie, Teubner, Leipzig, 1962.

[11] B. Su, Affine Differential Geometry, Science Press, Beijing, 1983.