

Deneysel Yöntemlerle Titreşim Biçim Tanınması

Nihat OKYAY

Araştırma Görevlisi,
Makina Mühendisliği Bölümü,
Orta Doğu Teknik Üniversitesi,
Ankara

Mehmet ÇALIŞKAN

Doç.Dr.,
Makina Mühendisliği Bölümü,
Orta Doğu Teknik Üniversitesi,
Ankara

Bu çalışmada, mekanik bir sistemin titreşim biçim tanınmasını gerçekleştiren bir yazılım paketi tanıtılmaktadır. Yazılım, laboratuvar tipi sayısal bir bilgisayar için geliştirilmiş olup, sistem üzerinde özel olarak seçilen konumlardan ölçülen ivme ve uyarıcı kuvvet verilerini girdi olarak okutmakta titreşim doğal sıklıklarını (frekanslarını) ve bu sıklıklara karşılık gelen yapısal sönüm faktörleri (oranları) ile titreşim biçimlerini hesaplamaktadır. Yazılımı deneme amacıyla seçilen serbest-serbest sınır koşullu dikdörtgen kesitli bir kiriş için elde edilen deneysel sonuçlar uygulama kısmında verilmekte ve kuramsal sonuçlarla karşılaştırma yapılarak gözlenen farklılıkların olası nedenleri üzerinde tartışılmaktadır.

GİRİŞ

Uygulamada karşılaşılan mekanik titreşim problemlerine kuramsal bir yaklaşım genelde kolay değildir. Sistemlerin titreşim özelliklerinin deneysel yöntemlerle belirlenmesi bu nedenle son yıllarda önem kazanmıştır.

Kuramsal olarak diferansiyel denklemlerle tanımlanan mekanik bir sistemin dinamik davranışını, uygulamada sistemin deneysel olarak ölçülebilen doğal sıklıklarını (frekanslarını) ve titreşim biçimlerini (modlarını) kullanarak kestirmek mümkündür. Sözü edilen bu özellikleri (doğal sıklıkları ve titreşim biçimlerini) bulmada kullanılan yöntemler BİÇİM TANILANMASI olarak bilinmektedir.

Kuramsal dinamik çözümleme için, sistemin kütle $[M]$, dirençlilik $[K]$ ve sönüm $[C]$ (veya $[H]$) matrisleri gereklidir. Deneysel olarak doğrudan ölçülemeyen bu matrisler, sistemin ölçülebilen titreşim özelliklerinden (doğal sıklıkları, sönüm değerleri ve titreşim biçimleri) yararlanılarak hesaplanabilir. Eldeki sistemin sonlu ya da sınırlı sayıda serbestlik derecesine sahip olduğu varsayımı bu tür bir yaklaşım için zorunludur.

Biçim çözümleme yöntemi, temel olarak, sistemi uyaran bir kuvvet ile bu kuvvetin yarattığı etkinin ölçülmesi olayına dayanır. Sistem üzerinde çeşitli konumlarda ve belirli bir sıklık dilimi içinde alınan uyarıcı kuvvete sistemin verdiği yanıt (tepe) verileri sistemin titreşim davranışının tanınması için yeterlidir. Biçim tanılama yöntemleri tek noktadan uyarı ve çok noktadan uyarı yöntemleri olarak iki ana grupta toplanabilir. Bu çalışmada uygulanması kolay, daha az zaman alan tek noktadan uyarı yöntemi kullanılmıştır.

Günümüzde tek noktadan uyarı yöntemi olarak en çok tepe-geçerlik ve iletim işlevi yöntemleri kullanılmıştır [1], [2]. Bu çalışmada bir çok açıdan daha üstün olan iletim işlevi yöntemi yeğlenmiştir [1]. Anılan yöntem hızlı Fourier dönüşümü (FFT) ve sayısal im (sinyal ya da işaret) işleme yöntemlerinin getirdiği kolaylığa dayanmaktadır. Sistem üzerinde çeşitli konumlarda uygulanan uyarı ve bu uyarıya karşılık sistemin verdiği yanıtlar, sayısal im işleme teknikleri ve FFT kullanılarak önceden belirlenmiş veri toplama konumları için sıklık yanıt işlevi kestirimlerinin hesaplanmasında kullanılır. Veri toplama da yaygın şekilde uygulanan iki ayrı yöntem şöyle özetlenebilir [1], [3], [4].

- i) Sistem özel seçilen konumlardan sırasıyla uyarılır ve sistemin verdiği yanıtlar hep aynı konumda ölçülür.
- ii) Uyarı sisteme hep aynı konumdan verilir ve önceden belirlenmiş konumlarda sistemin verdiği yanıtlar sırasıyla ölçülür.

Uyarı tipi olarak darbe ve geniş sıklık kuşaklı rasgele uyarı türleri uygulamada yaygın olarak kullanılmaktadır.

Herhangi bir konum için bulunan sıklık yanıt işlevi kestirimlerinden, seçilen sıklık aralığı içinde düşen doğal sıklıklar sırasıyla elde edilebilir. Sözü edilen sıklıklar, ortalama sıklık yanıt işlevi kestirimindeki tepe noktalarına karşı gelen sıklık değerleridir. Ayrıca, bu sıklık yanıt işlevi kestirimi eğrisi üzerinden uygun bir eğri geçirilerek sistemin her titreşim biçimine ait yapısal sönüm faktörü hesap-

lanabilir. Biçim sönüm değerleri ve diğer konumlara ait sıklık yanıt işlevi kestirimleri kullanılarak, ilgili aralıktaki doğal sıklıklara karşı gelen titreşim biçimleri elde edilebilir. Sönümsüz bir model her zaman çözümü kolaylaştırır. Buna karşılık rezonans bölgelerindeki yanıtlar göz önüne alındığında, sönümlü bir modelin seçilmesinin zorunlu olduğu ortaya çıkmaktadır. Anılan sönümün yapısal ya da viskoz olarak seçilmesi sistemin yapısına bağlı olarak değişir.

Bu çalışmada, laboratuvar tipi bir bilgisayar (MINC-23) yardımı ile dikkörtgen kesitli bir giriş titreşim biçimi çözümüyle deneysel olarak gerçekleştirilmektedir. Kullanılan yöntemin genel oluşu nedeniyle BASIC programlama dilinde hazırlanan yazılım paketinin daha karmaşık sistemlere uygulanabilmesi, eldeki bilgisayarın hız ve bellek kapasitesi ile sınırlı bulunmaktadır.

KURAMSAL YAKLAŞIM

Yapısal sönümlü mekanik sistemler için genel hareket denklemi

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K+iH]\{X\} = \{F\} \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir. Daha önce de belirtildiği gibi, burada $[M]$ kütle matrisi, $[K+iH]$ karmaşık dirençlik matrisi, $\{X\}$ yer değiştirme vektörü, $\{F\}$ kuvvet vektörü olarak tanımlanmaktadır. Kuvvet vektörü sıfırlanarak elde edilen serbest hareket denklemi

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K+iH]\{X\} = \{0\} \quad (2)$$

şeklini almaktadır. Harmonik titreşimler için bu denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[K+iH] - \omega^2 [M] X = \{0\} \quad (3)$$

Bu eşitliğin çözümünden N (seçilen serbestlik derecesi) sayıda karmaşık öz değer ω_r^2 ($r=1,2,\dots,N$) ve bu öz değerlere ilişkin özvektörler $\{\tilde{\phi}\}_r$ ($r=1,2,\dots,N$) elde edilir. (-) işareti, söz konusu değer karmaşık olduğunu belirtmek için kullanılmıştır. Her özdeğer ve özvektör eşitlik (2)'yi sağlayacağından,

$$[K+iH - \omega^2 M] \{\tilde{\phi}\}_r = \{0\} \quad r=1,2,\dots,N \quad (4)$$

yazılabilir. Çözüm kümesini iki ayrı matris ile belirtmek olasıdır. Bunlar karmaşık ve köşegen özdeğer matrisi $[\tilde{\omega}^2]$ ile karmaşık biçim matrisi $[\tilde{\phi}]$ 'dir.

Eşitlik (4)'ü, $\{\tilde{\phi}\}_r$ özvektörü ve onun bir değişmez (sabit) ile çarpımı olan $\alpha\{\tilde{\phi}\}_r$ 'ın da sağladığı kolayca görülmektedir.

Özvektörlerin kütle ve dirençlik matrislerine göre dikey (ortogonal) olma özelliğinden yararlanılarak oluşturulan normalleştirilmiş biçim matrisi $[\Phi]$ ile gösterilirse, dikey olma özelliği

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (5)$$

$$[\Phi]^T [K+iH] [\Phi] = [\tilde{\omega}^2] \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir. Normalleştirilmiş $\{\tilde{\phi}\}_r$ özvektörü ise,

$$\{\tilde{\phi}\}_r = \{\tilde{\phi}\}_r / \sqrt{m_r} \quad (7)$$

eşitliğiyle elde edilir. Burada m_r , titreşim biçimi kütlesi olarak adlandırılmaktadır. Bu parametre

$$m_r = \{\tilde{\phi}\}_r^T [M] \{\tilde{\phi}\}_r \quad (8)$$

eşitliğinden elde edilir. Ayrıca,

$$\tilde{\omega}_r^2 = \omega_r^2 (1+i\eta_r) \quad (9)$$

şeklinde yazılan ilişkide ω_r , r 'inci doğal sıklık, η_r ise, r 'inci biçim sönüm (yapısal) faktörüdür.

Sistemin sürekli rejim yanıtını (sıklık yanıt işlevini), dinamik esneklik $\tilde{\alpha}(\omega)$ kavramını kullanarak belirlemek olanağı bulunmaktadır. Dinamik esneklik (reseptans), dinamik yer değiştirmenin, bu oluşuma neden olan (kuvvete) oranıdır ve biçim parametreleri cinsinden

$$\tilde{\alpha}_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{(r\tilde{\phi}_j)(r\tilde{\phi}_k)}{\omega^2 [1 - (\frac{\omega}{\omega_r})^2 + i\eta_r]} \quad (10)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\tilde{\alpha}_{jk}(\omega)$ j konumundaki yer değiştirmenin k konumunda uygulanan kuvvete (uyarıya) oranıdır. $(r\tilde{\phi}_j)$ ise normalleştirilmiş karmaşık r 'inci özvektörün j 'inci öğesini belirtir. Eşitlik (10)'un pay kısmında bulunan çarpıma, karmaşık biçim sabiti adı verilir ve rA_{jk} ile gösterilir. Bu durumda Eşitlik (10) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\tilde{\alpha}_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{r C_{jk} e^{i\theta_r}}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_r})^2 + i\eta_r]} \quad (11)$$

Burada

$$r C_{jk} e^{i\theta_r} = \frac{\tilde{A}_{jk}}{\omega_r^2} \quad (12)$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu eşitlik, herhangi bir doğal sıklık çevresinde daha basite indirgenerek

$$\tilde{\alpha}_{jk}(\omega) \approx \frac{r C_{jk} e^{i\theta_r}}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_r})^2 + i\eta_r]} + \tilde{D}_r \quad (13)$$

yazılabilir. Bu gösterimde \tilde{D}_r karmaşık bir sabit olup ω_r etrafındaki dar bir sıklık diliminde, r 'inci biçimin dışındaki diğer titreşim biçimlerinin etkisini içermektedir. Sistem aşırı sönümlü ve doğal sıklıklar birbirine yakın ise, bu modelin uygulanmasında güçlükler ortaya çıkmaktadır. Düşük sönümlü ve ayrık doğal sıklık özelliği gösteren sistemler için iyi sonuçlar elde edilebilmektedir [1].

Eğer eşitlik (12)'de verilen dinamik esneklik, karmaşık düzlemde (Argand düzlemi) gösterilirse, bunun merkezden \tilde{D}_r kadar sapmış, sanal eksene göre θ_r kadar dönmüş ve (C_{jk}/η_r) çapında bir çember olduğu görülür [5], [6], [7].

Genel olarak Şekil 1'de gösterilen çember üzerinde merkeze en uzak olan noktanın r'inci doğal sıklığa karşı geldiği kabul edilir [1]. Titreşim biçimi çözümlemesi ise aşağıda verilen sırada gerçekleştirilir [6]:

1. Uyarı için uygun bir konumun seçimi ile deneye başlanır ve deney sonuna kadar uyarıcı bu konumda (k konumu) tutulur.

2. Seçilen k konumuna ait dinamik esneklik $\tilde{\alpha}_{jk}(\omega)$ sıklık işlevi olarak hesaplanarak değerleri bulunur ($r=1,2,\dots,N$) ve sırasıyla şu işlemler yapılır:

- r'inci doğal sıklık dolayında belirli sayıda sıklığa karşı gelen dinamik esneklik değerleri kullanılarak bu noktalardan geçen en iyi çemberin merkezinin konumu ve çapı hesaplanır.
- Bu çember üzerinde ω_r 'in konumu saptanarak yarım güç noktaları (Şekil 1'deki A ve B noktaları), bu noktalara karşılık gelen sıklık (Şekil 1'deki ω_1 ve ω_2) ve D_r değerleri ($r=1,2,\dots,N$) bulunur.
- Yarım güç eşitliği kullanılarak r'inci doğal sıklıktaki biçim sönüm faktörü η_r hesaplanır.

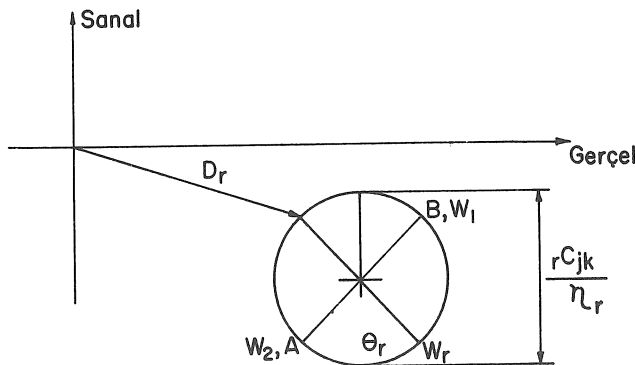
$$\eta_r = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_r}, \quad r=1,2,\dots,N \quad (14)$$

- Çemberin çapı ve konumu yardımıyla karmaşık biçim değişmezi (sabit) ${}_r\tilde{\phi}_k$ bulunur:

$$|{}_r\tilde{\phi}_k| = \omega_r \sqrt{r} C_{kk} \quad r=1,2,\dots,N \quad (15)$$

3. Ölçüm için gerekli diğer (N-1) konum, sistem üzerinde belirlenir.

4. Seçilen bu yeni noktalar için dinamik esneklik $\tilde{\alpha}_{jk}(\omega)$ hesaplamaları yapılır ($j=1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,N$). Daha önce hesaplanan ω_r ve η_r değerleri, yeni hesaplanan dinamik esneklik değerleri ile birlikte kullanılarak ${}_r\tilde{\phi}_j$ ($j=1,2,\dots,k-1, k+1,\dots,N$ ve $r=1,2,\dots,N$) değerleri bulunur. Hesaplanan bu normalleştirilmiş özvektör değerlerinden biçim matrisi oluşturulur. Biçim matrisi yardımıyla sistemin kütle ve karmaşık dirençlilik matrisleri elde edilir. Sistem üzerindeki



Şekil 1 Dinamik esneklik değerlerinin argand düzleminde gösterimi

herhangi bir konum için uyarıcı kuvvet ile o konumdaki yerdeğiştirme arasındaki sıklık yanıt işlevi olarak tanımlanan dinamik esneklik $\tilde{\alpha}_{jk}(\omega)$ 'nin hesaplanması, aşağıda özetlenmektedir [8]:

- İlgilenilen en yüksek sıklık saptanır.
- Örneklem periyodu (h), ilgilenilen en yüksek sıklık Nyquist sıklığa (f_c) eşit olacak şekilde seçilir. Burada örneklem sıklığı, ilgilenilen sıklığın en az iki katına eşit olacak şekilde alınır.

$$h = \frac{1}{2f_c} \quad (16)$$

- İstenilen duyarlık σ/m değerine bağlıdır. Burada σ ölçülen im'in standart sapmasını, m ise ortalama değerini gösterir ki bu değer genellikle 1'e eşit alınır [8].
- Çözme kuşak genişliği (Be) sistemin niteliği ve kullanılan bilgisayarın bellek kapasitesi göz önüne alınarak olabildiğince küçük seçilir.

- Gerekli örneklem kayıt uzunluğu (T) zaman cinsinden aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$\frac{\sigma}{m} \approx \frac{1}{\sqrt{BeT}} \quad (17)$$

- Gerekli veri sayısı ise

$$n = \frac{T}{h} \quad (18)$$

formülünden hesaplanır.

- Sistemden gelen analog ivme $\{x(t)\}$ ve uyarı kuvveti $\{F(t)\}$ im'leri bilgisayar üzerinde bulunan analog-sayısal çevirici (ADC)'de sayısal şekle dönüştürülür. Sayısal olarak kaydedilen $\{x(t_i)\}$ ve $\{F(t_i)\}$ verileri bazı ön işlemlerden geçtikten sonra hızlı Fourier dönüşümü (FFT) programı uygulanarak $\{\tilde{x}(f_i, T)\}$ ve $\{\tilde{F}(f_i, T)\}$ elde edilir. Burada $\{\tilde{x}(f_i, T)\}$, $\{x(t_i)\}$ 'nin; $\{\tilde{F}(f_i, T)\}$ 'de $\{F(t_i)\}$ 'nin Fourier dönüşümlerini simgeler. Bu dönüşümler kullanılarak tek taraflı ($f \geq 0$) güç izgesi (spektrumü) yoğunluğu kestirimleri aşağıdaki şekilde hesaplanır (uygulamada güç izgesi yoğunluğu kestirimleri kullanıldığı gibi güç izgesi kestirimleri de yaygın olarak kullanılmaktadır. Güç izgesi yoğunluğu kestirimi, güç izgesi kestirimi değerlerinin çözme kuşak genişliğine (Be) bölünmesiyle elde edilir).

$$G_{xx}(f_i) = \frac{n \cdot h}{\pi Be} \tilde{x}^*(f_i, T) \tilde{x}(f_i, T) \quad (19)$$

$$G_{FF}(f_i) = \frac{n \cdot h}{\pi Be} \tilde{F}^*(f_i, T) \tilde{F}(f_i, T) \quad (20)$$

$$\tilde{G}_{rX}(f_i) = \frac{n \cdot h}{\pi Be} \tilde{F}^*(f_i, T) \tilde{x}(f_i, T) \quad (21)$$

Bilgisayarın yazılım paketinde bulunan FFT algoritması kullanılmıştır.

Burada $i=0,1,\dots,n-1$ ve (*) işareti sözü edilen

karmaşık niceliğin eşleniğini belirtmek için kullanılmıştır ve

$$f_i = \frac{i}{n h} \quad (22)$$

viii) Yukarıda verilen i'inci basamak ile vii'ci basamak arasında kalan işlemler her örneklem kayıt seti $\{x(t_i)\}_\ell$ ve $\{F(t_i)\}_\ell$ için tekrarlanır. ($\ell=1,2,\dots,n_d$) burada n_d örneklem kayıt sayısını, x oluşturulan sistem modeli çıktısını, F ise girdiyi simgelemektedir.

ix) Her sıklık için güç izgesi yoğunluğu kestirimlerinin ortalaması alınarak ortalama güç izgesi yoğunluğu kestirimi hesaplanır.

$$\hat{G}_{xx}(f_i) = \frac{1}{Be \cdot n_d} \sum_{\ell=1}^{n_d} G_{xx}(f_i)_\ell \quad (23)$$

$$\hat{G}_{FF}(f_i) = \frac{1}{Be \cdot n_d} \sum_{\ell=1}^{n_d} G_{FF}(f_i)_\ell \quad (24)$$

$$\hat{G}_{F_x}(f_i) = \frac{1}{Be \cdot n_d} \sum_{\ell=1}^{n_d} \tilde{G}_{F_x}(f_i)_\ell \quad (25)$$

x) Elde edilen ortalama güç izgesi yoğunluğu kestirimleri kullanılarak sıklık yanıt ve eşevresellik işlevi kestirimleri bulunur.

$$\hat{H}_{F_y}(f_i) = - \frac{\hat{G}_{F_x}(f_i)}{f_i^2 \hat{G}_F(f_i)} \quad (26)$$

Burada y , ölçülen x ivmesinden elde edilen yer-değiştirmeyi simgelemektedir.

$$\hat{\gamma}_{F_x}^2(f_i) = \frac{|\hat{G}_{F_x}(f_i)|^2}{\hat{G}_{FF}(f_i) \cdot \hat{G}_{xx}(f_i)} \quad (27)$$

Eşitlik (27)'de yer alan $||$ işareti ise karmaşık bir sayının büyüklüğünü ifade etmek için kullanılmıştır.

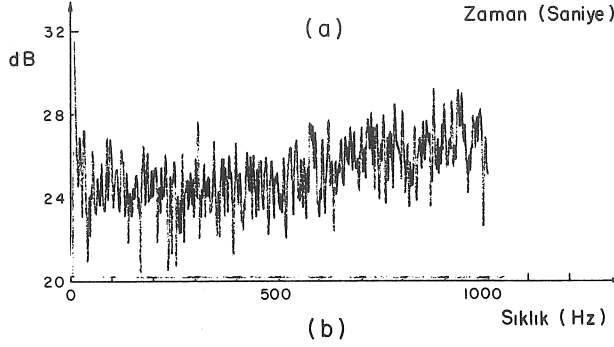
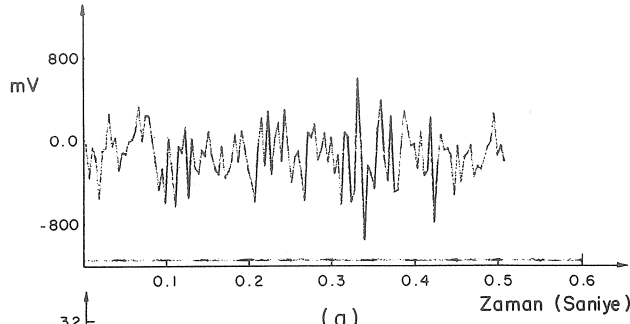
YAZILIM PAKETİ

BASIC programlama dilinde hazırlanan paket program istenilen çözme kuşak genişliği Be (Hz), bir örneklem kayıta olması gereken veri noktası sayısı n , ilgilenilen en yüksek sıklık f_c (Hz), gerekli çözümüleme duyarlılığı ve örneklem kayıt sayısı n_d 'yi girdi olarak alır. Bu girdileri kullanarak örneklem periyodunu hesaplar. Daha sonra her konum için n_d kadar, ADC (Analog-Sayısal Çevirici)'den geçirilerek sayısal hale dönüştürülmüş n sayıda veri içeren ivme ve uyarı kuvveti örneklem kayıtlarını bir disket üzerinde saklar. Her konuma ait bu verilerin, kullanılan bilgisayarın yazılım destek paketinde bulunan hızlı Fourier dönüşümü (FFT) programı yardımıyla, Fourier dönüşümleri alınır ve tek

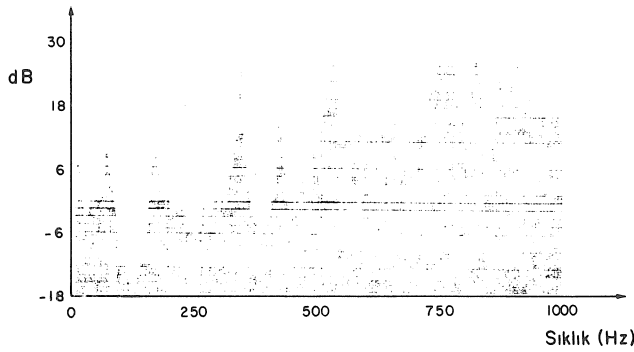
tarafli ($f > 0$) ortalama güç izgesi kestirimleri ($\hat{G}_{xx}(f)$, $\hat{G}_{F_x}(f)$ ve $\hat{G}_{FF}(f)$) sıklık yanıt işlevi kestirimleri ($\hat{H}_{F_y}(f)$) ve eşevresellik işlevi kestirimleri ($\hat{\gamma}_{F_x}^2(f)$) elde edilir. Hesaplanan sıklık yanıt işlevlerinden yararlanılarak ilgili sıklık aralığında seçilen serbestlik derecesi kadar ilk doğal sıklıklar sırasıyla hesaplanır. Ayrıca her doğal sıklık dolayında belirli bir bölge üzerinde en uygun çember geçirilerek biçim sönüm değerleri, biçim özvektörleri ve sonuçta biçim matrisi elde edilir.

Hazırlanan programın algoritması şöyle özetlenebilir:

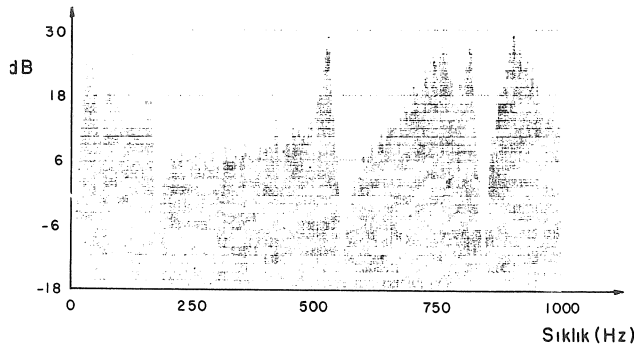
1. f , Be , n ve n_d değerlerini oku.
2. Gerekli örneklem periyodu h (saniye)'yi hesapla.
3. Her konum için n_d kadar $\{x(t)\}$ ve $\{F(t)\}$ ivme ve uyarıcı kuvvet verilerini, bilgisayardaki ADC'da sayısal şekle konulduktan sonra disket üzerine kaydet.
4. Her konuma ait bu verilerin hızlı Fourier dönüşümlerini (FFT) hesapla.
5. Sırasıyla her kayıt takımı için $G_{xx}(f_i)$, $G_{FF}(f_i)$ ve $\tilde{G}_{F_x}(f_i)$ 'yi hesapla.
6. Her konuma ait n_d kadar $G_{xx}(f_i)$, $G_{FF}(f_i)$ ve $\tilde{G}_{F_x}(f_i)$ 'nin her sıklık kuşağında ortalamalarını alarak $\hat{G}_{xx}(f_i)$, $\hat{G}_{FF}(f_i)$ ve $\hat{G}_{F_x}(f_i)$ 'yi hesapla.
7. Ortalama güç izgesi yoğunluğu kestirimlerini kullanarak her konuma ait sıklık yanıt işlevi kestirimi $\hat{H}_{F_y}(f_i)$ 'yi ve eşevresellik işlevi kestirimi $\hat{\gamma}_{F_x}^2(f_i)$ 'yi hesapla. Böylece ilgili sıklık aralığındaki ilk N (serbestlik derecesi) doğal sıklığı sapt.
8. Noktasal sıklık yanıt işlevi kestirimi (uyarı kuvvetinin uygulandığı noktaya ait olan) üzerinde her ω_r dolayında belirli sayıdaki sıklığa karşı gelen sıklık yanıt işlevi (dinamik esneklik) değerleri üzerinden geçen en iyi çemberin konumunu ve çapını hesapla.
9. Çember üzerinde ω_r 'nin yerini saptayarak yarım güç noktalarını belirle ve yarım güç formülünden yararlanarak biçim sönüm faktörlerini hesapla. Çemberin konumundan faydalanarak kütleğe göre normalleştirilmiş biçim özvektör elemanını hesapla.
10. 8'inci ve 9'uncu basamaklarda yer alan işlemleri diğer konumlara ait olan sıklık yanıt işlevi kestirimleri (dinamik esneklik) için yineleyerek biçim matrisinin tüm elemanlarını elde et.
11. Biçim matrisinin her kolonu bir titreşim biçimi vektörünü içermektedir. Her biçim vektörünü sistem geometrisinin işlevi olarak çiz.



Şekil 3 Deneyde kullanılan rasgele im'in
a) zamanda değişimi
b) ortalama güç izgesi kestirimi
re: 1 μ W



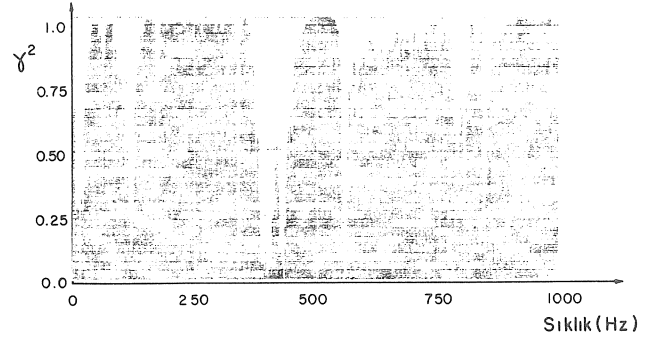
Şekil 4 Ortalama uyarı kuvveti güç izgesi kestirimi (Konum VI) re: 1 μ W



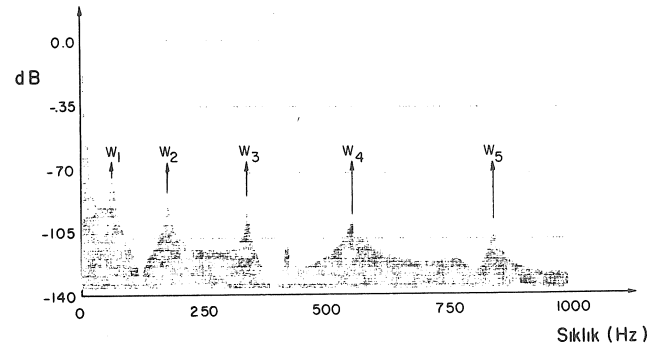
Şekil 5 Ortalama ivme güç izgesi kestirimi (Konum VI) re: 1 μ W

yardımıyla deneysel olarak belirlenen doğal sıklıklar Çizelge 1'de sunulmuştur.

Çizelge 1'deki, kuramsal ve deneysel olarak elde edilen doğal sıklık değerlerinin karşılaştırılmasından anlaşılacağı gibi, her titreşim biçimi ile ilgili değerlerin farkının kuramsal değere bölünmesiyle bulunan hata yüzdeleri 2,9 ile 4,4 arasında değişmektedir.



Şekil 6 Ortalama eşevrensellik işlevi kestirimi (Konum VI) re: 1 μ W



Şekil 7 Ortalama sıklık yanıt işlevi kestirimi (Konum VI) re: 1 μ W

Buradan, doğal sıklıkların önerilen yöntem ile deneysel olarak oldukça başarılı bir şekilde belirlenebileceği sonucu ortaya çıkmaktadır. Genellikle daha küçük sıklık değerlerinin elde edildiği deneysel yöntemde, algılayıcıların (kuvvet ölçer ile ivme ölçer) kiriş üzerinde etkin olan kütleleri, konu ile ilgili teknik yazında da karşılaşılan bu eğilimi oluşturmaktadır [6]. Deneyler ile bulunan ve ilk iki sıklığa karşı gelen yapısal sönüm faktörleri çelik için verilen gerçek değerlerden biraz daha yüksektir. Bu durum sayısal im işleminden kaynaklanmaktadır [10]. Buna karşılık, diğer sıklıklardaki sönüm faktörleri çelik için verilen gerçek değerlerle hemen hemen aynıdır [11]. Ek olarak, Çizelge 1'de sunulan sönüm faktörleri, titreşim biçimi tanımlanması ile ilgili yayınlarda verilen değerlerle uyum içindedir.

Çizelge 1

Örnek kiriş için hesaplanan ve deneysel olarak bulunan doğal sıklıklar ve sönüm değerleri

Doğal Sıklık (Hz)	Kuramsal	Deneysel	Hata %	Yapısal Sönüm Faktörü η
	65	63	2,9	0,031
	179	173	3,4	0,011
	351	340	3,0	0,006
	583	558	4,4	0,004
	867	835	3,7	0,004

Şekil 6'da gösterilen ortalama eşvresellik işlevi kestirimi, kurulan modelde girdi olarak alınan kuvvet verileri ile çıktı şeklinde tanımlanan ivme verileri arasındaki neden-sonuç ilişkisini, sıklığa bağlı olarak belirlemektedir. Eşvresellik kestiriminin 1' den çok düşük değerleri

- i) modelin doğrusal (lineer) olmaması ve/veya
- ii) ilgili verilerde yüksek düzeyde ölçüm gürültüsü içermesi,

anlamını taşımaktadır [12]. Bu nedenle, doğal sıklıklarda yüksek eşvresellik kestirimi değerlerinin bulunması deneysel sonuçların sağlığı açısından zordur. Her ne kadar, uyarıcı olarak rasgele im kullanılan bir yöntemde doğal sıklıklarda eşvresellik kestirimi değerleri çok az bir düşme göstermekte ise de, bu tamamen deney im'inin özelliğinin bir sonucu olarak belirtilmekte ve sözü edilen düşme hiç bir zaman büyük boyutlarda gerçekleşmemektedir. Şekil 6 ile Şekil 7'nin karşılaştırılması, bulunan doğal sıklık değerlerinin bu açıdan güvenilirliğini kanıtlamaktadır.

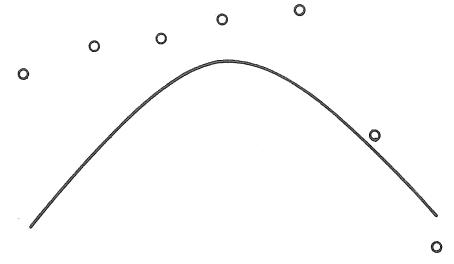
Uygulama için seçilen serbest-serbest koşullu kirişin elde edilen ilk beş titreşim biçimi, kuramsal biçimlerin üzerine nokta şeklinde konulmuş olarak, Şekil 8'de verilmiştir. Her ne kadar dönme ve öteleme hareketleri ile ilgili rijit titreşim biçimlerinin sonuçları etkileyeceği bilinmekteyse de [13], bulunan ilk üç titreşim biçiminin oldukça belirgin bir şekilde kuramsal titreşim biçimlerine uygun olduğu gözlenmektedir. Diğer iki titreşim biçiminin ise sözü edilen rijit titreşim biçimlerinden oldukça etkilenmediği ortaya çıkmaktadır. Ayrıca, yüksek titreşim biçimlerini hassas olarak tanılamak için daha fazla ölçüm konumu seçmenin gerektiği sonucu konmaktadır. Kullanılan bilgisayarın kapasitesi bu konuda bir sınırlama getirmektedir. Doğal sıklıklar dolayında, üç'ten fazla sayıda sıklıkta dinamik esneklik değerleri alarak deney yönteminin hassasiyetinin artırılmasının, en çok yüksek titreşim biçimlerini geliştirmesi beklenmektedir. Bu ise, çözüme kuşak genişliğini doğal sıklıklar dolayında düşürmek için, özel algoritmalar ile aralık açma (zum) işleminin gerçekleştirilmesi ile olanaklı olup, sınırlama yine bilgisayar kapasitesinden kaynaklanmaktadır.

SONUÇ

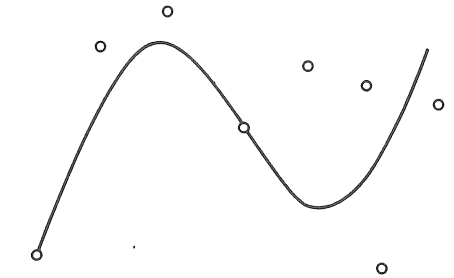
Bu çalışmada, titreşim biçim tanınması amacıyla BASIC programlama dilinde hazırlanmış bir yazılım paketi, MINC-23 modeli laboratuvar tipi sayısal bir bilgisayar kullanılarak, serbest-serbest sınır koşullarını taşıyan dikdörtgen kesitli çelik bir kirişin doğal sıklıklarını, yapısal sönüm faktörlerini ve titreşim biçimlerini çıkarmakta denenmiştir.

Eşvresellik işlevi kestirimi değerlerinin yüksek (bire yakın) olduğu ve sıklık yanıt işlevi kestirimi değerlerinin tepe konumlarına karşı gelen sıklıklar, seçilen sistemin ilgili sıklık aralığındaki (0-1000 Hz) ilk beş doğal sıklığı olarak saptanmıştır. Her doğal sıklığa ait hesaplanan yapısal sönüm faktörleri, deneysel yöntemde im işleme ile ilgili olarak içerilen hatalardan dolayı, gerçek değerlerden daha yüksek olarak elde edilmiş ve bu davranışın ilgili yazındaki bulgularla uyum içinde olduğu belirlen-

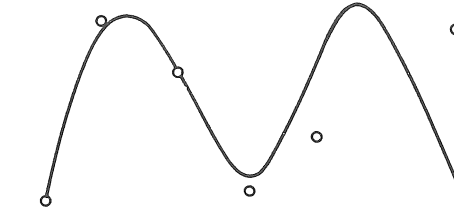
1. Titreşim Biçimi



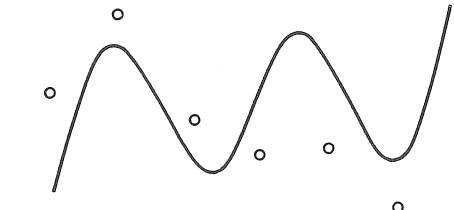
2. Titreşim Biçimi



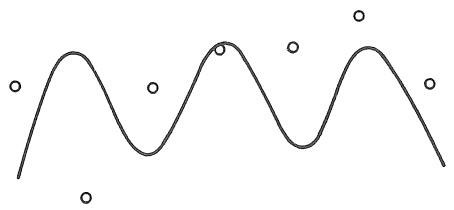
3. Titreşim Biçimi



4. Titreşim Biçimi



5. Titreşim Biçimi



Şekil 8 Örnek krişin ilk beş titreşim biçimi şekilleri. Deneysel olarak elde edilen titreşim biçimleri kuramsal olanlarla birlikte verilmiş ve noktalarla gösterilmiştir.

miştir. Bulunan titreşim biçimlerinden ilk üçünün kuramsal titreşim biçimleri ile aynı olduğu saptanmıştır. Hassas olarak tanılanamayan son iki titreşim biçiminde görülen belirsizliğin olası nedenleri üzerinde durulmuş ve hassasiyeti artırmanın yeni im işleme algoritmalarının kullanımı ile olanaklı olacağı belirtilmekle birlikte kullanılan bilgisayarın hızı ve bellek kapasitesinin bu konuda sınırlamalar getireceği ayrıca vurgulanmıştır.

MODAL ANALYSIS OF HYSTERETICALLY DAMPED TWO DIMENSIONAL MECHANICAL STRUCTURES

This study presents a software package for modal identification of mechanical systems. The program has been developed on a digital computer with laboratory modules. The input data consists of exciting force, and acceleration signals measured at various locations on the system. The natural frequencies of the system and the corresponding mode shapes along with the structural damping factor associated with each mode are determined. A steel beam with rectangular cross section and free-free boundary conditions is chosen as an experimental case study to test the program. The results are compared with the theoretical ones and the possible sources of errors have been discussed.

KAYNAKÇA

- 1 Zavari, K. ve Phil, M., **Modal Analysis of Large Structures-Multi Exciter Systems**, Teknik Rapor, Brüel & Kjaer, April 1985.
- 2 Richardson, M.H., **Measurement and Analysis of the Dynamics of Mechanical Structures**, Teknik Rapor, Hewlett-Packard Co.

- 3 Enochson L. ve Grafton B., **An Example of Digital Modal Analysis on a GenRad Signal Analysis Systems**, Teknik Rapor, GenRad Inc., June 1979.
- 4 Sisson, T., Zimmerman, R. ve Martz, J., **Determination of Modal Properties of Automotive Bodies and Frames Using Transient Testing Techniques**, Teknik Rapor, Structural Dynamics Research Corp.
- 5 Klostermann Albert L., **On the Experimental Determination and Use of Modal Representation of Dynamics Characteristics**, Doktora Tezi, University of Cincinnati, 1971.
- 6 Ewins, D.J., **Measurement and Application of Mechanical Mobility Data**, Teknik Rapor, Solartron Instrumentation Group.
- 7 Pendered, J.W. ve Bishop, R.E.O., **The Determination of Modal Shapes in Resonance Testing**, Journal of Mechanical Engineering Science, 5 (1963), 4, 379-385.
- 8 Newland, D.E., **An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis**, Longman, 1975.
- 9 Gorman, D.I., **Free Vibration Analysis of Beams and Shafts**, John Wiley & Sons, 1983.
- 10 Seybert, A.G., **Estimation of Damping From Response Spectra**, Journal of Sound and Vibration, 75 (1981) 2, 199-206.
- 11 Beards, C.F., **Structural Vibrational Analysis**, John Wiley & Sons, 1983.
- 12 Bendat, J.S. ve Piersol, A.G., **Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis**, John Wiley & Sons, 1983.
- 13 Ewins, D.J. ve Gleeson, P.T., **A Method for Modal Identification of Lightly Damped Structures**, Journal of Sound and Vibration, 84 (1982) 1, 57-79.