Anemon Muş Alparslan Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi 2019 7(1) 59–69

Journal of Social Sciences of Mus Alparslan University

anemon

Derginin ana sayfası: http://dergipark.gov.tr/anemon

Araştırma Makalesi ● Research Article

Matematik Öğretmeni Adaylarının Geometrik Şekillerin Elemanları ile İlgili Konu Alan Bilgilerinin Geometer's Sketchpad Yardımıyla Geliştirilmesi

Development of Preservice Middle School Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge about Elements of Geometric Shapes

Tuğba Uygun [a,*]

[a] Dr. Öğr. Üyesi, Alanya Alaaddin Keykubat Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, 07425, Antalya/Türkiye.
ORCID: 0000-0001-5431-4011

MAKALE BİLGİSİ

Makale Geçmişi:
Başvuru tarihi: 19 Mart 2018
Düzeltme tarihi: 16 Mayıs 2018
Kabul tarihi: 24 Mayıs 2018

Anahtar Kelimeler:
Temel Eleman
Yardımcı Eleman
Geometrik Şekiller
Matematik Öğretmen Adayı
Geometer's Sketchpad

ÖZ

Çalışmanın amacı ortaokul matematik öğretmeni adaylarının (OMÖA) geometrik şekillerin elemanlarıyla ilgili alan bilgilerinin dinamik geometri ortamında nasıl geliştirdiklerini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda tasarlanan çalışmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Araştırma sürecine ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programına kayıtlı 23 kişi katılmıştır. Araştırmanın verilerini toplu sınıf tartışmalarının video kayıtları, Geometer's Sketchpad programıyla yaptıkları etkinliklerin bilgisayar ortamındaki kayıtları ve doldurdukları etkinlik kâğıtları oluşturmaktadır. Veri analiz kısmında Smart'ın (1998) geometrik şekillerin inşa edilmesi adımları, çalışmanın kategorileri olarak kullanılmıştır. Araştırma bulguları, OMÖA'nın bu elemanlarla ilgili alan bilgilerini ve öğrenmelerini teknoloji yardımıyla daha kolay ve etkili bir şekilde analiz ederek ve anlayarak geliştirebildikleri görülmüştür. Ayrıca bu elemanların önemine ve rollerine odaklanılarak OMÖA'nın anlamalarının sağlandığı tespit edilmiştir.

ARTICLE INFO

Article history:
Received March 19, 2018
Received in revised form May 16, 2018
Accepted May 24, 2018

Keywords:
Main Element
Auxiliary Element
Geometrical Figures
Preservice Mathematics Teacher
Geometers' Sketchpad

ABSTRACT

The aim of the study is to examine how preservice middle school mathematics teachers (PMSMT) developed their subject matter knowledge about elements of geometric shapes in the dynamic geometry environment. In the study designed for this purpose, case study was used from qualitative research designs. 23 students enrolled in the undergraduate program of elementary mathematics education participated in the research process. The data of the research were composed of video recordings of collective class discussions, computer-generated records of the activities performed by Geometer's Sketchpad program and activity papers that they fill out. In the data analysis section, Smart's (1998) steps of constructing geometric shapes were used as categories of study. The research findings showed that the PMSMT could develop and understand the field knowledge and learnings of these members more easily and effectively with the help of technology. It has also been determined that the PMSMT have provided meaning by focusing on the importance and roles of these elements.

1. Giriş

Konu alan bilgisi öğretmenlerin sınıflarında öğretimlerini yerine getirmeleri için ihtiyaç duydukları matematiksel bilgi olarak tanımlanabilir (Ball, Hill ve Bass, 2005; Hill, Ball ve Schilling, 2008; Hill, Rowan ve Ball, 2005). Konu alan bilgisi matematik öğretmenleri için çok önemlidir çünkü temel matematiksel kavramların anlaşılması, matematiksel konular arasındaki ilişkinin ve matematiksel fikirlerin yapılarının anlaşılmasını sağlamaktadır (Ma, 1999). Birçok çalışmada yeterli konu alan bilgisine sahip öğretmenlerin eğitimde önemli bir role sahip olduğu görülmüştür çünkü öğretmenlerin daha detaylı ve zengin kavrayışa sahip oldukları matematiksel kavramların öğretimlerini daha faydalı bir şekilde yerine getirdikleri belirtilmiştir. Konu alan bilgisinin bu etkisinin nedeni olarak matematik öğretimi için sahip olunması gereken diğer bilgi çeşitleriyle ilişkili olmasıdır. Gerekli konu alan bilgisine sahip olan öğretmenler öğrencilerinin düşünmelerini daha kolay

* Sorumlu yazar/*Corresponding author*.
e-posta: tugba.uygun@alanya.edu.tr

http://dx.doi.org/10.18506/anemon.407666

anlamakta ve öğretimleriyle ilgili daha doğru kararlar vermektedir (Hill ve Ball, 2004). Ayrıca, öğretmenlerin gereksinim duyduğu bu bilgi ve becerileri lisans eğitimleri sürecinde edinmeleri gerekmektedir (Chapman, 2007). Bu yüzden, öğretmen yetiştirme programları gelecekte başarılı matematik öğretmenlerinin yetiştirilmesi açısından önemlidir. Dolayısıyla, öğretmen adaylarına eğitimleri sürecinde gerekli bilgileri edinmeleri ve deneyim kazanmaları, öğrenme ortamlarının tasarlanması ve olanakların sunulması gerekmektedir (Bryan, 2003; Turner, Wood, Montoya, Essien-Wood, Neal ve Escontrias, 2012). Bu nedenle, literatürde öğretmen adaylarının konu alan bilgilerinin geliştirdikleri çalışmaların arttırılmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Böylelikle, öğretmenlerin yeterli konu alan bilgisine sahip olmadan mesleğe atılmaları gelecekte yaşayacakları muhtemel problemleri giderilebilir (Ball, 1988).

Matematik öğretmeni adayları gerekli geometrik bilgi ve becerileri onları sorgulamaya ve anlamaya yönlendiren etkinlik ve görevlerle elde edebilirler. Bu yüzden, öğrenenlere bu türde etkinlik ve materyallerle edindikleri deneyimlerle geometrik düşünme becerilerini geliştirebildikleri ve geometrik kavramlarla ilgili algılarının genişletildiği olanaklar sağlanmalıdır (Han, 2007; Henningsen ve Stein, 1997). Bu durum ancak tümevarımsal ve tümdengelimsel düşünmelerle geometrik kavramların öğrenilmesinin ve bu türde geometrik etkinliklerinin sağlandığı bir sınıf atmosferi ile sağlanabilir (Henningsen ve Stein, 1997; National Council of Teachers of Mathematics, 1991). Bu açıdan, öğretmen adaylarının geometrik kavramları tam olarak öğrenebilmesi için çeşitli bilgi ve becerileri kazandığı deneyimlerle ilgilenilmelidir (Han, 2007; Henningsen ve Stein, 1997).

Geometri öğrenmek için ortamların oluşturulmasında dinamik geometri yazılımlarının kullanılması faydalıdır çünkü bu yazılımlar birçok geometrik kavramın ve geometrik şeklin farklı şekillerde kolayca oluşturulmasını sağlamaktadır. Geometer's Sketchpad gibi dinamik geometri yazılımları kullanıcıların çizim ve ölçümler yapabildiği, çizimleri hareket ettirebildiği, bazı özelliklerinin korunmasına rağmen şekillerin boyutlarının orantısal bir şekilde değiştirebildiği teknolojik araçlar olarak ifade edilmektedir (Jackiw, 2001). Öğrenci, öğretmen ve bu alanda uzman olan birçok kişi geometri öğretiminde dinamik geometri yazılımlarının faydalı olduğu görüşünü savunmaktadır (NCTM [National Council of Teachers of Mathematics], 2000). Bu araçlarla öğrenenler geometrik şekil ve kavramları araştırır, yorumlar ve onlarla ilgili algılarını oluştururlar (Jones, 2000; Leung ve Lopez-Real, 2002; Liang ve Sedig, 2010; Mariotti, 2002; Marrades ve Gutiérrez, 2000). Dinamik geometri yazılımları geometriyi öğrenmek ve öğretmek için yeni bakış açıları sunmaktadır (Healy ve Hoyles, 2002; Straesser, 2002). Dinamik geometri yazılımları kullanarak öğrenciler geometrik şekilleri ve kavramları manipüle etme, gözlemleme, test etme, hareket ettirme, sürükleme, animasyon ekleme, yeniden boyutlandırma ve kaydetme gibi eylemleri yerine getirebilir ve böylece eylemleri hakkında anlık dönütler elde edebilirler (Dye, 2001; Forsythe, 2007; Hill ve Hannafin, 2001; Laborde 2001). Bu noktada, dinamik geometri yazılımlarıyla gerçekleştirilen geometrik inşalar gerekli geometrik bilgilerin elde edildiği matematiksel etkinliklerin tasarlanması ve hazırlanmasında kullanılabilmektedir. Literatürde, dinamik geometri yazılımlarının kullanılarak geometri alan bilgilerinin kazanıldığı birçok çalışma bulunmaktadır (De Villiers, 2003; Hoyles ve Healy, 1999; Jones, 2000; Leung ve Lee, 2013). Bu çalışmalar belirtilen geometrik inşaların yapılması ve bu inşaların hareket ettirilerek özelliklerinin araştırılmasına odaklanmaktadır. Geometrik inşaların oluşturulması ve incelenmesi sürecinde çeşitli yaş seviyesindeki öğrenenler varsayımlarda bulunabilir, bunları tartışabilir, matematiksel açıklamalar oluşturabilir ve geometrik ispatlamalar yapabilir (Christou vd., 2004; Goldenberg ve Cuoco, 1998). Bu özelliklerin yanı sıra dinamik geometri yazılımlarıyla çizimler ve geometrik çözümler kolayca oluşturulabilir (Straesser, 2002).

Bu açıklamalar doğrultusunda çalışmada matematik öğretmeni adaylarının konu alan bilgilerinin dinamik geometri yazılımı kullanılarak nasıl geliştirilebileceği araştırılmıştır. Araştırmada "Teknoloji destekli bir öğrenme ortamı ortaokul matematik öğretmeni adaylarının geometrik şekillerin elemanları ile ilgili konu alan bilgilerini nasıl etkilemektedir?" araştırma probleminin cevabı araştırılmıştır.

2. Yöntem

Araştırma nitel araştırma olarak tasarlanmıştır. Bu sayede araştırma problemi ayrıntılı bir şekilde verilerin de kullanılmasıyla cevaplanmıştır.

2.1. Araştırma Modeli

Bu çalışma nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması olarak tasarlanmıştır. Çalışmada belirli bir durum ve sürecin derinlemesine anlaşılması ve tartışılmasına odaklanmıştır (Merriam, 2009). Bu yöntemde olay canlı ve gerçek bir şekilde ele alınarak bütüncül ve anlamlı karakteristikleri belirlenerek incelenir ve anlamlandırılır (Gall, Gall ve Borg, 2007). Ayrıca, durum çalışması çeşitlerinden bütüncül tek durum desen çeşidine göre çalışma tasarlanmıştır (Yin, 2009). Bu desende tek bir analiz birimine odaklanılmaktadır. Bu durum ayrıntılı şekilde farklı bakış açıları düşünülerek incelenmektedir. Araştırmacı bu desene göre olguyu derinlemesine araştırır, anlar ve detaylı bir şekilde raporlaştırır (Merriam, 2009; Stake, 1995).

2.2. Çalışma Grubu

Araştırmanın örneklemini yirmi üç ortaokul matematik öğretmen adayı (OMÖA) oluşturmaktadır. Katılımcılar Türkiye'nin kuzeyindeki bir üniversitede İlköğretim Matematik Öğretmenliği lisans programına kayıtlı öğrencilerdir. Katılımcıların on ikisi bayan ve on biri erkektir. Araştırmanın katılımcıları amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme stratejisine göre seçilmiştir. Örneklem seçim ölçütü geometrik kavramlarla ilgili bilgilere aşina olmak ve lisans derslerinden Geometri dersini önceki dönemlerde almış olmak olarak belirlenmiştir. Bu ders kapsamında öğrencilere ortaokul matematik müfredatında öğretilen Öklid geometrisi ile ilgili kavramlar ayrıntılı bir şekilde öğretilmektedir. Bu lisans dersini alan öğrencilerin de ders içeriğinde yer alan Öklid geometrisindeki kavramlara aşina kazanmaları beklenmektedir. Bu yüzden, katılımcılar bu programa kayıtlı ve bu lisans dersini almış üçüncü sınıf öğrencileri arasından seçilmiştir.

2.3. Veri Toplama Aracı

Çalışmada geometrik şekillerin temel ve yardımcı elemanlarına odaklanılmıştır. OMÖA'nın bu kavramlarla ilgili iyi bir konu alan bilgisine sahip olmaları beklenmektedir; çünkü ortaokul matematik öğretim programına göre sekizinci sınıf öğrencilerinin bu şekilleri anlamaları, inşa etmeleri ve gerekli özellikleri bilmeleri gerekmektedir. Bu açıdan, dinamik geometri yazılımı programları kullanılarak geometrik şekillerin elemanlarının inşa edilme yöntemleri ve özellikleri incelenebilir. Bu konuyla ilgili OMÖA'nın konu alan bilgilerini geliştirmek amacıyla etkinlik kâğıtları hazırlanmıştır. Diğer bir ifadeyle, etkinlik kâğıtları geometrik şekillerin elemanlarının inşa edilmesi ve ilgili özelliklerin incelenmesine odaklanılarak hazırlanmıştır. Ayrıca, bu etkinlikler dinamik geometri yazılımlarından Geometer's Sketchpad kullanılacak şekilde hazırlanmıştır. Etkinlik kâğıdında öğretmen adaylarının geometrik şekillerin oluşum ve tanımlama süreçlerinde temel ve yan elemanların rollerini araştırmalarını ve sorgulamalarını sağlayacak problemler yer almaktadır. Örneğin, yükseklikle ilgili etkinlik kâğıdında "Herhangi bir üçgen çizip bu üçgenin yüksekliğini inşa ediniz? Bu yüksekliğin konumunu üçgen çeşitlerine göre inceleyiniz. Bu üçgenin bütün yüksekliklerini ve birbirlerine göre durumlarını inceleyiniz. Yükseklikler kaç noktada kesişmektedir? Bu kesişim nokta veya noktalarının konumlarını üçgen çeşitlerini düşünerek inceleyiniz." gibi sorular yer almaktadır ve öğretmen adaylarının bunların cevaplarını araştırmaları istenmektedir.

2.4. Verilerin Toplanması

Çalışmada, OMÖA etkinlik kâğıtlarında yer alan problemleri Geometers' Sketchpad kullanarak cevaplamışlardır. Ayrıca, etkinlik kâğıtlarının uygulama sürecinde OMÖA'nın matematiksel açıklama, ispat ve doğrulama ifadeleri oluşturmaları ve bunları sosyal bir öğrenme ortamında tartışmaları sağlanmıştır. Araştırma verisi toplu sınıf tartışmaların video kayıtları, Geometer's Sketchpad programıyla yaptıkları etkinliklerin bilgisayar ortamındaki kayıtları ve doldurdukları etkinlik kâğıtları kullanılarak toplanmıştır. Veri toplama sürecinde öncelikle OMÖA tasarlanan etkinliklerle Geometer's Sketchpad programını kullanarak uğraşmıştır. Katılımcılar programda elemanları inşa etmiş, özelliklerini araştırmış ve geometrik ispatlar oluşturmuştur. OMÖA etkinlik kâğıtlarını bireysel doldurduktan sonra oluşturdukları geometrik inşaları, ispatları, süreç ve sonuçlarla ilgili açıklamalarını toplu sınıf tartışmasına katılarak tartışmıştır. OMÖA tartışma sürecinde etkinliklerde yer alan görevleri yerine getirmişler ve bu süreçte sorgulamalarını tartışmayla gerçekleştirmişlerdir. Tartışmaya katılımın sınıf içerisindeki normlardan biri olması ve OMÖA'nın tartışmalara katılmaları hususunda desteklenmelerinden dolayı kavramaları bu şekilde gözlemlenmiştir. Ayrıca, OMÖA'nın etkinliklerle ilgilenme süreçleri de kavramalarının değerlendirilmesi açısından göz önünde bulundurulmuştur. Bu açıdan etkinlik kâğıtlarındaki problemlere verilen cevapların tartışma sürecinde düzeltilmesi ve tartışmada sorgulamanın sonlanması çalışmada ilgili kavramın öğrenilmesi olarak kabul edilmiştir. Toplu sınıf tartışmaları tamamlandıktan sonra video kayıtları doküman haline getirilmiştir.

2.5. Verilerin Analizi

Çalışmada nitel veri analizi tekniklerinden betimsel analiz kullanılmıştır. Smart'ın (1998) geometrik şekillerin inşa edilmesi adımları çalışmanın kategorileri olarak kullanılmıştır. Bu adımlar çalışmanın kategorileri olarak kullanıldığından çalışmada kullanılan analiz tekniği betimsel analizdir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu dört adım Smart'ın (1998) çalışmasında açıklandığı şekilde kullanılmıştır. İlk adım analiz basamağıdır. Öğrenen çizimde istenenlerin sağlandığını varsayarak çizimi belirtildiği şekilde yapar. Ayrıca, problemde açıklanan bilgiler ve belirtilmeyen ama gerekli bilgiler arasında ilişkilendirme yapar. İkinci adım, inşa etme basamağıdır. Öğrenen istenilen şekli belirtilen bilgilere dayanarak inşa eder. Üçüncü adım, ispat basamağıdır. Burada, öğrenen geometrik şekli inşa ettikten sonra meydana getirdiği çizimin problemde istenilen çizim olduğunu ispatlar. Son adım, tartışma basamağıdır. Öğrenen problem çözümüyle ilgili çeşitli çözümler, inşa süreçleri ve ispatlar tartışılır. Diğer bir ifadeyle, ek olarak oluşan ispat ve doğrulamalar ve ek açıklamalar bu adımda incelenmiş ve kodlanmıştır. Bu adımda, ayrıca alternatif doğrulamalar ve matematiksel fikirlerin ispatları kodlanır ve basamaklara yerleştirilir. Bu adımlara ilişkin sunulan örnek ve direk alıntılar metin içerisinde büyük harfle ve köşeli parantez kullanılarak belirtilmiştir. Çalışmada bu kategoriler kullanılarak elde edilen verilen iki temel başlık altında toplandığı görülmüştür. Bu iki temel başlık çalışmanın temaları olarak belirlenmiştir. Tartışılan matematiksel kavramlar temel ve yardımcı elemanlar olmak üzere iki temel tema altında incelenmiştir. Sonrasında, OMÖA üçgenlerin, dörtgenlerin ve çemberin temel ve yardımcı elemanlarını irdelemişlerdir. OMÖA'nın Geometer's Sketchpad (GSP) kullanarak yaptıkları geometrik inşalar ve tartıştıkları fikirler bu kodlar ve temalar kullanılarak analiz edilmiş ve böylelikle onların konu alan bilgilerindeki gelişim araştırılmıştır.

Araştırmanın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak amacıyla veri ve araştırmacı çeşitlemesi yöntemleri kullanılmıştır. Veri, etkinlik kâğıdı ve video kayıtları çeşitli araçlar kullanılarak toplanmıştır (Creswell, 2009; Creswell, 2012). Ayrıca, alanında uzman iki kişi tarafından bağımsız bir şekilde kodlanmıştır. Uzmanlar kodlama listelerini bir araya gelerek tartışmışlar ve fikir birliği sağlamaya çalışmışlardır. Kodlayıcılar arasındaki uyum %90 olarak belirlenmiştir. Ayrıca, katılımcı görüşü strateji kullanılmıştır. Nitel veri analiz sürecinde elde edilen bulgular ve analize ilişkin yapılan çıkarımlar katılımcılarla tartışılarak incelenmiştir. Bu katılımcılarla mülakat yapılarak veri analizi ile ilgili yapılan çıkarımların doğruluğu ile ilgili görüşleri alınmıştır (Creswell, 2009; Creswell, 2012).

3. Bulgular

Tartışma süreci iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda geometrik şekillerin temel elemanları olan açı ve kenar olmak üzere iki eleman üzerinde durulmuştur. Diğer kısımda şekillerin yardımcı elemanları olan kenarortay, açıortay, orta dikme, yükseklik, simetri ekseni ve köşegen gibi elemanlar tartışılmıştır.

3.1. Geometrik Şekillerin Temel Elemanları

OMÖA geometrik şekillerin oluşturulması ve tanımlanması hakkında tartışmışlardır. Bu süreçler de bu şekillerin oluşması için gerekli olan elemanlar olan kenar ve açı hakkında konuşulmuştur. Üçgen ve dörtgenlerin açı ve kenarlarını ve çemberlerin de merkez noktası, yay ve çap elemanları üzerinde durulmuştur. Temel elemanların oluşumu ve rolleri hakkında şöyle tartışılmıştır:

Araştırmacı: Kareyi nasıl inşa edebiliriz?

$Ö_8$: Bir şekli oluşturmak için kenarlar ve açılar kullanılan en temel elemanlardır.

Araştırmacı: Kareyi oluşturmada nasıl kullanıyoruz peki?

$Ö_8$: Aynı uzunlukta olan dört doğru parçası yani kenarlar. Birbirlerinin uç noktalarında birbirleriyle dik kesişirler yani 900'lik açılar vardır. [ANALİZ]

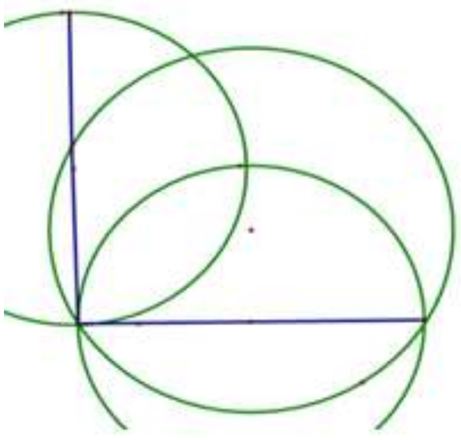
Araştırmacı: Peki bu kenarları ve açıları nasıl birleştiriyoruz?

$Ö_5$: Öncelikle bir doğru parçası çizeriz. Bu doğru parçasının kiriş olduğu bir çember çizeriz. Daha sonra bu kirişin bir noktasından çember üzerindeki herhangi noktaya bir doğru parçası çizilir. Daha sonra bu doğru parçası kiriş uzunluğu kadar uzatılır. 900'lik bir açı ve kenar uzunlukları eşit iki doğru parçası oluşturulmuş olur. Bu işlemler bu dik kenarların ikisi için de tekrarlandığında bir kare oluşturulmuş olur. (Şekil 1) [İNŞA ETME]

Araştırmacı: Bu açının dik olduğunu nerden biliyoruz?

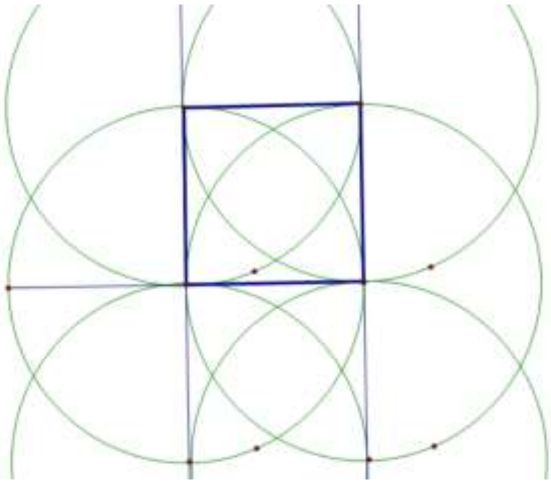
$Ö_5$: Çapı gören açının ölçüsü 900'dir böylelikle dik kesişen iki kenar oluşturulur. [İSPAT]

Şekil 1. Kirişlerden Kare İnşa Etme



$Ö_6$: Birbirine teğet ve yarıçap uzunlukları eşit olan çemberler çizip bu çemberlerin merkez noktaları birleştirilerek bir kare oluşturabiliriz. Bu kenarların her biri bir çembere teğettir [*TARTIŞMA, ALTERNATİF İNŞA ETME*]. Teğet doğrulara merkezden çizilen doğrular birbirine diktir. Böylelikle, kare oluşturulabilir. (Şekil 2) [*TARTIŞMA, ALTERNATİF İSPAT*]

Şekil 2. Teğet Doğru Parçalarıyla Kare İnşa Etme



Toplu sınıf tartışması sürecinde OMÖA öncelikle kendi çözüm yollarını düşünmüşler sonrasında diğerlerinin çözümlerini incelemişlerdir. OMÖA toplu sınıf tartışmasında *analiz* kısmında açı ve kenar gibi dörtgenlerin ana unsurlarının bir kare *inşa etme*deki rollerine odaklanarak açıklamış ve incelemişlerdir. Bu açıklama yukarıda belirtildiği gibi $Ö_8$ tarafından belirtilmiştir. Tartışmada, iki farklı geometrik inşaat stratejisi kullanılmıştır. Öncelikle, yukarıdaki tartışma sırasında $Ö_5$: "Bir kirişin geometrik inşa sürecinden yararlanarak bir inşa yolu oluşturdu ve bu geometrik inşa sürecini, bir çemberin kirişi ve çapı gören çevre açının ölçüsü açısı ile ilgili bilgiler kullanarak kanıtladı." Böylece tartışmanın ispat kısmı oluşturulmuştur. Ayrıca, analiz sürecinin tartışma kısmında $Ö_6$: "Alternatif inşa ve ispat stratejileri sunarak açı ve kenar gibi temel elemanların rollerini alternatif bir inşa yolu ve kanıt sağladı." Böylece, tartışma süreciyle OMÖA alternatif çözüm ve ispat yolları oluşturarak temel elemanların karenin oluşumundaki rolünü ayrıntılı bir şekilde incelemiş ve öğrenmişlerdir. *Tartışma* kısmı *alternatif inşa* ve *alternatif ispat* stratejileri sunduğu için OMÖA'nın konuyu analiz edip anlamalarını sağlamıştır. Ayrıca, OMÖA dinamik geometri yazılımı olan GSP kullanarak farklı inşa etme ve ispat yollarını kullanarak incelemişler ve konuyu anlayabilmişlerdir. GSP onların inşa süreçlerini kolaylaştırarak temel elemanların rollerini kolaylıkla analiz etmelerini sağlamıştır.

3.2. Geometrik Şekillerin Yardımcı Elemanları

Geometrik şekillerin yardımcı elemanları ile ilgili OMÖA'nın çalışmaları üç kısımda raporlaştırılmıştır. İlk kısımda, üçgenlerin yardımcı elemanları tartışılmıştır: kenarortay, açıortay, orta dikme ve yükseklik. Sonrasında, OMÖA dörtgenlerin yardımcı elemanlarını incelemişlerdir; köşegen ve simetri ekseni. Ardından, bu kısım OMÖA'nın çemberin yardımcı elemanlarını tartışmalarıyla sonlandırılmıştır: kiriş, kesen ve yay. OMÖA her bir yardımcı elemanın tanımı ve GSP yardımıyla inşa edilmesine odaklanmıştır. GSP yardımıyla yardımcı elemanları inşa edip tartışmış ve böylece alternatif inşa etme stratejileri ve ispatlar üretmişlerdir. Ayrıca, OMÖA'nın yardımcı elemanlarıyla ilgili kavramsal anlamaları ve alan bilgilerini geliştirmeleri sağlanmıştır. Katılımcıların yardımcı elemanlar ile ilgili çalışma ve öğrenme süreçleri aşağıdaki açıklamalarla yardımcı elemanlardan olan yükseklik ve diklik merkezi kullanılarak örneklendirilmiştir.

Diğer yardımcı elemanlar ile ilgili öğrenme ve inceleme süreçleri benzer şekilde her bir kısım için gerçekleştirilmiştir.

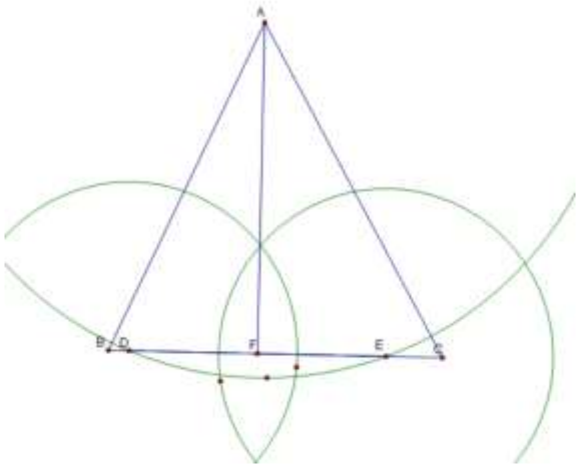
OMÖA toplu sınıf tartışmalarının ilk aşamasında üçgenlerin yardımcı elemanları olan kenarortay, açıortay, orta dikme ve yüksekliği sırasıyla tartışmışlardır. OMÖA öncelikle bu yardımcıların inşa edilmesine odaklanmışlar ve sonrasında bunların özelliklerine odaklanmışlardır. Tartışmalar üçgenin bütün yardımcı elemanları için bu doğrultuda gerçekleşmiştir. Örneğin, yükseklikle ilgili tartışmaların olduğu kısımda yüksekliğin inşası ve yükseklikle ilgili özellikler incelenip tartışılmıştır. Katılımcılar sınıflarında GSP kullanarak üçgenlerin yüksekliklerinin inşa edilmesine odaklanmışlardır. Bu konuda ilk önce üçgenlerin inşası tartışılmıştır. Öğrenciler genellikle ilk çizimlerde dar açılı üçgenlerle ilgilenmişler ve çizimlerini onun üzerinde gerçekleştirmişlerdir. Sonrasında, araştırmacının sorusuyla yüksekliğin inşası ile ilgili tartışma süreci aşağıdaki gibi başlatılmıştır:

$Ö_9$:... Yükseklik, üçgenin köşesinden karşıdaki kenarı dik kesecek şekilde çizilen doğru parçasıdır [*ANALİZ*]... Üçgenin A köşesinin merkez olduğu bir çember çizeriz. Bu çember üçgenin BC kenarını iki noktada kesmektedir. Bu noktaları D ve E olarak isimlendirelim. D ve E noktalarının orta noktasını bulalım. D ve E merkezli yarıçapları eşit uzunlukta olan iki çember çizeriz. Bu iki çember birbirini iki noktada keser. Bu noktaları doğru parçası kullanarak birleştirdiğimizde bu doğru parçasının DE'yi kestiği nokta DE'nin orta noktasıdır. Bu noktayı üçgenin A köşesiyle birleştirdiğimizde A köşesine ait yüksekliği inşa etmiş oluruz...(Şekil 3) [*İNŞA ETME*]

$Ö_9$'un yaptığı açıklamada, yüksekliğin inşa sürecinde yüksekliğin tanımından faydalanılmıştır. Böylelikle yükseklik *analiz* edilerek inşa sürecinin nasıl gerçekleştirileceği hakkında akıl yürütülmüştür. Diğer bir ifadeyle, yüksekliğin görüntüsü ve tanımı düşünülerek inşasına odaklanılmıştır. Sonrasında bir doğru parçasının orta noktasını inşa etme basamaklarından faydalanarak üçgenin A köşesine ait yüksekliği Şekil 3'teki gibi oluşturulmuştur. Bu açıklamayla yüksekliğin *inşa etme* süreci açıklanmıştır. Sonrasında araştırmacı tartışmayı bu inşa etme sürecinin matematiksel olarak ispatlanması doğrultusunda yönlendirmiştir. Bu amaçla $Ö_{11}$ Şekil 3'de gösterilen bu inşa etme sürecinin ispatı olarak şöyle açıklama yapmıştır:

$Ö_{11}$: DE yayı üçgenin BC kenarını D ve E noktalarında kesmektedir ve DE doğru parçasını oluşturmaktadır. Böylelikle, DE doğru parçası A merkezli çemberin kirişi haline gelir. Merkezden kirişe indirilen dikmeler kirişi eşit iki paçaya ayırır. Bu yüzden, AF doğru parçası BC kenarına ait yüksekliktir [*İSPAT*].

Şekil 3. Ö9'un Yükseklik İnşa Etme Stratejisi

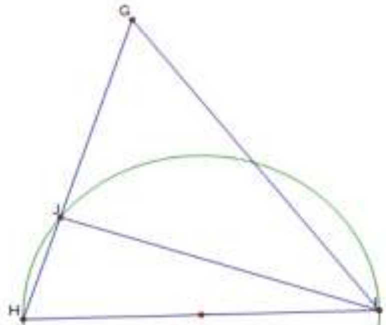


Böylelikle, Şekil 3'de gösterilen inşa etme sürecinin ispatı doğru bir şekilde açıklanmıştır. Araştırmacı, OMÖA'na yüksekliğin başka bir strateji kullanılarak inşa edilip edilmeyeceğini sorarak toplu sınıf tartışmasını devam ettirmiştir. $Ö_{12}$ bu doğrultuda üçgenin yüksekliğinin inşası için farklı bir strateji sunmuştur ve şöyle açıklamıştır:

$Ö_{12}$: … GHI üçgeninde önce HI kenarının orta noktasını buluruz. HI kenarının orta noktasının merkez olduğu ve HI kenar uzunluğunun yarısı kadar uzunlukta yarıçapı olan bir çember çizeriz. Bu çember üçgeni iki noktada keser. Bu kesişim noktaları farklı iki kenardadır. I noktasını bu çemberin GH kenarını kestiği noktayla birleştirirsek I köşesine ait yüksekliği inşa etmiş oluruz… [*TARTIŞMA, ALTERNATİF İNŞA ETME*]

$Ö_{12}$, bir üçgenin yüksekliği için Şekil 4'te belirtilen stratejiyi sunarak *tartışma* kategorisi için *alternatif inşa etme* süreci sağlamıştır. Diğer stratejiden farklı olarak bu yolla, orta nokta belirlenip çemberin merkez noktası olarak kullanılmıştır. Bu *alternatif inşa etme* stratejisinin ispatı $Ö_{12}$ tarafından şöyle ifade edilmiştir "oluşturulan HIJ dik üçgeninde dik açı HI'nın orta noktasını merkez alan çemberin çapını görmektedir. Çapı gören açının ölçüsünün 90^0 olduğu bilgisinden yola çıkarak IJ doğru parçasının GH kenarını dik keser". Burada *tartışma* kategorisi için *alternatif ispat* sunulmuştur.

Şekil 4. Alternatif Yükseklik İnşa Etme Stratejisi



Burada, dar açılı bir üçgenin yüksekliğinin inşa edilmesi ile ilgili tartışma ve inceleme süreci sonlandırılmıştır. OMÖA üçgenin yardımcı elemanlarından biri olan yüksekliğin oluşması ve özellikleri üzerine odaklanmışlardır. Tartışma sürecinde bir üçgenin GSP kullanılarak iki farklı yolla inşa edilebileceği ortaya çıkmıştır. Bu yollar Şekil 3 ve Şekil 4'te gösterildiği şekilde gerçekleşmiştir. Bu stratejilerin matematiksel ispatı doğru bir şekilde OMÖA tarafından açıklanmıştır. Smart'ın (1998) geometrik inşa adımlarına göre, bir üçgen yüksekliğinin yapımı hakkındaki tartışmanın yapısı Şekil 5'teki gibi özetlenebilir.

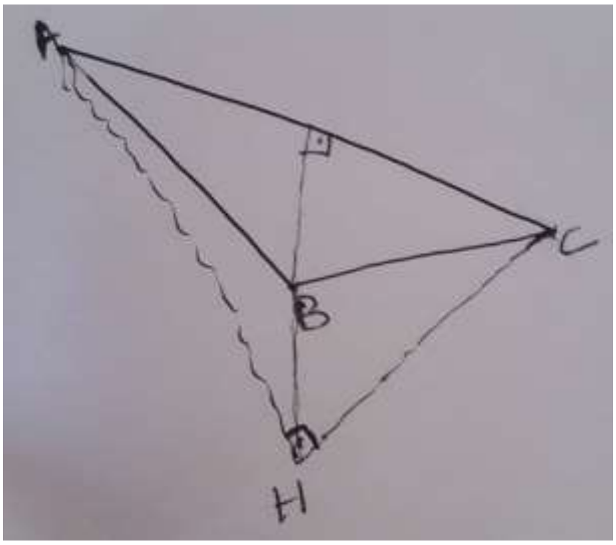
Şekil 5. Yükseklikle İlgili Toplu Tartışma Sürecinin Smart'ın (1998) Adımlarına Göre Analizi

Analiz	
Ö$_9$: ... Yükseklik, üçgenin köşesinden karşıdaki kenarı dik kesecek şekilde çizilen doğru parçasıdır…	
↓	
İnşa Etme	
Ö$_9$: ... Üçgenin A köşesinin merkez olduğu bir çember çizeriz. Bu çember üçgenin BC kenarını iki noktada kesmektedir. Bu noktaları D ve E olarak isimlendirelim. D ve E noktalarının orta noktasını bulalım...	
↓	
İspat	
Ö$_{11}$: DE yayı üçgenin BC kenarını D ve E noktalarında kesmektedir ve DE doğru parçasını oluşturmaktadır. Böylelikle, DE doğru parçası A merkezli çemberin kirişi haline gelir. Merkezden kirişe indirilen dikmeler kirişi eşit iki paçaya ayırır…	
↓	
Tartışma	
Alternatif İnşa Etme	Alternatif İspat
Ö$_{12}$: … GHI üçgeninde önce HI kenarının orta noktasını buluruz. HI kenarının orta noktasının merkez olduğu…	Ö$_{12}$: oluşturulan HIJ dik üçgeninde dik açı HI'nın orta noktasını merkez alan çemberin çapını görmektedir. Çapı gören açının ölçüsünün 90^0…

Diğer bir ifadeyle katılımcılar bir üçgenin yüksekliğinin yer aldığı bölgenin üçgen çeşitlerine göre farklılaştığını tartışmışlar ve analiz etmişlerdir. OMÖA dar açılı ve geniş açılı üçgenlerin yüksekliklerinin yer aldığı bölgenin değişip değişmediğini tartışmışlardır. Tartışmanın bu sürecinde OMÖA genellikle dar açılı üçgenler üzerinde çalışmışlardır. Araştırmacı katılımcıların yükseklikle ilgili bilgilerini daha iyi anlamak amacıyla OMÖA'nı diğer üçgen çeşitleri için de yükseklik inşa etmeleri hususunda yönlendirmiştir. Daha sonra katılımcıların çalışmaları sırasında bazılarının dik açılı üçgenin yüksekliklerini biraz zorlanarak çizdikleri görülmüştür. Burada, Ö$_2$ dik açılı bir üçgenin yüksekliklerinden iki tanesinin dik kenarlar olduğunu ve diğerinin de dik köşeden çıkıp hipotenüsü dik kestiğini belirtmiş ve *analiz* etmiştir. Ö$_2$, dik üçgende yüksekliğin konumunu doğru analiz etmiş ve gerekli açıklamayı yapmıştır. Ayrıca araştırmacı OMÖA'nın bazılarının geniş açılı üçgenlerin yüksekliğini inşa edemediğini ve bir kısmının da yanlış inşa etme işlemleri gerçekleştirdiğini görmüştür. Tartışma geniş açılı bir üçgende dar açıların olduğu köşelerden çizilen yüksekliklerin üçgenin düzlemde ayırdığı bölgelerden hangisinde olduğu yönünde gerçekleşmiştir. OMÖA tartışma sırasında bu dar açılardan indirilen yüksekliklerin üçgenin dış bölgesinde yer aldığını anlamış ve açıklamışlardır. Fakat katılımcılardan bazılarının geniş açılı üçgenlerin yüksekliklerini yanlış çizdiği görülmüştür (bkz. Şekil 6). Ö$_{23}$, geniş açılı bir üçgenin yüksekliklerinin yanlışlıkla aşağıdaki şekilde oluştuğundan bahsetmiştir:

Ö$_{23}$: Geniş açılı bir üçgenin yükseklikleri dış bölgededir ve yükseklikler karşı kenarı dik kestiğinden bizim dik bir açıya ihtiyacımız var (Şekil 6). [*ANALİZ*]

Şekil 6. Ö23'ün Geniş Açılı Üçgenler İçin Yanlış Yükseklik Çizimi



Sonrasında araştırmacı Ö$_{23}$'ün açıklamasının ve çiziminin yanlış kısımlarının fark edilmesi ve düzeltilmesi için tartışmayı şu şekilde yönlendirmiştir:

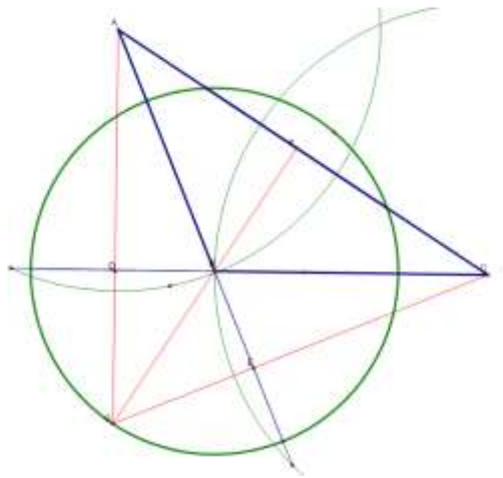
Araştırmacı: Ö$_{23}$'ün açıklaması ve çizimi hakkında ne düşünüyorsunuz?

Ö$_{20}$: Bunlar bu geniş açılı üçgenin yüksekliği olamaz. Yüksekliğin tanımına dayanarak, herhangi bir üçgende yüksekliği ancak bir köşeden başlatarak bu köşenin karşısındaki kenarı veya uzantısını dik kesecek şekilde oluşturulan doğru parçasıyla oluşturabiliriz... [*ANALİZ*]

Tartışmanın bu bölümünde, Ö$_{20}$, Ö$_{23}$'ün açıklaması ve çiziminde bazı düzeltmeler yaparak geniş açılı üçgenlerin yüksekliklerinin çizimi için doğru açıklamayı sağlamıştır. Böylelikle tartışmanın *analiz* kısmı için yeterli ve doğru bir açıklama yapılmıştır. Geniş açılı üçgenlerin yüksekliği ile ilgili OMÖA yüksekliğin tanımıyla ve özellikleri ile bilgilerini analiz etmişler ve sonrasında inşa etme sürecine geçmişlerdir. Ö$_{13}$ geniş açılı üçgenlerin yüksekliğinin inşasını GSP kullanarak şu şekilde gerçekleştirmiştir:

Ö$_{13}$: A köşesine ait yüksekliği inşa etmek için öncelikle BC kenarının uzantısı çizilir. A noktasını merkez alan bir çember çizilir. Bu çember çizdiğimiz kenarın uzantısını iki noktada keser. Bu iki noktanın arasında kalan doğru parçasının orta noktasını orta dikme inşa etme basamaklarını takip ederek buluruz. Sonrasında A köşesinden çizilen bir doğru parçasıyla bu orta noktasıyla birleştirdiğimizde A köşesinden BC kenarına indirilen yüksekliği inşa etmiş oluruz… (bkz. Şekil 7). [*İNŞA ETME*]

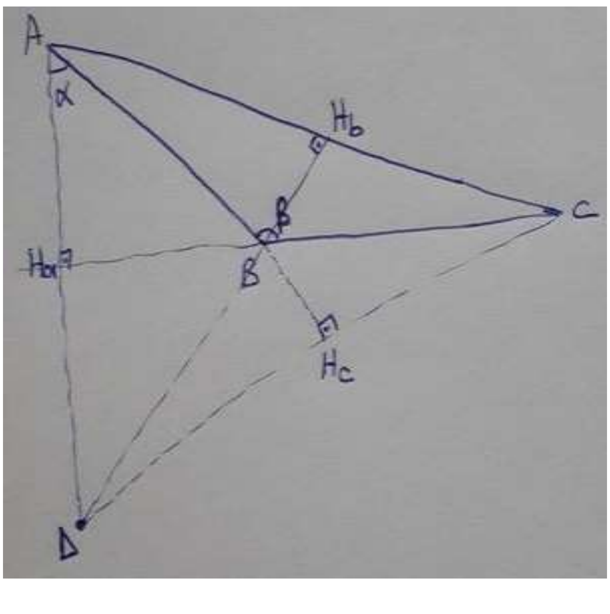
Şekil 7. Geniş Açılı Üçgenin Yüksekliklerinin Çizimi



Ö13 geniş açılı üçgenlerin yüksekliklerinin inşa etme sürecini doğru bir şekilde açıklamış ve etkin bir çizim sunmuştur. Ayrıca, bu kısımda GSP yardımıyla inşa sürecini çizim hatalarından uzak bir şekilde yapılmıştır. Ayrıca, GSP yardımıyla üçgenin köşeleri hareket ettirilerek yüksekliklerin konumlanmasının değişimi analiz edilmiş ve geniş açılı üçgenlerin yüksekliklerinin inşası incelenmiştir. Ayrıca, geniş açılı üçgenlerin yüksekliklerinin özellikleri GSP yardımıyla ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Böylelikle çalışmanın analizinde *inşa etme* basamağı doğru bir şekilde sağlanmıştır. OMÖA bu süreci incelemişler ve anlamışlardır. Sonrasında araştırmacı inşa etme için matematiksel bir açıklamanın oluşturulması için tartışmayı inşa etme sürecine OMÖA'nın ispat sağlaması amacıyla yönlendirmiştir. Bu kısım için ispat şu şekilde açıklanmıştır:

Ö8:… Yükseklik oluşumunda bir dik açı oluşmuş olur. Bu nedenle, geniş açılı üçgende dar açıdan indirilen dikme ile aslında bir dik açılı üçgen oluşturmuş oluruz. İndirilen dikmenin köşesi geniş açıyı oluşturan doğru parçalarının uzantısında olmalıdır çünkü elimizde bir geniş açı var. Bu nedenle, dik açılar oluşturmak için yükseklikler dış bölge üzerindedir ve $90^0 + \alpha = \beta$ olarak gösterebiliriz… (bkz. Şekil 8). [*İSPAT*]

Şekil 8. Yüksekliklerin inşasının ispatı



OMÖA geniş açılı üçgenlerin dar açılarının olduğu köşelerden indirilen yüksekliklerin inşasının ispatında üçgenin iki iç açısının ölçüsünün toplamının üçüncü açının dış açısının ölçüsüne eşit olduğu özelliğinden faydalanarak ispatlamışlardır. Böylelikle bu tartışma ve *inşa etme* süreci için doğru ve gerekli *ispat* sağlanmıştır. Bu tartışmada Ö23 ve Ö20 açıklamalarıyla tartışmanın *analiz* kısmını yüksekliğin tanımı ve açılardan faydalanarak açıklamışlardır. Sonrasında Ö13 doğru inşa etme basamaklarını sunmuş ve GSP'in özelliklerini kullanarak köşelerin konumunu üçgenin kenar ve açılarını hareket ettirerek geniş açılı üçgenlerin yüksekliklerini incelemiş ve ilgili özellikleri anlamışlardır. Son olarak tartışmanın ispat basamağı üçgenlerin açılarına ait özelliklerinden biriyle açıklanmıştır. Tartışmada sadece bir strateji belirlenebilmiştir. Bu yüzden, *alternatif inşa etme* ve *alternatif ispat* açıklamaları olmamıştır. Tartışmanın üçgenlerin yükseklikleri ile ilgili açıklamalar OMÖA'nın anlamalarıyla sonlanmıştır. Çalışmada üçgenlerin diğer yardımcı elemanları olan kenarortay, açıortay ve orta dikme için benzer tartışma ortamları oluşmuştur. OMÖA bu elemanların inşa sürecini ve ispatlanmasını üçgen çeşitleri için benzer adımları takip ederek yapmışlardır. Bu nedenle, diğer elemanlarla ilgili de benzer tartışma ortamları gözlemlenmiştir.

Geometrik şekillerin yardımcı elemanlarıyla ilgili yapılan tartışmaların ikinci kısmında dörtgenlerin yardımcı elemanları olan köşegen ve simetri ekseni ile ilgili olarak yapılmıştır. Dörtgen çeşitlerinde köşegenlerin çizimi kolay bir şekilde gerçekleşmiş ve OMÖA'nın köşegenlerle ilgili bilgilerinin yeterli olduğu görülmüştür. Ayrıca, OMÖA'nın dörtgen çeşitlerinde simetri eksenleriyle ile ilgili bilgilerinin eksik olduğu görülmüştür. Fakat bu süreci GSP'in komutlarının kolaylaştırdığı ve OMÖA'nın bu kısmı etkin bir şekilde anlayarak gerçekleştirdiği görülmüştür. Diğer bir ifadeyle, OMÖA, GSP kullanarak dörtgenlerin kiriş ve simetri eksenleri ile ilgili anlamalarını etkili bir şekilde gerçekleştirmişlerdir. Böylelikle bu konuyla ilgili etkin bilgiyi elde etmişlerdir.

Tartışmanın son kısmı çemberlerin yardımcı elemanları ile ilgili gerçekleştirilmiştir. Çemberin yardımcı elemanlarından kiriş, kesen ve yay ile ilgili tartışmalar olmuştur. OMÖA kesen ile ilgili tartışmalarında teğet çizerken zorlanmışlardır. Bu yüzden araştırmacı tartışmanın teğet ile ilgili olan kısmına odaklanmıştır. Bu tartışma araştırmacının teğet ile ilgili sorularıyla başlamıştır ve şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: Herhangi bir çembere üzerindeki herhangi bir noktadan nasıl teğet çizebiliriz?

Ö5: Teğet herhangi bir çemberi yalnız bir noktada kesen doğru parçasıdır. [*ANALİZ*]

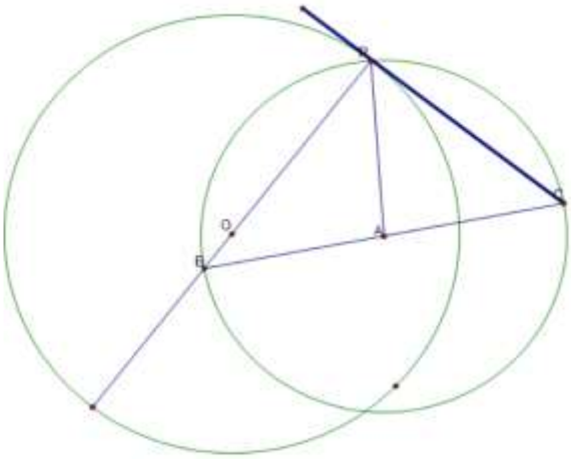
Araştırmacı: Peki teğeti nasıl inşa edeceğiz?

Ö5: …bu noktayı çemberin merkeziyle bir doğru parçasıyla birleştirdiğimizde bu doğru parçası ve teğet dik kesişirler… [*ANALİZ*]

Ö15: buradan hareketle bizim 90^0'lik bir açıya ihtiyacımız var. Bunun için öncelikle teğetin geçeği P noktasından başlayarak çemberin çapını çizerim. Çemberin içinde herhangi bir A noktası belirlerim ve A noktası merkez olan |AP| yarıçaplı bir çember çizerim.

Bu yeni çember ilk çemberi iki noktada keser biri P noktasıdır. Diğeri de B olsun. B'den geçecek şekilde A merkezli çemberin çapını çizdiğimde çapın bitiş noktasını C olarak isimlendiririm. C ve P noktalarını bir doğru parçasıyla birleştirdiğimde ilk çemberin P noktasındaki teğetini çizmiş olurum. (bkz. Şekil 9) [*İNŞA ETME*]

Şekil 9. Ö15'e Göre Bir Çembere Teğet İnşa Etme



Araştırmacı: Niye PC doğrusu teğettir çembere?

$Ö_{19}$: …çünkü PBC üçgeni dik açılı bir üçgendir. P köşesindeki açı dik bir açıdır ve bu açının bir kolu O merkezli çemberin çapıdır. Çapı göre çevre açı 90^0 olduğundan PC aradığımız teğet doğrusudur [*İSPAT*]

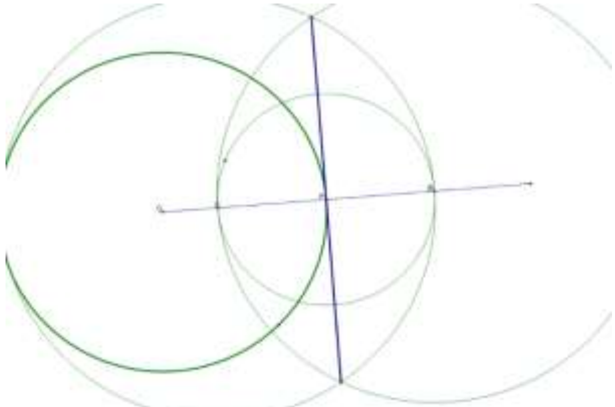
Tartışmanın bu aşamasında $Ö_5$ ve $Ö_{15}$ çembere üzerindeki bir noktadan teğet inşası için teğetin tanımını, konumunu ve görünümünü analiz etmiştir. Sonrasında, $Ö_{15}$'in açıklamasına göre gerçekleştirilen ve Şekil 9'da gösterilen inşa etme sürecinin ispatı $Ö_{19}$ tarafından doğru bir şekilde açıklanmıştır. Araştırmacı, OMÖA'na çemberde üzerindeki bir noktadan teğet inşa etme sürecinde başka bir strateji kullanılarak inşa edilip edilmeyeceğini sorarak toplu sınıf tartışmasını devam ettirmiştir. OMÖA GSP yardımıyla teğeti kolaylıkla analiz etmiş ve inşa edebilmişlerdir. Ayrıca, GSP'in hareket ettirme özelliği OMÖA'nın bu süreci analiz etmelerini kolaylaştırmış ve yeni bir inşa etme stratejisi sunmalarını sağlamıştır. $Ö_{20}$ bu doğrultuda çembere üzerindeki bir noktadan teğet inşası için farklı bir strateji sunmuştur ve şöyle açıklamıştır:

$Ö_{20}$: Öncelikle P noktasını merkez alan ve çapı |AB| uzunluğu olan bir çember çizerim. Buradan A ve B noktalarını merkez alan yarıçapları eşit uzunlukta olan iki çember daha çizerim. Bu iki çemberin kesişim noktalarını birleştirdiğimde O merkezli çemberin P noktasından geçen teğetini inşa etmiş olurum. (bkz. Şekil 10) [*TARTIŞMA, ALTERNATİF İNŞA ETME*]

Araştırmacı: Peki bu doğrunun çembere teğet olduğuna emin miyiz?

$Ö_{17}$: Eminiz çünkü en son çizilin iki çemberin kesişim noktalarını A ve B noktalarıyla birleştirirsek bir deltoid oluşturmuş oluruz. Teğet doğrumuz bu deltoidin köşegenidir. Ayrıca, diğer köşegende O merkezli çemberin çapının uzantısıdır. Deltoidde köşegenler birbirlerini dik keserler. [*TARTIŞMA, ALTERNATİF İNŞA İSPAT*]

Şekil 10. Ö20'e göre bir çembere teğet inşa etme



Araştırma kodlamalarının tartışma kısmında GSP kullanılarak alternatif inşa etme ve alternatif ispat oluşturulmuştur. GSP kullanarak OMÖA çemberler kullanarak bir deltoid oluşturmuşlardır. Çemberin çapının uzantısının ve teğetin bu deltoidin köşegenleri olacak şekilde inşa etme süreci gerçekleşmiştir. Deltoidin köşegenlerinin birbirlerini dik kesmeleri özelliğinden faydalanarak OMÖA tartışmanın bu kısmı için alternatif ispat sunmuşlardır. Burada OMÖA çembere üzerindeki bir noktadan teğet inşa etme ile ilgili tartışmalarını sonlandırmışlardır. Ayrıca, OMÖA çemberlerle ilgili diğer yardımcı elemanların inşa edilmelerini ve özelliklerini GSP kullanarak analiz etmiş ve tartışmışlardır. Tartışma sürecinde OMÖA bu elemanlarla ilgili bilgi edinme süreçlerinde Smart'ın (1998) basamaklarıyla ilgili veriler sunmuşlardır.

4. Tartışma ve Sonuç

OMÖA'nın etkinlik kâğıtlarındaki problemlere verilen cevapların tartışma sürecinde düzeltilmesi ve tartışmada sorgulamanın sonlanması çalışmada ilgili kavramın öğrenilmesi olarak kabul edilmiştir. Bu açıdan tartışma sürecinde tartışılan konularda OMÖA'nın kavrayışlarındaki hatalar ve eksikler bulgularda gösterildiği gibi tartışılmış ve gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Bu süreçte OMÖA'nın sorgulamalarının bitmesi konunun katılımcılar tarafından kavrandığını göstermiştir. Bu açıdan, OMÖA'nın kavramlarla ilgili eksik anlamaları ve hatalarıyla başlayan ve sorgulamanın sonlanması ve öğrenmenin gerçekleşmesiyle biten tartışma süreçlerin analiz sonuçlarına odaklanılmıştır. Bu çalışmada, bulgular incelendiğinde OMÖA geometrik şekillerin elemanlarını inceleyerek konuyla ilgili alan bilgilerini geliştirdikleri ifade edilebilir. Öncelikle, OMÖA geometrik şekillerin temel elemanlarını incelemişlerdir. Bu yüzden GSP ile bu şekillerin açı ve kenarlarının oluşumunu da incelemeleri gerekmiştir. Açı ve kenarların oluşumu üçgen ve dörtgenlerde araştırılmıştır. Ayrıca, çemberde temel elemanlardan merkez noktası, çap ve yay elemanlarının GSP yardımıyla inşa edilmesi üzerinde durulmuştur. OMÖA, GSP'in özellikleri ve kolaylıklarından faydalanarak şekilleri ve elemanları hareket ettirerek özelliklerini ayrıntılı bir şekilde incelemişlerdir. Ayrıca, GSP kullanarak yanlış anlamaları ve bilgilerini de düzeltebilmişlerdir. OMÖA bu elemanların tanımlarını, inşa edilmelerini, ispatlarını, konumlanmalarını ve özelliklerini teknoloji yardımıyla etkili bir şekilde inceleyerek bunlarla ilgili bilgilerini geliştirmişlerdir. Örneğin, çalışmada OMÖA'ndan bazılarının geniş açılı üçgenlerde yüksekliklerin ve diklik merkezinin konumunun bulanması ile ilgili eksik veya yanlış bilgiye sahip olduğu görülmüştür. Bu OMÖA, GSP yardımıyla üçgen çeşitlerine göre üçgenin kenarlarına ait yüksekliklerin ve diklik merkezinin konumlarındaki değişimi hareket ettirerek etkili bir şekilde incelemiş ve tartışma sürecinde sorgulamışlardır. Böylelikle, bu OMÖA'nın üçgenlerde yükseklik ile ilgili kavram bilgilerini doğru bir şekilde geliştirebildiği gözlemlenmiştir. Çalışmada görüldüğü gibi OMÖA'nın geometrik şekillerin elemanları ile kavram bilgilerinin araştırılması gerekmektedir. Bu gerekliliğe odaklanan literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde geometrik şekillerin temel elemanları özellikle şekillerin tanımları, kavram imajları ve sınıflandırılması ile ilgili yapılan çalışmalara da rastlanmaktadır (Clements vd., 1999; Tsamir, Tirosh ve Levenson, 2008; Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai ve Tabach, 2014; Ward, 2004). Bu süreçlerde temel elemanların rolü büyüktür. Bu açıdan OMÖA'nın temel elemanlarla ilgili alan bilgilerinin geliştirilmesi amaçlanmış ve burada da adaylara bu konuda yardım edilmiştir. Katılımcılar tartışma ve teknolojinin de yardımıyla temel elemanları etkili bir şekilde anlayabilmiş ve çeşitli geometrik şekillerdeki önem ve rollerini kavrayabilmişlerdir. Teknoloji de bu süreci kolaylaştırmış ve bazı komutların da yardımıyla çeşitli olasılıkları ve çeşitli geometrik şekillerdeki durumlarını karşılaştırarak daha kolay bir şekilde kavrayabilmişlerdir.

Çalışmada geometrik şekillerin temel elemanlarının incelenmesinden sonra bu şekillerin yardımcı elemanları araştırılmıştır. Bu kısımda öncelikli olarak üçgenlerin yardımcı elemanları olan kenarortay, açıortay, orta dikme ve yükseklik; sonrasında dörtgenler için köşegen ve simetri ekseni ve en sonunda da çember için kiriş, kesen ve yay incelenmiş ve tartışılmıştır. GSP kullanılarak bu elemanların tanımları, konumları, özellikleri ve inşa edilmeleri incelenmiştir. OMÖA bunlarla ilgili alan bilgilerini ve öğrenmelerini geliştirmişlerdir. Yardımcı elemanların önemine ve rollerine odaklanılarak OMÖA'nın anlamaları sağlanmıştır. Literatürde birçok çalışma bu bulguyla paralellik göstererek çeşitli yaş seviyesindeki bireylerin yardımcı elemanlarla ilgili anlamalarını incelemiştir (Alatorre ve Saiz, 2010; Gutierrez ve Jaime, 1999; Kellogg, 2010; Uygun, 2016; Uygun ve Akyüz, 2017).

Çeşitli geometrik şekillerin temel ve yardımcı elemanları, oluşumları, rolleri ve özellikleri teknoloji yardımıyla etkili bir şekilde incelenmiştir. OMÖA bu elemanları GSP yardımıyla daha kolay bir şekilde ve karşılaştırmalı olarak analiz etmişlerdir. Örneğin, OMÖA yükseklikleri oluştururken üçgenin köşelerini hareket ettirerek üçgen çeşitlerindeki yüksekliğin, konumunda ve oluşumundaki farklılaşmayı karşılaştırmış ve analiz edebilmiştir. Böylelikle, üçgen çeşitlerindeki yüksekliğin özelliklerini daha iyi ve etkili bir şekilde kavrayabilmiştir. Ayrıca, dörtgenlerde de GSP'in hareket ettirme kolaylığıyla birkaç dörtgen çeşidini karşılaştırmalı olarak kolaylıkla inceleyebilmişlerdir. Bu çeşitlerdeki farklılaşmayı GSP yardımıyla adım adım izleyebilmişlerdir. Böylece, geometrik şekil farklılaştıkça elemanın ve onunla ilgili özelliğin nasıl değiştiğini etkili bir şekilde kavrayabilmişlerdir. Böylelikle bu konuyla ilgili alan bilgilerini dinamik geometri ortamında daha etkili bir şekilde geliştirebilmişlerdir. Literatürdeki birçok çalışma da katılımcıların teknoloji destekli öğrenme ortamlarında geometrik şekillerle ilgili öğrenme ve alan bilgisi gelişimlerini desteklediğini belirterek çalışmanın bu bulgusunu desteklemiştir (De Villiers, 2003; Dye, 2001; Forsythe, 2007; Godwin ve Sutherland, 2004; Hill ve Hannafin, 2001; Jones, 2000; Laborde 2001).

OMÖA'nın geometrik şekillerin elemanlarıyla ilgili alan bilgilerinin geliştirilmesi sürecinde geometrik şekillerin inşa edilmesinden faydalanılmıştır. Öncelikle geometrik şekillerin inşa edilmesinde ilişkisel anlama sağlanmıştır. Örneğin, karenin inşa edilmesinde kenar ve açı araştırılırken çember ve yaylardan yararlanılmıştır. Khoh (1997) ve Kuzle (2013) tarafından yapılan çalışmalar da bu bulguyu desteklemektedir. Bu sonuçla birlikte geometrik şekillerin inşa edilme süreçlerinin ilişkisel anlamayı desteklediği ve farklı geometrik şekillerin ilişkilendirilmesinde etkili olduğu iddia edilebilir. Ayrıca, geometrik şekillerin inşa edilmesi süreçlerinde elemanların özellikleri, tanımları ve konumlanmaları adım adım analiz edilmiş ve öğrenilmiştir. Bu sayede OMÖA bu elemanlarla ilgili alan bilgilerini geliştirmişlerdir. Ek olarak, sınıf tartışmaları sayesinde OMÖA birbirlerinin fikirlerini incelemiş ve doğru bilgiyi yapılandırarak öğrenmelerini geliştirebilmişlerdir. Bunun yanında geometrik şekillerin inşa edilmesinin alan bilgisinin gelişmesini ve kavramsal-ilişkisel öğrenmeyi desteklediği bulgusu literatürde yer alan bazı çalışmaların bulgusuyla da paralellik göstermektedir (Chan, 2006; Cherowitzo, 2006; Napitupulu, 2001). Sonuç olarak, özellikle geometrik şekillerin tanımlarının oluşturulması ve ilgili kavram imajlarının doğru bir şekilde oluşturulması açısından önemli olan elemanlarla ilgili OMÖA'nın derinlemesine doğru bilgiye sahip olması gerekmektedir. Teknoloji ise bu bilgi edinme sürecini daha etkili ve kolay bir şekilde gerçekleşmesini sağlamıştır. Bu açıdan, OMÖA'nın temel ve yardımcı elemanlarla ilgili bilgilerinin geliştirilmesi önemlidir ve eğitimleri sürecinde bunu gerçekleştirmelidirler. Bu örnekler yardımıyla matematik öğretmeni programlarında geometri dersi tasarımlarında veya konu anlatımlarında geometrik şekillerin elemanları ile ilgili durumlarda örnek etkinlikler genişletilebilir. Buradaki durumlar ve tartışma süreçleri benzer durumlarda faydalı olabilir.

Kaynakça

Alatorre, S., & Saiz, M. (2009). *Teachers and triangles*. Proceedings of Congress of Educational Research in Mathematics Education. 28 January- 1 February, Lyon; France.

Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education*. Unpublished doctoral dissertation. Michigan State University, East Lansing, MI.

Ball, D. L., Hill, H.H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-46.

Bryan, L. A. (2003). Nestedness of beliefs: Examining a prospective elementary teacher's belief system about science teaching and learning. *Journal of Research in Science Teaching, 40*(9), 33.

Chan, Y. C. (2006). Dynamic Geometry Software Environment for Conjecturing and Proving Geometry Statements. *Research Studies in Education: the 9th Postgraduate Research Conference*. The University of Hong Kong; China.

Chapman, O. (2007). Facilitating preservice teachers' development of mathematics knowledge for teaching arithmetic operations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4), 341-349.

Cherowitzo, B. (2006). *Geometric constructions*. (Accessed August 18, 2012), http://www-math.cudenver.edu/~wcherowi/courses/m3210/lecchap5.pdf.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*, 339-352.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 192–212.

Creswell, J. W. (2009). Research design*: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Creswell, J. W. (2012). *Educational research: planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (4th ed.). Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

De Villiers, M. D. (2003). *Rethinking Proof: with the Geometer's Sketchpad*. Key Curriculum Press.

Dye, B. (2001). The impact of dynamic geometry software on learning. *Teaching Mathematics and Its Application, 20*(4).

Forsythe, S. (2007). Learning geometry through dynamic geometry. *Mathematics Teaching, 202*, 31-35.

Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. R. (2007) *Educational research: An introduction*. Boston: Pearson Education.

Godwin, S., & Sutherland, R. (2004). Whole class technology for learning mathematics: the case of functions and graphs. *Education, Communication and Information Journal (ECi) 4*, 131-152.

Goldenberg, E. P., & Cuoco, A. A., (1998). What is dynamic geometry?. In: R. Lehrer and D. Chazan (Eds.). *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 351-368). Lawrence Erlbaum, Mahwah: USA.

Gutierrez, A., & Jaime, A. (1999). Pre-service primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher of Education, 2*(3), 253-275.

Han, H. (2007). *Middle school students' quadrilateral learning: a comparison study*. Unpublished doctoral dissertation. University of Minnesota, Minnessota, USA.

Healy, L., & Hoyles, C. (2002). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 235-256.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 534-549.

Hill, C. H., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teacher' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330-351.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 372-400.

Hill, J. R., & Hannafin, M. J. (2001). Teaching and learning in digital environments: the resurgence of resource – based learning. *Educational Technology Research Development, 49*(3), 37-52.

Hoyles, C., & Healy, L. (1999). Liking informal argumentation with formal proof through computer-integrated teaching experiments, In o. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Pschology of Mathematics Education* (pp. 105-112). Haifa, Israel.

Jackiw, N., (2001). *The Geometer's Sketchpad (Version 4.0) [Computer software]*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Jones, K. (2000). Teacher knowledge and professional development in geometry. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *20*(3), 109-114.

Kellogg, M. S. (2010). *Preservice elementary teachers' pedagogical content knowledge related to area and perimeter: A teacher development experiment investigating anchored instruction with web-based microworlds*. Unpublished doctoral dissertation. University of South Florida, Florida.

Khoh, L. S. (1997). Compass constructions: A vehicle for promoting relational understanding and higher order thinking skills. *The Mathematics Educator*, *2*(2), 138-147.

Kuzle, A. (2013). Constructions with various tools in two geometry didactics courses in the United States and Germany. B. Ubuz, (ed.), *Proceedings of the eighth congress of the European Society of Research in Mathematics Education* (pp. 6-10), Antalya.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 283-317.

Leung, A., & Lee, A. M. S. (2013). Students' geometrical perception on a task-based dynamic geometry platform. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 361-377.

Leung, A., & Lopez-Real, F. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: Acase of proofby contradiction. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(2), 145-165.

Liang, H. N., & Sedig, K. (2010). Can interactive visualization tools engage and support pre-university students in exploring non-trivial mathemaical concepts? *Compters ve Education, 54*(4), 972-991.

Ma, X. (1999). A meta-analysis of the relationship between anxiety toward mathematics and achievement in mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education, 30*(5), 520-540.

Mariotti, M. A. (2002). Influences of technologies advances in students' math learning. In L. D. English (ed.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*, pp. 695-723. Lawrence Erlbaum Associates publishers, Mahwah, New Jersey.

Marrades, R., & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1/2), 87-125.

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implemantation* (2nd ed.). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Napitupulu, B. (2001). *An exploration of students' understanding and van hiele levels of thinking on geometric constructions*. Unpublished master's thesis, Simon Fraser University, Indonesia.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA:Author.

Smart, J. R. (1998). *Modern geometries* (5th Edition). Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing.

Stake, R.E. (1995). *Art of case study research: perspectives on pr*actice. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Straesser, R. (2002). Cabri-geometre: Does dynamic geometry software (DGS) change geometry and its teaching and learning? *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 319-333.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 81-95.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2014). Early years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM- Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-014-0641-8.

Turner, C. S. V., Wood, J. L., Montoya, Y. J., Essien-Wood, I. R., Neal, R., Escontrias, G., & Coe, A. (2012). Advancing the next generation of higher education scholars: An examination of one doctoral classroom. *International Journal of Teaching and Learning in Higher Education, 24*(1), 103-112.

Uygun, T. (2016). *Preservice middle school mathematics teachers' understanding of altitudes of triangles*. Uluslararası Çağdaş Eğitim Araştırmaları Kongresi, 29 Eylül- 2 Ekim, Muğla, Türkiye.Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayınclık.

Uygun, T., & Akyüz, D. (2017). *Preservice middle school mathematics teachers' conception of auxiliary elements of triangles*. International Conference on Education in Mathematics, Science and Technology, 18-21 Mayıs 2017, Kuşadası, Türkiye.

Ward, R. A. (2004). An investigation of K-8 preservice teachers' concept images and definitions of polygons. *Issues in Teacher Education, 13*(2)39-56.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Seçkin Yayınevi.

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (4th Ed.). Thousands Oaks, CA:Sage.