



Çok Boyutlu Dalga Denklemleri için Geri Adımlamalı Sınır Değer Kontrolü

Boundary Backstepping Control for Multi-Dimensional Wave Equations

Aziz SEZGİN*¹

¹*İstanbul Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, İstanbul, TÜRKİYE*

Başvuru/Received: 12/05/2017

Kabul/Accepted: 26/11/2017

Son Versiyon/Final Version: 29/01/2018

Öz

Bu çalışmada seçilen bazı kararsız çok boyutlu dalga denklemleri geri adımlamalı sınır değer kontrol kuramı ile kararlı hale getirilmiştir. Bu amaçla bir boyutlu geri adımlamalı kontrol teorisinden yola çıkılarak çok boyutlu sistemler için kontrolcü tasarımı yapılmış ve hedef sistemler Lyapunov kararlılık analizi ile incelenmiştir. Her boyut için sistemin bir ucundan tutturulup diğer ucundan kontrol uygulandığı düşünülmüştür. Böylelikle iki boyutlu bir sistem için iki adet, üç boyutlu bir sistem için üç adet ve n boyutlu bir sistem için de n adet kontrolcü tasarlanmıştır. Kararsız sistemin üstel kararlı bir hedef sisteme dönüştürülebilmesi için Volterra/Felholm tipi dönüşümler kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler

“Geri adımlamalı Kontrol, Dağılım parametrelili sistemler, çok boyutlu dalga denklemi”

Abstract

In this study, we consider the problem of the stabilization of chosen unstable multi-dimensional wave equations by using boundary backstepping control theory. For this purpose, we design boundary backstepping controllers inspired by the 1-D unstable wave equation stabilization procedure and the target systems are considered by using Lyapunov stability procedure. We assume that one side of the boundary is hinged and the other side is controlled for each direction. Thus, we design two controllers for 2-D domain, three controllers for 3-D domain and “n” controllers for n-D domain. Generalized Volterra/Fredholm type transformations are used to map the unstable systems to an exponentially stable system.

Key Words

“Backstepping Control, Distributed parameter systems, multi dimensional wave equation”

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler için geri adımlamalı sınır değer kontrolü bir boyutlu sistemler için literatürde bir çok çalışmada başarılı bir şekilde uygulanmaktadır. Krstic ve Smyshlyayev (2003)'te bir boyutlu ısı denklemi için dört farklı kontrol tasarımına rastlanmaktadır. Yine Krstic ve Smyshlyayev (2008), Krstic ve diğerleri (2008) ve Krstic (2011)'de birçok farklı kısmi diferansiyel denklem sistemleri için farklı tasarımlar yapılmıştır. Sezgin ve Krstic (2015)'te akış kaynaklı zar titreşimlerinin kontrolü bir boyutlu dalga denkleminde uygulanmıştır. Krstic ve Smyshlyayev (2008) ve Bekiaris-Liberis ve Krstic (2010)'da gecikmeli zamandan bağımsız lineer sistemler için gecikme sorununu yok etmek amacıyla iç içe geçmiş birinci mertebeli bir boyutlu hiperbolik bir kısmi diferansiyel denklem yardımı ile kontrolcü tasarlanmıştır. Yine literatürde buna benzer tek boyutlu kısmi diferansiyel denklemler için tasarlanmış birçok çalışmaya rastlanabilmektedir. Fakat iki ve daha çok boyutlu kısmi diferansiyel denklemler için geri adımlamalı sınır değer kontrolü bir çalışmada (Krstic ve Smyshlyayev (2008)), bir kestirim(estimator) aracılığı ile bulunmaktadır.

Bu çalışmada, bahsedilen geri adımlamalı sınır değer kontrolü çalışmalardan ilham alınarak bir boyut sistem seçilmiş bazı çok boyutlu dalga denklemleri için genişletilmiştir. Her bir boyutta bir ucundan tutturulmuş diğer ucundan kontrolcü uygulanmış çok boyutlu dalga denklemlerinin geri adımlamalı sınır değer kontrolü ile ilgilenilmiştir. Her boyutta bir uçta bir kontrolcü tasarlandığından n boyutlu bir sistem için n adet kontrolcü kullanılmalıdır. İleriki çalışmalarda tasarlanılan kontrolcü dalga denklemlerini ilgilendiren sistemlerde kullanılabilirliği gibi aynı zamanda da gecikmeli kaskad sistemlerde de kullanılabilir bir hal olacaktır ki literatürde bu alanda Bekiaris-Liberis ve Krstic (2010) ve (2011) gibi birçok çalışmaya rastlamak mümkündür.

Öncelikle kolaylıkla anlaşılabilmesi için basit bir iki boyutlu dalga denklemi ile başlanmıştır. Burada temel amaç kararsız bir sistemi hedef bir kararlı sistem gibi hareket ettirebilecek kontrolcüyü elde etmektir. Bu amaçla hedef sistemin kararlılığı da Lyapunov Yöntemi ile ileriki bölümlerde verilmiştir

2. İKİ VE ÇOK BOYUTLU DALGA DENKLEMİNİN GERİ ADIMLAMALI KONTROLÜ

2.1. Bir ucu serbest bir ucu sönümlü iki boyutlu dalga denkleminin kontrolü

Aşağıdaki gibi bir ucu serbest ve diğer ucundan eyleyici etkisi altında iki boyutlu bir dalga denklemi göz önüne alınsın;

$$u_{tt}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) \quad (1)$$

$$u_x(0, y, t) = u_y(x, 0, t) = u_x(x, 0, t) = u_y(0, y, t) = 0, \quad (2)$$

$$u_x(1, y, t) = -c_1 u_t(1, y, t), \quad (3)$$

$$u_y(x, 1, t) = -c_1 u_t(x, 1, t), \quad (4)$$

burada $c_1 > 0$. (1)-(4) sistemine aşağıdaki gibi bir dönüşüm uygulansın.

$$w(x, y, t) = u(x, y, t) + c_0 \int_0^x u(\xi, y, t) d\xi + c_0 \int_0^y u(x, \eta, t) d\eta \quad (5)$$

(5) dönüşümü (1)-(4) sistemine uygulandığında sistemi yönlendirmek istediğimiz hedef sistem

$$w_{tt}(x, y, t) = w_{xx}(x, y, t) + w_{yy}(x, y, t) \quad (6)$$

$$w_x(0, y, t) = w_y(0, y, t) = c_0 w(0, y, t), \quad (7)$$

$$w_x(x, 0, t) = w_y(x, 0, t) = c_0 w(x, 0, t), \quad (8)$$

$$w_x(1, y, t) = w_y(1, y, t) = -c_1 w_t(1, y, t), \quad (9)$$

$$w_x(x, 1, t) = w_y(x, 1, t) = -c_1 w_t(x, 1, t), \quad (10)$$

olur ki (6)-(10) sistemi kararlılık analizinde ispatlanacağı üzere üstel kararlıdır. Burada c_0 küçük değerler için de seçilebilir. (5) dönüşümünü zamana ve konum değişkenlerine göre türevlenirse sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$w_{tt}(x, y, t) = u_{tt}(x, y, t) + c_0 u_{xt}(x, y, t) + c_0 \int_0^x u_{yyt}(\xi, y, t) d\xi + c_0 u_{yt}(x, y, t) + c_0 \int_0^y u_{xxt}(x, \eta, t) d\eta \quad (11)$$

$$w_{xx}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + c_0 u_{xt}(x, y, t) + c_0 \int_0^y u_{xxt}(x, \eta, t) d\eta \quad (12)$$

$$w_{yy}(x, y, t) = u_{yy}(x, y, t) + c_0 u_y(x, y, t) + c_0 \int_0^x u_{yy}(\xi, y, t) d\xi \quad (13)$$

Elde edilen (11)-(13) denklemleri (6) denkleminde yerlerine yazılırsa $x = 1$ ve $y = 1$ için aşağıdaki kontrol kuvvetleri elde edilir.

$$u_x(1, y, t) = -c_0 u(1, y, t) - c_1 u_t(1, y, t) - c_1 c_0 \int_0^1 u_t(\xi, y, t) d\xi, \quad (14)$$

$$u_y(x, 1, t) = -c_0 u(x, 1, t) - c_1 u_t(x, 1, t) - c_1 c_0 \int_0^1 u_t(x, \eta, t) d\eta. \quad (15)$$

Böylelikle iki boyutlu sistem için elde edilen (14)-(15) kontrolcülere ile (1)-(4) sistemi üstel kararlı (6)-(10) denklemler sistemi gibi davranır. Burada ilk iki terim sanki bir oransal türev(PD) kontrolcü gibi davranır. Son terim ise geri adımlamalı kontrolcü terimidir. Farklı uygulamalarda bu terimlere klasik kontrol teorilerindeki gibi farklı terimler eklenebilir ya da çıkarılabilir. Bu tasarımcıya kalmış bir durumdur. Örneğin (7)-(8) denklemlerinde eşitlik sıfıra eşit alınabilirdi. Ya da farklı bir söylemle büyük c_0 değerlerinde $x = 0$ 'da $w_x(0, y, t) = c_0 w(0, y, t)$ terimi $w(0, y, t) = 0$ gibi davranır. Böylece büyük c_0 değerlerine gerek duyulmamaktadır.

2.2. Kelvin-Voigt sönümlü iki boyutlu dalga denkleminin kontrolü

Aşağıdaki gibi bir Kelvin-Voigt sönümlü iki boyutlu bir dalga denklemler sistemi göz önüne alınsın;

$$u_{tt}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) + du_{xxt}(x, y, t) + du_{yyt}(x, y, t) \quad (16)$$

$$u_x(0, y, t) = u_y(x, 0, t) = u_x(x, 0, t) = u_y(0, y, t) = 0, \quad (17)$$

$$u(1, y, t) = U_1(y, t), \quad (18)$$

$$u(x, 1, t) = U_2(x, t), \quad (19)$$

burada d küçük bir pozitif sabittir. (16)-(19) sistemine aşağıdaki gibi bir dönüşüm uygulansın.

$$w(x, y, t) = u(x, y, t) + \int_0^x k(x, \xi) u(\xi, y, t) d\xi + \int_0^y l(y, \eta) u(x, \eta, t) d\eta \quad (20)$$

Burada $k(x, \xi)$ ve $l(y, \eta)$ fonksiyonları çekirdek fonksiyonlardır. (20) dönüşümü (16)-(19) sistemine uygulandığında sistemi yönlendirmek istediğimiz hedef sistem

$$w_{tt}(x, y, t) = w_{xx}(x, y, t) + w_{yy}(x, y, t) + dw_{xxt}(x, y, t) + dw_{yyt}(x, y, t) - c_0 w(x, y, t) - c_0 w_t(x, y, t) \quad (21)$$

$$w_x(x, 0, t) = w_y(x, 0, t) = w_x(0, y, t) = w_y(0, y, t) = 0, \quad (22)$$

$$w(x, 1, t) = w(x, 1, t) = w(1, y, t) = w(1, y, t) = 0. \quad (23)$$

olur ki (21)-(23) sistemi üstel kararlıdır. Sistemin kararlılık analizi 3. bölümde incelenmiştir. (20) dönüşümü zamana ve konum değişkenlerine göre türevlenirse sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$w_{tt}(x, y, t) = u_{tt}(x, y, t) - \int_0^x k(x, \xi) u_{tt}(\xi, y, t) d\xi - \int_0^y l(y, \eta) u_{tt}(x, \eta, t) d\eta \quad (24)$$

Zamana göre türevlenen (24) denkleminde (16) denklemleri kullanılırsa;

$$w_{tt}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) + du_{xxt}(x, y, t) + du_{yyt}(x, y, t) - \int_0^x k(x, \xi) [u_{\xi\xi}(\xi, y, t) + u_{yy}(\xi, y, t) + du_{\xi\xi t}(\xi, y, t) + du_{yyt}(\xi, y, t)] d\xi - \int_0^y l(y, \eta) [u_{xx}(x, \eta, t) + u_{\eta\eta}(x, \eta, t) + du_{xxt}(x, \eta, t) + du_{\eta\eta t}(x, \eta, t)] d\eta \quad (25)$$

(25) denkleminde son iki terimde kısımlarla integrasyon uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa elde edilen sonuç (26) denklemindeki gibidir.

$$\begin{aligned}
 w_{tt}(x, y, t) = & u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) + du_{xxt}(x, y, t) + du_{yyt}(x, y, t) - k(x, x)u_x(x, y, t) \\
 & + k(x, 0)u_x(0, y, t) + k_\xi(x, x)u(x, y, t) - k_\xi(x, 0)u(x, 0, t) \\
 & - \int_0^x k(x, \xi)u(\xi, y, t)d\xi - \int_0^x k(x, \xi)u(\xi, y, t)d\xi - dk(x, x)u_{xt}(x, y, t) \\
 & + dk(x, x)u_{xt}(0, y, t) + dk_\xi(x, x)u_t(x, y, t) - dk_\xi(x, 0)u_t(0, y, t) \\
 & - d \int_0^x k_{\xi\xi}(x, \xi)u_t(\xi, y, t)d\xi - d \int_0^x k(x, \xi)u_{yyt}(\xi, y, t)d\xi \\
 & - \int_0^y l(y, \eta)u_{xx}(x, \eta, t)d\eta - l(y, y)u_y(x, y, t) + l(y, 0)u_y(x, 0, t) \\
 & + l_\eta(y, y)u(x, y, t) - l_\eta(y, 0)u(x, 0, t) - \int_0^y l_{\eta\eta}(y, \eta)u(x, \eta, t)d\eta \\
 & - dl(y, y)u_{yt}(x, y, t) + dl(y, 0)u_{yt}(x, 0, t) + dl_\eta(y, y)u_t(x, y, t) \\
 & - dl_\eta(y, 0)u_t(x, 0, t) - d \int_0^y l_{\eta\eta}(y, \eta)u_t(x, \eta, t)d\eta - d \int_0^y l(y, \eta)u_{xxt}(x, \eta, t)d\eta
 \end{aligned} \tag{26}$$

(24) denklemini x konum değişkenine göre türevlenirse;

$$\begin{aligned}
 w_{xx}(x, y, t) = & u_{xx}(x, y, t) - \frac{d}{dx} [k(x, x)]u(x, y, t) - k(x, x)u_x(x, y, t) - k_x(x, x)u(x, y, t) \\
 & - \int_0^x k_{xx}(x, \xi)u(\xi, y, t)d\eta - \int_0^y l(y, \eta)u_{xx}(x, \eta, t)d\eta,
 \end{aligned} \tag{27}$$

(24) denklemini y konum değişkenine göre türevlenirse;

$$\begin{aligned}
 w_{yy}(x, y, t) = & u_{yy}(x, y, t) - \frac{d}{dy} [l(y, y)]u(x, y, t) - l(y, y)u_y(x, y, t) - l_y(y, y)u(x, y, t) \\
 & - \int_0^x k(x, \xi)u_{yy}(\xi, y, t)d\xi - \int_0^y l_{yy}(y, \eta)u(x, \eta, t)d\eta
 \end{aligned} \tag{28}$$

(16) denklemindeki son iki terimin de dönüşümleri yapılmalıdır. (27) denkleminin zaman göre türevi;

$$\begin{aligned}
 w_{xxt}(x, y, t) = & u_{xxt}(x, y, t) - \frac{d}{dx} [k(x, x)]u_t(x, y, t) - k(x, x)u_{xt}(x, y, t) - k_x(x, x)u_t(x, y, t) \\
 & - \int_0^x k_{xx}(x, \xi)u_t(\xi, y, t)d\eta - \int_0^y l(y, \eta)u_{xxt}(x, \eta, t)d\eta,
 \end{aligned} \tag{29}$$

(28) denkleminin zaman göre türevi;

$$\begin{aligned}
 w_{yyt}(x, y, t) = & u_{yyt}(x, y, t) - \frac{d}{dy} [l(y, y)]u_t(x, y, t) - l(y, y)u_{yt}(x, y, t) - l_y(y, y)u_t(x, y, t) \\
 & - \int_0^x k(x, \xi)u_{yyt}(\xi, y, t)d\xi - \int_0^y l_{yy}(y, \eta)u_t(x, \eta, t)d\eta
 \end{aligned} \tag{30}$$

Elde edilen (26)-(30) denklemleri (21) denkleminde yerlerine yazılıp düzenlenilirse;

$$\begin{aligned}
 & \int_0^x u(\xi, y, t) [k_{xx}(x, \xi) - k_{\xi\xi}(x, \xi) - ck(x, \xi)] d\xi + u(0, y, t) k_{\xi}(x, 0) - u_t(0, y, t) dk_{\xi}(x, 0) \\
 & + \int_0^x u_t(\xi, y, t) [dk_{xx}(x, \xi) - dk_{\xi\xi}(x, \xi) - cdk(x, \xi)] d\xi \\
 & + \int_0^y u(x, \eta, t) [l_{yy}(y, \eta) - l_{\eta\eta}(y, \eta) - cl(y, \eta)] d\eta + u(x, 0, t) l_{\eta}(y, 0) - u_t(x, 0, t) l_{\eta}(y, 0) \\
 & + \int_0^y u_t(x, \eta, t) [dl_{yy}(y, \eta) - dl_{\eta\eta}(y, \eta) - cdl(y, \eta)] d\eta \\
 & + u(x, y, t) \left[2 \frac{d}{dx} [k(x, x)] + 2 \frac{d}{dy} [l(y, y)] + c \right] \\
 & u_t(x, y, t) \left[2d \frac{d}{dx} [k(x, x)] + 2d \frac{d}{dy} [l(y, y)] + cd \right] = 0
 \end{aligned} \tag{31}$$

elde edilir. (31) denkleminin sıfıra eşit olabilmesi için gerekli şartlar düzenlenilip çözüldüğünde aranılan kontrolcü elde edilecektir. Son iki terim incelenirse x 'e bağlı bir fonksiyon ile y 'ye bağlı bir fonksiyon toplandığında sonucun sıfıra eşit olabilmesi için $-c$ gibi bir sabite eşit olması gerektiği görülmektedir. Bu durumda her iki fonksiyonun da sabit olması gerektiği anlaşılmaktadır. Burada herhangi birisi için bir seçim yapıldığında diğerinin elde edileceği aşıkardır. Böylece (31) denkleminin sıfıra eşit olabilmesi için aşağıdaki durum seçilebilir.

$$l_{yy}(y, \eta) - l_{\eta\eta}(y, \eta) = cl(y, \eta), \tag{32}$$

$$l(y, y) = -\frac{c_1 - c}{2} y, \tag{33}$$

$$l_{\eta}(y, 0) = 0. \tag{34}$$

Burada c_1 ve c pozitif tanımlı kontrol parametreleridir. (32)-(34) denklem sisteminin çözümü Krstic ve Smyshlyaev (2008) de edilmiştir.

$$l(y, \eta) = -(c_1 - c) \eta \frac{I_1 \left[\sqrt{c(y^2 - \eta^2)} \right]}{\sqrt{c(y^2 - \eta^2)}} \tag{35}$$

Benzer şekilde diğer çekirdek fonksiyonunun denklem sistemi ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$k_{xx}(x, \xi) - k_{\xi\xi}(x, \xi) = ck(x, \xi), \tag{36}$$

$$k(x, x) = -\frac{c_1}{2} x, \tag{37}$$

$$k_{\xi}(x, 0) = 0. \tag{38}$$

(36)-(38) denklem sisteminin çözümü ise;

$$k(x, \xi) = -c_1 \xi \frac{I_1 \left[\sqrt{c(\xi^2 - x^2)} \right]}{\sqrt{c(\xi^2 - x^2)}} \tag{39}$$

Böylelikle elde edilen çekirdek fonksiyonları yardımı ile (18) ve (19) eşitlikleri (20) denklemi içerisinde kullanılarak aranılan kontrolcü tanımlanabilir.

$$U_1(y,t) = \int_0^1 k(1,\xi)u(\xi,y,t)d\xi + \int_0^y l(y,\eta)u(1,\eta,t)d\eta \quad (40)$$

$$U_2(x,t) = \int_0^x k(x,\xi)u(\xi,1,t)d\xi + \int_0^1 l(1,\eta)u(x,\eta,t)d\eta \quad (41)$$

Aranılan kontrolcileri elde edilir. Bu düşünce geliştirilebilir. Bir sonraki iki bölümde kısaca elde edilen sonuçlar çok boyutlu sistemlere geliştirilmiştir.

2.3. Bir ucu serbest bir ucu sönümlü çok boyutlu dalga denkleminin kontrolü

Bir önceki bölümde elde edilen sonuçlar n boyutlu sistem için geliştirilebilir. Aşağıdaki gibi n boyutlu dalga denklemi ele alınsın.

$$u_{tt}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(\mathbf{x},t) \quad (42)$$

$$u_{x_i}(0, \mathbf{x}_k, t) = 0, \quad (43)$$

$$u_{x_i}(1, \mathbf{x}_k, t) = -c_1 u_t(1, \mathbf{x}_k, t), \quad (44)$$

burada $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n]$, $\mathbf{x}_k = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_{i-1} \ x_{i+1} \ \dots \ x_n]$, $k = \{1, 2, 3, \dots, n\} - i$. (42)-(44) sistemine aşağıdaki gibi bir dönüşüm uygulansın.

$$w(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x},t) - c_0 \cdot \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} u(\xi_i, \mathbf{x}_k, t) d\xi_i \quad (45)$$

(45) dönüşümü ile (42)-(44) sistemini aşağıdaki sisteme dönüştürmek hedeflenmektedir.

$$w_{tt}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^n w_{x_i x_i}(\mathbf{x},t) \quad (46)$$

$$w_{x_i}(0, \mathbf{x}_k, t) = c_0 w(0, \mathbf{x}_k, t), \quad (47)$$

$$w_{x_i}(1, \mathbf{x}_k, t) = -c_1 w_t(1, \mathbf{x}_k, t), \quad (48)$$

(45) denklemi türevlenir ve (46) de yerlerine yazılırsa aranılan kontrolcü kuvvetleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_{x_i}(1, \mathbf{x}_k, t) = -c_0 u(1, \mathbf{x}_k, t) - c_1 u_t(1, \mathbf{x}_k, t) - c_1 c_0 \int_0^1 u_t(\xi, \mathbf{x}_k, t) d\xi, \quad (49)$$

2.4. Kelvin-Voigt sönümlü çok boyutlu dalga denkleminin kontrolü

Elde edilen sonuçlar n boyutlu sistem için geliştirilebilir. Aşağıdaki (50)-(52) sistemi irdelensin.

$$u_{tt}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(\mathbf{x},t) + d \cdot \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i t}(\mathbf{x},t) \quad (50)$$

$$u_{x_i}(0, \mathbf{x}_k, t) = 0, \quad (51)$$

$$u(1, \mathbf{x}_k, t) = U_i(\mathbf{x}_k, t). \quad (52)$$

Burada $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n]$, $\mathbf{x}_k = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_{i-1} \ x_{i+1} \ \dots \ x_n]$, $k = \{1, 2, 3, \dots, n\} - i$. (50)-(52) sistemi için uygulanması gereken dönüşüm aşağıdaki gibidir.

$$w(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x},t) - \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} k_i(x_i, \xi_i) u(\xi_i, \mathbf{x}_k, t) d\xi_i \quad (53)$$

(53) dönüşümünün (50)-(52) sistemini aşağıdaki üstel kararlı sisteme yönlendirmesi beklenmektedir.

$$w_{tt}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^n w_{x_i x_i}(\mathbf{x},t) + d \cdot \sum_{i=1}^n w_{x_i x_i t}(\mathbf{x},t) - c \cdot \sum_{i=1}^n w(\mathbf{x},t) - c \cdot d \cdot \sum_{i=1}^n w_t(\mathbf{x},t) \quad (54)$$

$$w_{x_i}(0, \mathbf{x}_k, t) = 0, \tag{55}$$

$$w(1, \mathbf{x}_k, t) = 0. \tag{56}$$

(53) dönüşümünün daha önceki bölümlerde anlatıldığı gibi türevlenmesi sonucunda elde edilen sonuçların (54) denkleminde yerlerine yazılması sonucunda elde edilecek kontrolçüler (57)'de verilmiştir.

$$U_i(\mathbf{x}_k, t) = \int_0^1 k_i(1, \xi_i) u(\xi_i, \mathbf{x}_k, t) d\xi_i + \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^{x_j} k_j(x_j, \xi_j) u(\xi_j, \mathbf{x}_k, t) d\xi_j \tag{57}$$

Burada çekirdek fonksiyonları ise aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$k_i(x_i, \xi_i) = -c_i \xi_i \frac{I_1 \left[\sqrt{c(\xi_i^2 - x_i^2)} \right]}{\sqrt{c(\xi_i^2 - x_i^2)}} \tag{58}$$

buradaki c_i sabitleri $\sum_{i=1}^n c_i = c$ koşulunu sağlayan keyfi tasarım değerleridir.

3. KARARLILIK ANALİZİ

3.1. Bir ucu serbest bir ucu sönümlü sistem için Lyapunov kararlılık analizi

Bir önceki bölümde seçilmiş iki farklı durum için kontrolcü kuvvetleri iki boyutlu durum için elde edilmiş ve çok boyutlu bir sistem için genelleştirilmiştir. Tüm durumlarda mevcut incelenen sistemler üstel kararlı başka bir sistemlere yönlendirilmişse de yönlendirilen sistemlerin üstel kararlı olup olmadığı hakkında herhangi bir ispat yapılmamıştır. Bu bölümde kontrolcü tasarımında kullanılan kararlı sistemler bir Lyapunov fonksiyonu yardımıyla irdelenmiştir.

(1)-(4) sistemi (6)-(10) sistemine yönlendirilmiştir. (6)-(10) sistemi için aşağıdaki Lyapunov fonksiyonu kullanılsın.

$$V_1 = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \int_0^1 (w_x^2 + w_y^2 + w_t^2) dx dy + \int_0^1 c_0 w^2(0, y, t) dy + \int_0^1 c_0 w^2(x, 0, t) dx \right] + \delta \int_0^1 \int_0^1 (1+x) w_x w_t dx dy + \delta \int_0^1 \int_0^1 (1+y) w_y w_t dx dy. \tag{59}$$

Bu noktada Young eşitsizliği kullanılırsa;

$$(w_x + w_y) w_t \leq \frac{w_x^2}{2} + \frac{w_t^2}{2} + \frac{w_y^2}{2} + \frac{w_t^2}{2} \tag{60}$$

$\delta < \frac{1}{2}$ seçilmesi durumunda V_1 fonksiyonunun pozitif tanımlı olacağı aşikardır. Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanıldığında

küçük δ değerlerinde öyle $m_1, m_2 > 0$ vardır ki;

$$m_1 U_1 \leq V_1 \leq m_2 U_1 \tag{61}$$

olur ki burada

$$U_1 = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \int_0^1 (w_x^2 + w_y^2 + w_t^2) dx dy + \int_0^1 c_0 w^2(0, y, t) dy + \int_0^1 c_0 w^2(x, 0, t) dx \right] \tag{62}$$

Böylece seçilen Lyapunov fonksiyonu zamana göre türevlenirse;

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}_1^{\&} = & \int_0^1 \int_0^1 w_{xt} w_x dx dy + \int_0^1 \int_0^1 w_{xt} w_y dx dy + \int_0^1 \int_0^1 w_t w_{xx} dx dy + \int_0^1 \int_0^1 w_t w_{yy} dx dy \\
 & + \int_0^1 c_0 w(0, y, t) w_t(0, y, t) dy + \int_0^1 c_0 w(x, 0, t) w_t(x, 0, t) dx \\
 & + \delta \int_0^1 \int_0^1 (1+x) [w_{xt} w_t + w_x w_{xx} + w_x w_{yy}] dx dy \\
 & + \delta \int_0^1 \int_0^1 (1+y) [w_{yt} w_t + w_y w_{xx} + w_y w_{yy}] dx dy.
 \end{aligned} \tag{63}$$

üçüncü ve dördüncü integralde kısmi integrasyon yapılır ise;

$$\int_0^1 \int_0^1 w_t w_{xx} dx dy = \int_0^1 w_t w_x \Big|_{x=0}^{x=1} dy - \int_0^1 \int_0^1 w_{xt} w_x dx dy, \tag{64}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 w_t w_{yy} dx dy = \int_0^1 w_t w_y \Big|_{y=0}^{y=1} dx - \int_0^1 \int_0^1 w_{xt} w_y dx dy, \tag{65}$$

elde edilir. Aynı zamanda (63) denkleminin son iki integralinde bulunan bazı çarpımlar için aşağıdaki özdeşlikler kullanılabilir.

$$w_{xt} w_t dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w_t^2}{2} \right) \tag{66}$$

$$w_x w_{xx} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w_x^2}{2} \right) \tag{67}$$

$$w_{yt} w_t dy = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_t^2}{2} \right) \tag{68}$$

$$w_t w_{yy} dy = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_y^2}{2} \right) \tag{69}$$

Dolayısıyla (64)-(69) eşitlikleri (63)'te kullanılır ise

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}_1^{\&} = & \int_0^1 [w_t(1, y, t) w_x(1, y, t) - w_t(0, y, t) w_x(0, y, t) + c_0 w(0, y, t) w_t(0, y, t)] dy \\
 & + \int_0^1 [w_t(x, 1, t) w_y(x, 1, t) - w_t(x, 0, t) w_y(x, 1, t) + c_0 w(x, 0, t) w_t(x, 0, t)] dx \\
 & + \delta \int_0^1 \int_0^1 (1+x) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w_t^2}{2} + \frac{w_x^2}{2} \right) \right] dx dy + \delta \int_0^1 \int_0^1 (1+y) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_t^2}{2} + \frac{w_y^2}{2} \right) \right] dx dy \\
 & + \delta \int_0^1 \int_0^1 [(1+x) w_x w_{yy} + (1+y) w_y w_{xx}] dx dy
 \end{aligned} \tag{70}$$

Bu noktada sınır değerlerdeki koşullar kullanılır ise;

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}_1^{\delta} = & -c_1 \int_0^1 w_t^2(1, y, t) dy dy - c_1 \int_0^1 w_t^2(x, 1, t) dy dy + \delta \int_0^1 [w_t^2(1, y, t) + w_x^2(1, y, t)] dy \\
 & - \frac{\delta}{2} \int_0^1 [w_t^2(0, y, t) + w_x^2(0, y, t)] dy - \frac{\delta}{2} \int_0^1 \int_0^1 [(w_t^2 + w_x^2)] dx dy \\
 & + \delta \int_0^1 [w_t^2(x, 1, t) + w_y^2(x, 1, t)] dx - \frac{\delta}{2} \int_0^1 [w_t^2(x, 0, t) + w_y^2(x, 0, t)] dx \\
 & - \frac{\delta}{2} \int_0^1 \int_0^1 [(w_t^2 + w_y^2)] dx dy + \delta \int_0^1 \int_0^1 [(1+x)w_x w_{xy} + (1+y)w_y w_{xy}] dx dy
 \end{aligned} \tag{71}$$

denkleminin on terimi için aşağıdaki özdeşliklerden faydalı olacaktır.

$$w_x w_{xy} dx = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_x^2}{2} \right) \tag{72}$$

$$w_y w_{xy} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w_y^2}{2} \right) \tag{73}$$

(71) denklemini düzenlenilip (72) ve (73)'te elde edilenler de kullanıldığında;

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}_1^{\delta} = & -\left(c_1 - \delta(1+c_1^2)\right) \int_0^1 w_t^2(1, y, t) dy dy - \left(c_1 - \delta(1+c_1^2)\right) \int_0^1 w_t^2(x, 1, t) dy dy \\
 & - \frac{\delta}{2} \int_0^1 [w_t^2(0, y, t) + w_x^2(0, y, t)] dy - \frac{\delta}{2} \int_0^1 \int_0^1 [(2w_t^2 + w_y^2 + w_x^2)] dx dy \\
 & - \frac{\delta}{2} \int_0^1 [w_t^2(x, 0, t) + w_y^2(x, 0, t)] dx + \delta \int_0^1 [(1+x)w_y(x, 1, t)w_x(x, 1, t)] dx \\
 & - \delta \int_0^1 [(1+x)w_y(x, 0, t)w_x(x, 0, t)] dx + \delta \int_0^1 [(1+y)w_y(1, y, t)w_x(1, y, t)] dy \\
 & - \delta \int_0^1 [(1+y)w_y(0, y, t)w_x(0, y, t)] dy + \frac{\delta}{2} \int_0^1 (1+x)w_x^2 \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\
 & + \frac{\delta}{2} \int_0^1 (1+y)w_y^2 \Big|_{x=0}^{x=1} dy - \frac{\delta}{2} \int_0^1 \int_0^1 w_x^2 dx dy - \frac{\delta}{2} \int_0^1 \int_0^1 w_y^2 dx dy
 \end{aligned} \tag{74}$$

Sınır değerler tekrar kullanılır ise sonuçta;

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}_1^{\delta} = & -\left(c_1 - \delta\left(1 + \frac{5c_1^2}{2}\right)\right) \int_0^1 w_t^2(1, y, t) dy dy - \left(c_1 - \delta\left(1 + \frac{5c_1^2}{2}\right)\right) \int_0^1 w_t^2(x, 1, t) dy dy \\
 & - \frac{\delta}{2} \int_0^1 [w_t^2(0, y, t) + w_x^2(0, y, t)] dy - \frac{\delta}{2} \int_0^1 \int_0^1 [(w_t^2 + w_y^2 + w_x^2)] dx dy \\
 & - \frac{\delta}{2} \int_0^1 [w_t^2(x, 0, t) + w_y^2(x, 0, t)] dx + \delta \int_0^1 [(1+x)w_y(x, 1, t)w_x(x, 1, t)] dx \\
 & - \delta c_0^2 \int_0^1 (1+x)w^2(x, 0, t) dx - \delta c_0^2 \int_0^1 (1+y)w^2(0, y, t) dy \\
 & + \frac{3\delta c_1^2}{2} \left[\int_0^1 xw_t^2(x, 1, t) dx + \int_0^1 yw_t^2(1, y, t) dy \right].
 \end{aligned} \tag{75}$$

şeklini alır. Burada sadece son terimin işareti pozitiftir. Son terim irdelenirse;

$$\int_0^1 x w_t^2(x, 1, t) dx \leq \int_0^1 |x| w_t^2(x, 1, t) dx \leq \int_0^1 w_t^2(x, 1, t) dx \tag{76}$$

$$\int_0^1 y w_t^2(1, y, t) dy \leq \int_0^1 |y| w_t^2(1, y, t) dy \leq \int_0^1 w_t^2(1, y, t) dy \tag{77}$$

Bu durumda Lyapunov fonksiyonunun zamana türevinin işareti ile ilgili (76) ve (77) eşitsizlikleri (75) eşitliği ile birlikte irdelendiğinde elde edilen sonuç δ parametresine bağlıdır. (78) eşitsizliğinden de görüleceği gibi $\delta < \frac{c_1}{1 + 4c_1^2}$ koşulunun sağlanması durumunda fonksiyonun türevi negatif tanımlı olur.

$$\begin{aligned} V_1' \leq & -\left(c_1 - \delta(1 + 4c_1^2)\right) \int_0^1 w_t^2(1, y, t) dy - \left(c_1 - \delta(1 + 4c_1^2)\right) \int_0^1 w_t^2(x, 1, t) dx \\ & - \frac{\delta}{2} \int_0^1 \left[w_t^2(0, y, t) + w_x^2(0, y, t) \right] dy - \frac{\delta}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[w_t^2 + w_y^2 + w_x^2 \right] dx dy \\ & - \frac{\delta}{2} \int_0^1 \left[w_t^2(x, 0, t) + w_y^2(x, 0, t) \right] dx - \delta c_0^2 \int_0^1 (1 + x) w^2(x, 0, t) dx \\ & - \delta c_0^2 \int_0^1 (1 + y) w^2(0, y, t) dy. \end{aligned} \tag{78}$$

δ parametresinin kontrol tasarım parametresi olduğu düşünülse keyfi seçilebilir. $\delta < \frac{c_1}{1 + 4c_1^2}$ koşulunun sağlanması durumunda olası büyük bir M değeri için

$$U_1(t) \leq M e^{-t/M} U_1(0) \tag{79}$$

yazılabilir. Sonuç olarak (61) ve (79) eşitsizlikleri (6)-(10) hedef sisteminin üstel kararlı olduğunu ispatlar.

Benzer bir ispat genelleştirilmiş çok boyutlu sistem için de aşağıdaki Lyapunov fonksiyonu yardımıyla elde edilebilir.

$$V = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \dots \int_0^1 \left(w_t^2 + \sum_{i=1}^n w_{x_i}^2 \right) \mathbf{dx} + c_0 \int_0^1 \sum_{i=0}^n w^2(x_i = 0, \mathbf{x}_k, t) \mathbf{dx}_k \right] + \delta \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{i=1}^n (1 + x_i) w_{x_i} w_t \mathbf{dx}_k. \tag{80}$$

3.2. Kelvin-Voigt sönümlü sistemi için kararlılık analizi

Bir önceki bölümde incelenmiş olan çok boyutlu Kelvin-Voigt sönümlü sistem için aşağıdaki (81)-(83) kararlı sistemi hedef sistem olacak şekilde seçilmişti. Fakat (54)-(56) sisteminin kararlılığının analizi bu noktaya bırakılmış idi.

$$w_{tt}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n w_{x_i x_i}(\mathbf{x}, t) + d \cdot \sum_{i=1}^n w_{x_i x_i t}(\mathbf{x}, t) - c \cdot \sum_{i=1}^n w(\mathbf{x}, t) - c \cdot d \cdot \sum_{i=1}^n w_t(\mathbf{x}, t) \tag{81}$$

$$w_{x_i}(0, \mathbf{x}_k, t) = 0, \tag{82}$$

$$w(1, \mathbf{x}_k, t) = 0. \tag{83}$$

(81) denklemi için

$$w(\mathbf{x}, t) = T(t) \cdot \prod_{i=1}^n X_i(x_i) \tag{84}$$

Şeklinde bir çözüm önerisinde bulunulur ve (81) denklemine yerleştirilir ise;

$$\frac{T'' + c_0 \frac{T'}{T} + c_0}{1 + \frac{T'}{T}} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i''(x_i)}{X_i(x_i)} = \lambda \quad (85)$$

Denklemine ulaşılır ki buradan $T(t) = e^{\sigma t}$ ve $X_i(x_i) = e^{\lambda_i x_i}$ çözüm önerisi ile karakteristik denklemler aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\sigma_n^2 + \sigma_n [d(c_0 - \lambda)] + (c_0 - \lambda) = 0, \quad (86)$$

$$\lambda_i = -\left(\frac{\pi}{2} + n_i \pi\right) \quad (87)$$

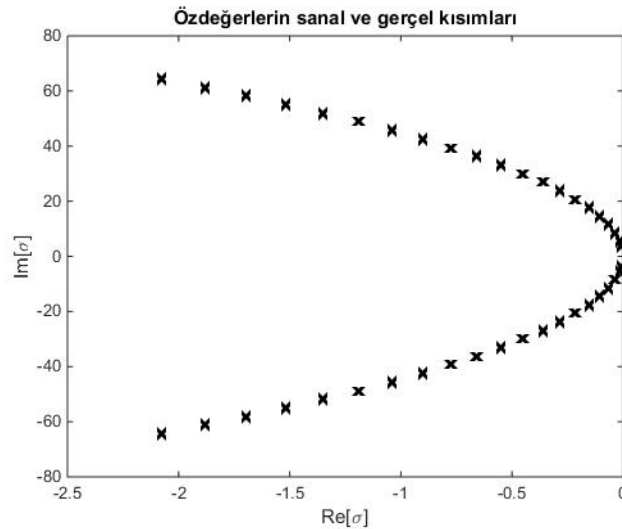
Burada $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda$ 'dir. Böylelikle karakteristik denklem;

$$\sigma_n^2 + \sigma_n \left[d \left(c_0 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \right] + \left(c_0 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) = 0, \quad (88)$$

veya

$$\sigma_n^2 + \sigma_n \left[d \left(c_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi}{2} + n_i \pi \right)^2 \right) \right] + \left(c_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi}{2} + n_i \pi \right)^2 \right) = 0 \quad (89)$$

halini alır. Burada herhangi farklı değerler alınarak (89) denkleminin özdeğerleri bir bilgisayar programı yardımıyla incelendiğinde Şekil 1'deki sonuç elde edilmektedir.



Şek. 1. (81)-(83) kararlı sistemin özdeğerlerinin davranışı

Sistemin tüm özdeğerlerinin şeklin solunda kaldığı görülmektedir. Bu analiz yapılırken birisi dışındaki tüm n_i değerleri sıfır alınıp sadece birisi için birden yirmiyeye kadar farklı n değerleri ile sonuçlar alınmıştır. Diğer n_i değerleri ile de incelense sistemin özdeğerlerinin benzer çıkacağı (89) denklemden anlaşılmaktadır. Analiz esnasında $d = 0.001$, $c = 0$ ve 10 gibi herhangi pozitif tanımlı küçük değerler alınmıştır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada daha önce tek dalga denklemi ile modellenmiş sistemlerin kontrolü çok boyutlu sistemler için genelleştirilmiştir. Seçilmiş olan iki farklı dalga denklemi ile modellenmiş sistem öncelikle iki boyutlu durumda ve sonrasında da çok boyutlu durumda irdelenmiş ve sistemleri üstel kararlı bir hale yönlendirmek amaçlı kullanılması gereken kontrolcüler kısmi türevli denklemler için geri adımlamalı kontrolcü teorisi yardımıyla tasarlanmıştır.

Ardından yönlendirilmek istenilen hedef sistemlerin kararlılıkları incelenmiş ve hedef sistemlerin üstel kararlı oldukları ispatlanmıştır. Böylelikle bugüne değin çok boyutlu sistemler için elde edilmemiş olan geri adımlamalı kontrolcü çok boyutlu dalga denklemi ile modellenen sistemler için de elde edilmiş analitik olarak sonuçlar net bir biçimde sunulmuştur.

REFERANSLAR

Krstic, M., Smyshlyaev, A. (2003). Explicit State and Output Feedback Boundary Controllers for Partial Differential Equations, *Journal of Automatic Control, University of Belgrade*, 13(2), 1-9. doi:10.2298/JAC0302001S

Krstic, M., Smyshlyaev, A. (2008). *Boundary Control of PDEs, A Course on Backstepping Designs*, Siam.

Krstic, M., Smyshlyaev, A. (2008). Adaptive control of PDEs. *Annual Reviews in Control*, 32, 149-160. doi:10.1016/j.arcon.2008.05.001

Krstic, M., Guo, B. Z., Balogh, A., Smyshlyaev, A. (2008). Output-feedback stabilization of an unstable wave equation. *Automatica*, 44, 63-74. doi:10.1016/j.automatica.2007.05.012

Krstic, M. (2011). Dead-Time Compensation for Wave/String PDEs. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 133, 031004/1–13, doi:10.1115/1.4003638

Sezgin A., Krstic, M. (2015). Boundary Backstepping Control of Flow-Induced Vibrations of a Membrane at High Mach Numbers. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 137(8), 081003/1-8, doi: 10.1115/1.4029468

Krstic, M., Smyshlyaev, A. (2008). Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays. *Systems and Control Letters*, 57, 750-758. doi:10.1016/j.sysconle.2008.02.005.

Bekiaris-Liberis, N., Krstic, M., (2010). Compensating the distributed effect of a wave PDE in the actuation or sensing path of MIMO LTI systems. *Systems and Control Letters*, 59, 713-719. doi:10.1016/j.sysconle.2008.02.005.

Cheng, M.B., Radisavljevic, V., Su, W.C. (2011). Sliding mode boundary control of a parabolic PDE system with parameter variations and boundary uncertainties. *Automatica*, 47(2), 381-387. doi:10.1016/j.automatica.2010.10.045

Ng, J., Dubljevic, S., (2012). Optimal boundary control of a diffusion-convection-reaction PDE model with time-dependent spatial domain: Czochralski crystal growth process. *Chemical Engineering Science*, 67(1), 111-119. doi:10.1016/j.ces.2011.06.050

Chrysafinos, K., Gunzburger, M.D., Hou, L.S. (2006). Semidiscrete approximations of optimal Robin boundary control problems constrained by semilinear parabolic PDE. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 323(2), 891-912. doi:10.1016/j.jmaa.2005.10.053

Tang, S., Xie, C., (2011). State and output feedback boundary control for a coupled PDE-ODE system. *Systems and Control Letters*, 60(8), 540-545. doi:10.1016/j.sysconle.2011.04.011.

Bekiaris-Liberis, N., Krstic, M., (2011). Compensating the Distributed Effect of Diffusion and Counter-Convection in Multi-Input and Multi-Output LTI Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3), 637-643. doi: 10.1109/CDC.2010.5716993

Ramirez, J.A., Puebla, H., Ochoa-Tapia, J.A. (2001). Linear boundary control for a class of nonlinear PDE processes. *Systems and Control Letters*, 44(5), 395-403. doi:10.1016/S0167-6911(01)00159-1

Cheung, W.S., (2001). Some New Poincaré-Type inequalities. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 63(2), 321–327,. Doi:10.1017/S0004972700019365

Krstic, M. (2010). Adaptive Control of an Anti-Stable Wave PDE: Theory and Application Oil Drilling, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive System*, 17, 853-882, doi:10.3182/20130703-3-FR-4038.00154

Cox, S., Zuazua, E., (1994). The rate at which energy decays in a string damped at one end. *Comm. Partial Differential Equations*, 19, 213-243.

Krstic, M., Kanellakopoulos I., Kokotovic, P., (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*, Wiley.