

Robot Kolların Zaman ve Enerji Açısından Optimal Kontrolü

M.Kemal ÖZGÖREN

Doç.Dr.,
Makina Mühendisliği Bölümü,
Orta Doğu Teknik Üniversitesi,
Ankara

Bu bildiride n serbestlik dereceli bir robot kolun belirtilen iki konum arasında optimal olarak hareket ettirilmesi problemi ele alınmıştır. Optimizasyon, harcanan zaman ve enerjiyi belli oranlarda içeren bir performans ölçüsünün minimum yapılması ile gerçekleştirilmiştir. Optimizasyon sırasında, sürücü kuvvet ve momentlerin büyüklüğe sınırlı oldukları da göz önüne alınmıştır. Optimizasyon sonucunda ortaya çıkan kontrol kuralı, sürücü kuvvet ve momentlerden her birinin üç konumlu olarak yani (-max, 0, +max) değerlerinden birini alacak biçimde uygulanmasını gerektirmektedir. Bu üç değer birinden diğerine geçişin görüleceği dönüşüm zamanları, eklem değişkenlerinin türevlerinin çözüm sonucu elde edilen özel fonksiyonlara eşit oldukları zamanlar olarak belirlenmektedir. Optimal çözümü verilen bir ilk konum yerine, parametrik olarak belirlenen bir ilk konum kümesi için elde etmek ve daha sonra verilen ilk konumu sağlayan çözümü interpolasyon yolu ile bulmak daha kolay ve uygun olmaktadır. Bildiride geliştirilen optimizasyon yöntemi örnek olarak üç uzuvlu bir robot kola uygulanmıştır.

GİRİŞ

Robot kolların sıklıkla kullanıldığı alanlardan biri de bir cismi bir konumdan diğer bir konuma iletmektir. Bu amaçla yapılacak ilk iş, eklem değişkenlerinin söz konusu cismin ilk ve son konumlarına karşılık gelen değerlerinin "ters kinematik" yöntemleri ile belirlenmesidir. Daha sonra, uygun bir "hareket planlaması" yöntemi ile, eklem değişkenlerinin ara değerleri ve bu değerleri sağlayacak sürücü kuvvet veya momentler belirlenir [1], [2].

Hareket planlaması için kullanılacak çeşitli yöntemlerden biri de seçilecek uygun bir kritere göre "optimizasyon" yapmaktır. Optimizasyon için seçilebilecek kriterler; minimum zaman, minimum enerji veya her ikisinin uygun bir kombinasyonu olabilir. Yalnızca minimum zaman ve yalnızca minimum enerji kriterlerine göre 3 uzuvlu robot kollar üzerinde yapılmış bazı çalışmalar daha önce görülmüştür [3], [4]. Bu bildiride ise, optimizasyon kriteri olarak hem zamanı hem de enerjiyi belli bir oranda içeren bir fonksiyonun minimizasyonu ele alınmış ve n uzuvlu bir robot kola uygulanmıştır.

Göz önüne alınan robot kolun "doğrudan sürümlü (direct drive)" olduğu varsayılmış ve robot kolun dinamiği Lagrange Denklemleri ile ifade edilmiştir. Optimizasyon problemi; son konumu sabit, ilk konumu ise serbest tutup daha genel bir biçimde ele alınarak "dinamik programlama" yöntemi ile çözülmüştür. Böylece, istenen bir son konuma, belli bir ilk konum yerine, bir "ilk konum kümesi"nden optimal olarak ulaşma olanağı sağlanmıştır. Ayrıca, optimizasyon sırasında sürücü kuvvet veya momentlerin büyüklüklerinin sınırlı olduğu da göz önüne alınmıştır. Buna göre bulunan optimal çözüm, sürücü kuvvet veya momentlerden her birinin üç konumlu (-max, 0, +max) kontrol biçiminde uygulanmasını gerektirmektedir. Çözümün zor kısımlarından biri, kontrolün bir konumdan diğerine dönüşeceği "dönüşüm zamanları"nın (switching times) belirlenmesidir. Bu amaçla hazırlanan bilgisayar programı, optimal hareketi ifade eden diferansiyel denklemleri son konumdan başlayarak geriye doğru integre edip hem dönüşüm zamanlarını hem de eklem değişkenlerinin optimal değişimlerini belirlemektedir.

Ancak, bu integrasyon, son konuma ait parametrelerin ve hareket süresinin seçilen değişik değerlerine göre değişik ilk konumlarla sonuçlanmakta ve böylece, daha önce de söylendiği gibi, bir ilk.konum kümesi ortaya çıkmaktadır. Bu durum, ilk konumda görülebilecek pertürbasyonlar açısından avantajlı olmaktadır. Fakat, öte yandan, verilen bir ilk konuma bu ilk konum kümesi içinde en yakın ilk konumların aranması ve gerekiyorsa interpolasyon yapılması, problemin zor kısımlarından bir diğerini oluşturmaktadır.

DİNAMİK DENKLEMLER

Uzuv sayısı n olan bir robot kola ait dinamik denklemlerin Lagrange Formülasyonu ile çıkarılışı, çeşitli kaynaklarda gösterilmiştir [2], [5]. Bu denklemler, matris/vektör gösterimiyle şöyle yazılabilir:

$$\hat{M}(\bar{q})\ddot{\bar{q}} + \bar{C}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + \bar{W}(\bar{q}) = \bar{\tau} \quad (1)$$

Burada, vektörler ($\bar{\cdot}$) ile, kare matrisler ($\hat{\cdot}$) ile, ve zamana göre alınan türevler ($\dot{\cdot}$) ile gösterilmiştir. Kullanılan sembollerin anlamları ise aşağıdadır:

- \bar{q} : Eklem değişkenleri vektörü;
 $\bar{\tau}$: Sürücü kuvvet veya momentlerden oluşan kontrol değişkenleri vektörü;
 $\bar{C}(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$: Merkezkaç, Coriolis ve viskoz sürtünme etkilerini içeren vektörel fonksiyon;
 $\bar{W}(\bar{q})$: Uzuvların ve taşınan cismin ağırlıklarının etkisini gösteren vektörel fonksiyon;
 $\hat{M}(\bar{q})$: Kütle matrisi (uzuvların kütle ve eylemsizlik momentleri ile eklem değişkenlerine bağlı matris)

Yukarıdaki ikinci mertebeden n diferansiyel denklem, aşağıdaki birinci mertebeden 2n diferansiyel denkleme dönüştürülerek de yazılabilir:

$$\dot{\bar{q}} = \bar{v} \quad (2a)$$

$$\dot{\bar{v}} = \bar{f}(\bar{q}, \bar{v}) + \hat{N}(\bar{q})\bar{\tau} \quad (2b)$$

Burada şu tanımlar kullanılmıştır:

$$\hat{N}(\bar{q}) = [\hat{M}(\bar{q})]^{-1} \quad (3)$$

$$\bar{f}(\bar{q}, \bar{v}) = -\hat{N}(\bar{q})[\bar{C}(\bar{q}, \bar{v}) + \bar{W}(\bar{q})] \quad (4)$$

(2a,b) diferansiyel denklemleri için belirtilen sınır koşulları ise şunlardır:

$$\bar{q}(0) = \bar{q}^0, \quad \bar{v}(0) = \bar{v}^0; \quad (5)$$

$$\bar{q}(T) = \bar{q}^*, \quad \bar{v}(T) = \bar{v}^* \quad (6)$$

Burada başlangıç zamanı 0, bitiş zamanı ise T olarak alınmıştır. T henüz belli değildir ve optimal olarak bulunması istenmektedir. İlk ve son konumları gösteren \bar{q}^0 ve \bar{q}^* vektörleri ile eklem motorlarının bu konumlardaki hızlarını gösteren \bar{v}^0 ile \bar{v}^* vektörleri, robot kol tarafından taşınacak olan cismin istenen ilk ve son konumlarına ve hızlarına göre **ters kinematik** yöntemleri ile belirlenirler. Bir çok durumda $\bar{v}^0 = \bar{v}^* = \bar{0}$ olursa da; bazı durumlarda, örneğin cisim bir konveyörden başka bir konveyöre taşınacaksa, $\bar{v}^0 \neq \bar{0}$, $\bar{v}^* \neq \bar{0}$ olabilir.

(1) ya da (2b) sayılı denklemlerde belirtilmesi gereken bir husus da kontrol değişkenlerinin ($\bar{\tau}$ vektörünün bileşenlerinin) aşağıda gösterilen biçimde kısıtlanmış olmalarıdır:

$$-T_i \leq \tau_i \leq T_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (7)$$

Burada T_i , i sayılı eklem motoru tarafından uygulanabilecek maksimum kuvvet veya momenti göstermektedir. Her ne kadar T_i genelde i sayılı eklem değişkeninin türevine (\dot{v}_i 'ye) bağlı olabilirse de, bu bildiride matematik modeli fazla karmaşık hale getirmemek için sabit olduğu varsayılmıştır.

OPTİMİZASYON

Kontrol vektörü $\bar{\tau}$ ile bitiş zamanı T'yi optimal olarak belirlemek üzere minimum yapılacak olan **Masraf Fonksiyoneli** aşağıda gösterilen biçimde seçilmiştir:

$$J = \int_0^T \left\{ \gamma + \sum_{i=1}^n |v_i(t)\tau_i(t)| \right\} dt \quad (8)$$

Bu ifadede, { } içindeki ilk terim masraf fonksiyoneline harcanan zamanın γ oranındaki katkısını; ikinci terim ise her bir eklemden gerek hız kazanma ve gerekse frenleme nedeni ile harcanan enerjinin toplam katkısını göstermektedir.

Bu masraf fonksiyoneli, (2a,b) sayılı diferansiyel denklemlere, (5) ve (6) sayılı sınır koşullarına ve (7) sayılı kısıtlamaya uyarak minimum yapmak için **Dinamik Programlama** [6] yöntemi kullanılmaktadır. Bunun için aşağıdaki **Minimum Masraf Fonksiyonu**, $U(\bar{q}, \bar{v}, t)$, tanımlanır:

$$U(\bar{q}(t), \bar{v}(t), t) = \text{Min} \int_t^T \left\{ \gamma + \sum_{i=1}^n |v_i(s)\tau_i(s)| \right\} ds \quad (9)$$

$$\bar{\tau}(s) \quad t \leq s \leq T$$

Bu fonksiyon, dinamik programlama yönteminin "Optimalite" ilkesine göre, aşağıdaki denklemi sağlar:

$$U(\bar{q}(t), \bar{v}(t), t) = \text{Min} [U(\bar{q}(t+dt), \bar{v}(t+dt), t+dt) + \left\{ \gamma + \sum_{i=1}^n |v_i(t)\tau_i(t)| \right\} dt] \quad (10)$$

Bu denklem, U fonksiyonunun argümanlarına göre birinci kısmı türevlerinin olduğu varsayılarak şöyle de yazılabilir:

$$\text{Min}_{\bar{\tau}} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial v_i} \dot{v}_i \right) + \frac{\partial U}{\partial \tau} + \gamma + \sum_{i=1}^n |v_i \tau_i| \right] = 0 \quad (11)$$

(Not: Yukarıda da yapıldığı gibi, bundan sonra fonksiyonların argümanları gerek duyulmadıkça gösterilmeyecektir.)

(2a,b) sayılı vektörel denklemlerin bileşenlerine göre yazılmış biçimleri kullanılırsa, (11) sayılı denklem şu şekli alır:

$$\text{Min}_{\bar{\tau}} \left[\gamma + \frac{\partial U}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^n (|v_i \tau_i| + \frac{\partial U}{\partial q_i} v_i + \frac{\partial U}{\partial v_i} f_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial v_j} N_{ij} \tau_j) \right] = 0$$

U'nun $\bar{\tau}$ 'ya bağlı olmadığı ve $\tau_i = |\tau_i| \text{sgn}(\tau_i)$ olduğu göz önüne alınırsa, yukarıdaki denklem şu şekilde yazılabilir:

$$\gamma + \frac{\partial U}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} v_i + \frac{\partial U}{\partial v_i} f_i \right) + \sum_{i=1}^n \left[\text{Min}_{\tau_i} \{ |v_i| + b_i \text{sgn}(\tau_i) \} |\tau_i| \right] = 0 \quad (12)$$

Yukarıda kullanılmış olan b_i ve "İşaret Fonksiyonu" olarak anılan $\text{sgn}(x)$ 'in tanımları şöyledir:

$$b_i = \sum_{j=1}^n N_{ji} \frac{\partial U}{\partial v_j} \quad (13)$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ ise;} \\ 0, & x = 0 \text{ ise;} \\ -1, & x < 0 \text{ ise.} \end{cases} \quad (14)$$

(12) sayılı denklemdeki minimizasyonun (7) sayılı kısıtlamaya bağlı olarak yapılmasında

$$h_i = \{ |v_i| + |b_i| \text{sgn}(b_i) \text{sgn}(\tau_i) \} |\tau_i| \quad (15)$$

tanımı yararlı olacaktır. Bu tanımla, minimizasyon problemi şu şekli alır:

$$h_i^* = \text{Min}_{\tau_i} h_i; \quad |\tau_i| \leq T_i$$

h_i fonksiyonunun v_i ve b_i 'nin değişik değerleri için τ_i 'ye göre değişimi, Şekil 1'de gösterilmiştir. Bu şekle göre, yukarıdaki minimizasyon probleminin

çözümü olarak h_i^* ve τ_i için elde edilen ifadeler şöyledir:

$$|b_i| < |v_i| \text{ ise;}$$

$$h_i^* = 0,$$

$$\tau_i = 0.$$

$$|b_i| = |v_i| \text{ ise;}$$

$$h_i^* = 0,$$

$$0 \leq \tau_i \leq T_i \quad (b_i < 0 \text{ ise}),$$

$$-T_i \leq \tau_i \leq 0 \quad (b_i > 0 \text{ ise}).$$

$$|b_i| > |v_i| \text{ ise;}$$

$$h_i^* = -T_i (|b_i| - |v_i|),$$

$$\tau_i = -T_i \text{sgn}(b_i).$$

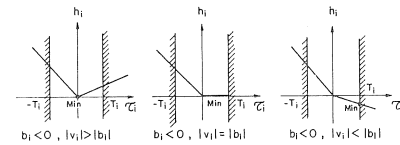
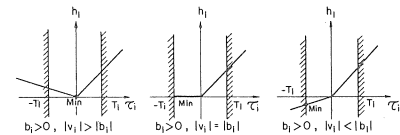
Yukarıdaki çözüm daha derleşik olarak şöyle de ifade edilebilir:

$$h_i^* = -T_i (|b_i| - |v_i|) \text{stp}(|b_i| - |v_i|). \quad (16)$$

$$\tau_i = -T_i \text{sgn}(b_i) \text{stp}(|b_i| - |v_i|). \quad (17)$$

Burada kullanılan ve "Basamak Fonksiyonu" olarak anılan $\text{stp}(x)$ 'in tanımı şöyledir:

$$\begin{aligned} x < 0 & \text{ ise, } \text{stp}(x) = 0; \\ x = 0 & \text{ ise, } 0 \leq \text{stp}(x) \leq 1; \\ x > 0 & \text{ ise, } \text{stp}(x) = 1. \end{aligned} \quad (18)$$



Şekil 1 h_i fonksiyonunun minimizasyon

Yukarıda da görüldüğü gibi, minimizasyonu sağlamak üzere τ_i , $|b_i| \neq |v_i|$ iken tek ve belli bir değer aldığı halde, $|b_i| = |v_i|$ olduğu zaman $0 < \tau_i < T_i$ biçiminde bir belirsizlik içine düşmektedir. Ancak, bu durum uygulamada bir sorun yaratmaz; çünkü b_i ve v_i birbirlerinden farklı fonksiyonlar oldukları için bir zaman süresi boyunca değil, yalnızca birbirinden ayrık belli anlarda eşit olabilirler. Bu belli anlar, "Dönüşüm Zamanları (Switching Times)" olarak adlandırılırlar ve bu anlarda $|\tau_i|$, 0'dan T_i 'ye veya T_i 'den 0'a arada herhangi bir değer almaya fırsat bulamadan sıçrayarak dönüşür.

Öte yandan b_i , (13) sayılı tanımla Minimum Masraf Fonksiyonu olan U 'ya $\partial U / \partial v_i$ kısmi türevleri aracılığı ile bağlıdır. Dolayısı ile, Dönüşüm Zamanlarının belirlenebilmesi için her şeyden önce $\partial U / \partial v_i$ türevlerinin bulunması gerekmektedir. Bu amaçla, (16) ve (17) sayılı denklemlerle ifade edilen minimizasyon sonuçları kullanılarak (12) sayılı denklem şu şekilde yazılır:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial U}{\partial q_i} v_i + \frac{\partial U}{\partial v_i} f_i - T_i (|b_i| - |v_i|) \operatorname{stp}(|b_i| - |v_i|) \right] + \gamma = 0 \quad (19)$$

Bu kısmi diferansiyel denklemi Hamilton Teorisini kullanarak çözmek üzere aşağıdaki tanımlar yapılır:

$$\lambda_i = \partial U / \partial q_i \quad (20)$$

$$\mu_i = \partial U / \partial v_i \quad (21)$$

$$H = \gamma + \sum_{i=1}^n [\lambda_i v_i + \mu_i f_i - T_i (|b_i| - |v_i|) \operatorname{stp}(|b_i| - |v_i|)] \quad (22)$$

Bu arada, (21) sayılı tanımla, b_i şu şekli alır:

$$b_i = \sum_{j=1}^n N_{ji} \mu_j \quad (23)$$

(22) sayılı denklemle tanımlanan H , "Hamilton Fonksiyonu" olarak anılır ve Hamilton Teorisine göre bu fonksiyon kullanılarak aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir:

$$\dot{q}_i = \partial H / \partial \lambda_i$$

$$\dot{v}_i = \partial H / \partial \mu_i$$

$$\dot{\lambda}_i = -\partial H / \partial q_i$$

$$\dot{\mu}_i = -\partial H / \partial v_i$$

Bu denklemlerin

$$d|x|/dx = \operatorname{sgn}(x)$$

olduğu göz önüne alınarak açık yazılmış şekilleri şöyledir:

$$\dot{q}_i = v_i, \quad (24)$$

$$\dot{v}_i = f_i - \sum_{j=1}^n N_{ij} T_j \operatorname{sgn}(b_j) \operatorname{stp}(|b_j| - |v_j|); \quad (25)$$

$$\dot{\lambda}_i = - \sum_{j=1}^n [F_{ji} \mu_j - B_{ji} T_j \operatorname{sgn}(b_j) \operatorname{stp}(|b_j| - |v_j|)], \quad (26)$$

$$\dot{\mu}_i = -\lambda_i - \sum_{j=1}^n G_{ji} \mu_j - T_i \operatorname{sgn}(v_i) \operatorname{stp}(|b_i| - |v_i|) \quad (27)$$

Burada şu tanımlar kullanılmıştır:

$$B_{ji} = \partial b_j / \partial \theta_i, \quad (28)$$

$$F_{ji} = \partial f_j / \partial \theta_i, \quad (29)$$

$$G_{ji} = \partial f_j / \partial v_i. \quad (30)$$

Yukarıdaki diferansiyel denklemlerin çözümü için gerekli olan sınır koşulları ise, $t=0$ ve $t=T$ için daha önce (5) ve (6) sayılı denklemlerle

$$q_i(0) = q_i^0, \quad v_i(0) = v_i^0; \quad (31)$$

$$q_i(T) = q_i^*, \quad v_i(T) = v_i^*; \quad (32)$$

şeklinde belirtilmişti. Ancak burada T önceden verilmiş olan bir zaman değildir ve bu nedenle, optimal kontrol teorisine göre, yukarıdaki sınır koşullarına ek olarak aşağıdaki koşulun da sağlanması gerekir:

$$H \Big|_{t=T} = 0. \quad (33)$$

(24)-(27) sayılı bağlaşıklık diferansiyel denklemlerin (31)-(33) sayılı koşulları sağlayacak biçimde çözülmesi ile T ve $[0, T]$ zaman aralığında q_i , v_i , λ_i , μ_i değişkenleri; $i=1, 2, \dots, n$ için zamanın fonksiyonları olarak bulunurlar. Böylece, (23) sayılı denklemle b_i ve $|b_i| = |v_i|$ eşitliği ile de Dönüşüm Zamanları belirlenir.

Ancak, söz konusu diferansiyel denklemleri iki değişik zamanda verilen (31) ve (32) sayılı sınır

koşullarını sağlayacak biçimde çözmek, büyük sayıda iterasyon gerektireceği için oldukça zordur. Üstelik bu şekilde elde edilecek bir çözümde esneklik de olmayacaktır. Diğer bir deyişle, ilk konumda meydana gelebilecek değişiklikler çözümü kullanılmaz hale getirecek ve bu durumda aynı zorlukla yeni bir çözüm elde edilmesi gerekecektir.

Dolayısı ile, bu tür optimal kontrol problemlerinde, çözümü kolaylaştırmak ve esnekleştirmek için genellikle kullanılan yöntem, q_i ve v_i için verilen başlangıç değerleri yerine λ_i ve μ_i için bitiş değerlerinin parametrik olarak verildiğini varsaymak ve gerçek zaman t yerine,

$$s = T - t \quad (34)$$

biçimde tanımlanan "kalan zaman" kavramını kullanarak (24)-(27) sayılı diferansiyel denklemleri son konumdan geriye doğru (yani, $s > 0$ için) aşağıda topluca gösterilen bitiş (s 'ye göre başlangıç) koşullarına göre çözmektir:

$$q_i \Big|_{s=0} = q_i^* , \quad v_i \Big|_{s=0} = v_i^* ; \quad (35)$$

$$\lambda_i \Big|_{s=0} = \lambda_i^* , \quad \mu_i \Big|_{s=0} = \mu_i^* ; \quad (36)$$

$$-H \Big|_{s=0} = 0 . \quad (37)$$

Çözüm uygun bir sayısal yöntemle şu şekilde elde edilir [5]:

$$\bar{q} = \bar{q}(\bar{q}^*, \bar{v}^*, \bar{p}, s), \quad \bar{v} = \bar{v}(\bar{q}^*, \bar{v}^*, \bar{p}, s) ; \quad (38)$$

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\bar{q}^*, \bar{v}^*, \bar{p}, s), \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}(\bar{q}^*, \bar{v}^*, \bar{p}, s) ; \quad (39)$$

Burada \bar{p} , λ_i^* ve μ_i^* parametrelerinden oluşan $(2n-1)$ boyutlu bir vektördür. Bu vektörün $(2n-1)$ boyutlu olmasının nedeni, λ_i^* ve μ_i^* parametrelerinden uygun görülen bir tanesinin (37) sayılı denklem kullanılarak diğerleri cinsinden ifade edilebilmesidir.

Yukarıdaki çözümü elde etmek üzere önce (37) sayılı denklemi sağlayan bir \bar{p} vektörü seçilir; daha sonra, s için yeterince yakın ayrıık değerler kullanılarak \bar{q} , \bar{v} , $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ vektörleri ve bunlara bağlı olarak (23) sayılı tanıma göre $\bar{b} = \bar{N}^t \bar{\mu}$ vektörü hesaplanır. Bu işlem s 'nin artan değerleri için devam ederken v_i ile b_i sürekli olarak denetlenirler ve

$$|v_i| = |b_i| \quad (40a)$$

eşitliğinin k'yinci görülüşünde bunu sağlayan s değeri, "Komplimenter Dönüşüm Zamanı"

$$s_{ki} = s_{ki}(\bar{q}^*, \bar{v}^*, \bar{p}) \quad (40b)$$

olarak saptanır.

Öte yandan, s 'nin herhangi bir değeri bitiş zamanı (T) olarak yorumlanacak olursa; s 'nin bu değerine karşılık gelen \bar{q} ile \bar{v} de başlangıç vektörleri anlamını kazanırlar. Diğer bir deyişle, (38) sayılı denklem grubu şöyle de yorumlanabilir:

$$\bar{q}^0 = \bar{q}(\bar{q}^*, \bar{v}^*, \bar{p}, T), \quad \bar{v}^0 = \bar{v}(\bar{q}^*, \bar{v}^*, \bar{p}, T) \quad (41)$$

Buna göre $2n$ başlangıç değeri (\bar{q}^0 ve \bar{v}^0 vektörlerinin bileşenleri), $2n$ parametre (T ve \bar{p} vektörünün $2n-1$ bileşeni) için seçilen değerlerce belirlenen bir Başlangıç Değerleri Kümesi içine düşerler. Seçilen bir T için $(0, T)$ zaman aralığındaki Dönüşüm Zamanları ise şu denkleme göre bulunurlar:

$$t_{ki} = T - s_{ki} \quad (42)$$

$$(i=1,2,\dots,n ; k=1,2,3,\dots)$$

T ve \bar{p} için seçilen değerlerle Başlangıç Değerleri Kümesi oluşturulduktan sonra yapılacak iş, verilen \bar{q}^0 ve \bar{v}^0 vektörlerine bu küme içindeki en yakın $2n+1$ elemanı bulup bu vektörlere karşılık gelen bitiş ve dönüşüm zamanlarını interpolasyon yolu ile belirlemektir. İnterpolasyon aşağıda açıklanan biçimde yapılabilir.

1. Verilen başlangıç vektörleri kendilerine en yakın $2n+1$ hesaplanmış vektörün lineer birleşimi biçiminde şöyle ifade edilir:

$$\begin{aligned} \bar{r}^0 &= \bar{r}(i,j) + c_0[\bar{r}(i,k) - \bar{r}(i,j)] \\ &+ \sum_{m=1}^{2n-1} c_m[\bar{r}(i_m,j) - \bar{r}(i,j)] . \end{aligned} \quad (43)$$

Burada gösterim kolaylığı için, şu tanımlar kullanılmıştır:

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \quad \bar{r}^0 = \begin{bmatrix} \bar{q}^0 \\ \bar{v}^0 \end{bmatrix}, \quad \bar{r}^* = \begin{bmatrix} \bar{q}^* \\ \bar{v}^* \end{bmatrix};$$

$$\bar{r}(i,j) = \bar{r}(\bar{r}^*, \bar{p}_i, s_j) .$$

Buna göre, Başlangıç Değerleri Kümesi, $i=1,2,\dots,n_p$ ve $j=1,2,\dots,n_s$ için hesaplanmış olan $\bar{r}(i,j)$ vektörlerinden oluşmaktadır. (43) sayılı denklemde ise $\bar{r}(i,j)$ özel olarak \bar{r}^0 vektörüne en yakın olan vektörü; $\bar{r}(i,k)$ ve $m=1,2,\dots,2n-1$ için $\bar{r}(i_m,j)$ daha az yakın olan diğer $2n$ vektörü göstermektedir.

2. (43) sayılı lineer denklem çözülerek c_0 ile $c_1, c_2, \dots, c_{2n-1}$ katsayıları bulunur.

3. Bitiş zamanı,

$$T = s_j + c_0(s_k - s_j) \quad (44)$$

biçiminde belirlenir.

4. Komplimanter Dönüşüm Zamanları, yalnızca \bar{p} vektörüne bağlı olduklarından $s_{\beta\alpha}(i) = s_{\beta\alpha}(\bar{r}^*, \bar{p}_i)$ gösterimi ile $\alpha=1,2,\dots,n$ ve $\beta=1,2,3,\dots$ için

$$s_{\beta\alpha} = s_{\beta\alpha}(i) + \sum_{m=1}^{2n-1} c_m [s_{\beta\alpha}(i_m) - s_{\beta\alpha}(i)] \quad (45)$$

biçiminde; bunlara karşılık gelen Dönüşüm Zamanları ise (44) ve (45) sayılı denklemler kullanılarak

$$t_{\beta\alpha} = T - s_{\beta\alpha} \quad (46)$$

biçiminde belirlenirler.

5. (17) sayılı denkleme göre; optimal kontrol değişkenleri, Dönüşüm Zamanlarının yanısıra b_i ve v_i değişkenlerine de ihtiyaç göstermektedir. Bu değişkenleri elde etmek üzere \bar{v} ve $\bar{\mu}$ vektörlerinin ara değerleri şu şekilde bulunur:

$$\bar{v} = \bar{v}(\bar{r}^*, \bar{p}_i, T-t) + \sum_{m=1}^{2n-1} c_m [\bar{v}(\bar{r}^*, \bar{p}_i, T-t) - \bar{v}(\bar{r}^*, \bar{p}_i, T-t)] \quad (47)$$

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}(\bar{r}^*, \bar{p}_i, T-t) + \sum_{m=1}^{2n-1} c_m [\bar{\mu}(\bar{r}^*, \bar{p}_i, T-t) - \bar{\mu}(\bar{r}^*, \bar{p}_i, T-t)] \quad (48)$$

$$\bar{b} = \hat{N}^t \bar{\mu} \quad (49)$$

Aslında; \bar{v} ile \bar{b} yukarıdaki biçimde ifade edildikten sonra, dönüşüm zamanları da (4)'deki işlemlere gerek kalmaksızın $|v_i| = |b_i|$ eşitlikleri ile bulunabilirler. Öte yandan; τ_i değişkeninin dönüşüm zamanları arasında $T_i, 0, -T_i$ değerlerinden hangisini alacağı, en yakın çözüm olan $\bar{r}(\bar{r}^*, \bar{p}_i, T-t)$ fonksiyonuna bakılarak da kestirilebilir. Bu durumda da, optimal kontrolü uygulayabilmek için (5)'deki işlemlere gerek kalmaz. Ancak, hem (4) hem de (5)'deki işlemlerin yapılması sonuçların denetimi açısından yarar sağlar.

ÖRNEK

Önceki kısımda açıklanan optimizasyon yöntemi- ni uygulamak üzere Şekil 2'de gösterilen üç uzuvlu robot kol örnek olarak ele alınmıştır.

Şekil 2'deki robot kolun uzuvlarının birbirine eşit ve yapılarının düzgün olduğu varsayılmıştır. Her bir uzvun uzunluğu $L=0.5$ m, kütlesi $m=0.5$ kg, uzunluğuna eylemsizlik momenti $J_1 = 0.0007$ kgm^2 , enine eylemsizlik momenti ise $J_2 = 0.00812$ kgm^2 'dir. Açısal eklem değişkenleri q_i yerine θ_i ile gösterilmiştir. Örneği basitleştirmek amacı ile eklem

motorlarının ağırlıksız oldukları ve üçüncü uzvun herhangi bir yük taşımadığı varsayılmıştır. Ayrıca, eklem motorlarının uygulayabilecekleri momentlerin ± 20 N.m ile kısıtlanmış oldukları kabul edilmiştir.

Optimizasyon, P noktasını (üçüncü uzvun uç noktasını) herhangi bir ilk konumdan ($x_1 = 1.0$ m, $x_2 = 0.0$ m, $x_3 = 0.5$ m) noktasına hızı sıfır olacak biçimde iletmek amacı ile yapılacaktır. Buna göre, son konumda eklem değişkenlerinin ve türevlerinin ($\omega_i = \dot{\theta}_i$) değerleri şöyle olmaktadır:

$$\theta_1^* = 0^\circ, \quad \theta_2^* = 90^\circ, \quad \theta_3^* = -90^\circ; \quad (50a)$$

$$\omega_1^* = \omega_2^* = \omega_3^* = 0 \text{ rad/s.} \quad (50b)$$

Optimizasyon için kullanılan performans ölçüsünde bitiş zamanının ağırlığı $\gamma = 10$ olarak alınmıştır.

Son konumda hız sıfır olduğundan bu örnek için (33) sayılı koşul şu şekli alır:

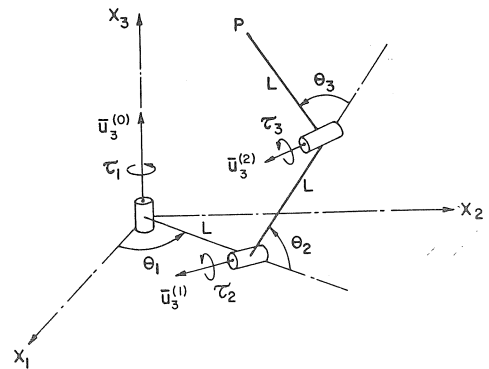
$$H \Big|_{t=T} = \gamma + \sum_{i=1}^3 (\mu_i^* f_i^* - T_i |b_i^*|) = 0.$$

b_i ile μ_i arasındaki (23) sayılı ilişki kullanılarak yukarıdaki denklem şöyle de yazılabilir:

$$\sum_{i=1}^3 T_i \left| \sum_{j=1}^3 N_{ji}^* \mu_j^* \right| = \gamma + \sum_{i=1}^3 f_i^* \mu_i^* \quad (51)$$

Bu denklemlerde $()^*$, ilgili fonksiyonun $t=T$ ya da $s = 0$ iken aldığı değeri göstermektedir. Görüldüğü gibi, (51) sayılı denklem λ_i^* parametrelerini serbest bırakırken μ_i^* parametrelerinden birini diğer ikisine bağlamaktadır. Buna göre, bağımlı parametre μ_i^* olarak seçilirse, parametre vektörü \bar{p} şu şekilde oluşur:

$$\bar{p} = [\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \lambda_3^* \quad \mu_2^* \quad \mu_3^*]^t \quad (52)$$



Şekil 2 Örnek'teki üç uzuvlu robot kol

Tipik bir sayısal örnek elde etmek üzere,

$$\bar{p} = [-10.0 \quad 0.0 \quad 5.0 \quad 2.5 \quad 2.5]^t$$

parametre vektörü seçilecek olursa; (51) sayılı denklem $\mu_1^* = 0.055$ değerini verir.

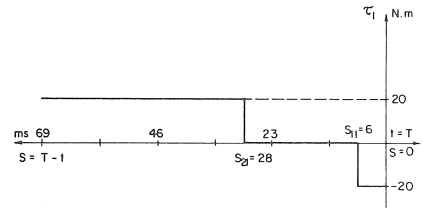
Bu parametre değerleri ile (50a,b) sayılı denklemlerle verilen bitiş değerleri kullanılarak bu robot kol için yazılan (24)-(27) sayılı dinamik denklemlerin $s > 0$ için uygun bir sayısal yöntemle [5] geriye doğru integre edilmeleri ile, Şekil 3 ve 4'te gösterilen kontrol momenti değişimleri ile Şekil 5 ve 6'da gösterilen eklemler açısı değişimleri elde edilmiştir. Bu şekillerdeki grafikler, $0 < s < 0.07$ saniye için 0.001 saniyelik zaman adımları ile IBM 370/145 üzerinde 1.45 dakika zaman harcanarak oluşturulmuşlardır. İntegrasyon için 4. mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile başlatılan Hammings'e ait 4. mertebeden Kestirme-Düzeltilme yöntemi kullanılmıştır. Şekil 3 ve 4'te kontrol momentlerine ait [0,0.07] saniyelik zaman aralığında yer alan dönüşüm zamanları da görülmektedir. Ancak, bu çözüm bir tek \bar{p} vektörü için elde edildiği için geçerli olabileceği başlangıç değerleri son derece kısıtlıdır. Yalnızca, Şekil 5 ve 6'daki eğrileri sağlayan θ_1^0 ve ω_1^0 değerleri, başlangıç değeri olabilirler. Fakat, değişik \bar{p} vektörleri için, biraz daha uzun bir integrasyon zamanı (örneğin, 1 saniye) kullanılarak elde edilecek çözümlerle başlangıç değerleri kümesini yeterince zenginleştirmek mümkündür.

OPTIMAL CONTROL OF ROBOTIC MANIPULATORS FOR MINIMUM TIME AND ENERGY

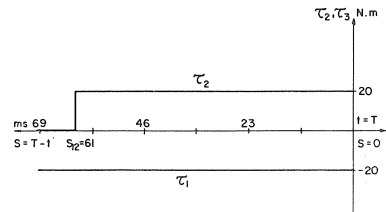
The problem considered in this paper is about driving a manipulator with n degrees of freedom in an optimal fashion between two positions. Optimization is achieved by minimizing a cost functional which penalizes both the time and the energy required to complete the motion. It is assumed that each driving force or moment is bounded in magnitude. The optimal control so obtained necessitates the application of each driving force or moment in the form of three position (-max, 0, +max) control. The switching times at which a driving force or moment shifts from one of such three values to the next are determined by equating the rates of joint variables to special functions obtained as the outcome of the solution. Using the method of dynamic programming, it has been convenient to obtain the optimal solution for a parametrically determined set of initial conditions. The solution corresponding to a specified initial condition within this set is then determined by means of linear interpolation. As an example, the optimization method developed here is applied to a three-link spatial manipulator.

KAYNAKÇA

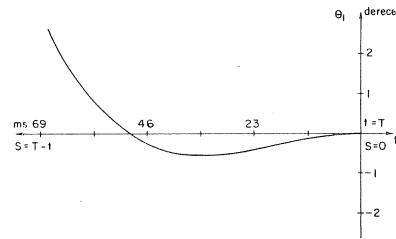
- 1 Paul, R.P.C., Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control, The MIT Press, Boston, 1982.
- 2 Brady, M. ve Diğerleri, Robot Motion: Planning and Control, The MIT Press, Boston, 1982.



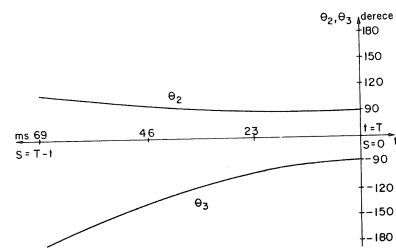
Şekil 3 τ_1 kontrol momentinin değişimi ve dönüşüm zamanları



Şekil 4 τ_2 ve τ_3 kontrol momentlerinin değişimi ve dönüşüm zamanları



Şekil 5 θ_1 açısının değişimi



Şekil 6 θ_2 ve θ_3 açılarının değişimi

- 3 Koth, B., Kahn, M.E., "The Near-Minimum-Time Control of Open-Loop Articulated Kinematic Chains", *J. Dynamic Systems, Measurements, and Control*, (1971) 93, 164-172.
- 4 Vukobratovic, M., Cvetkovic, V., "Contribution to Controlling Non-Redundant Manipulators", *J. Mechanism and Machine Theory*, (1981) 16, 81-91.
- 5 Tosunoğlu, L.S., A Study on Power-Time Optimal Control of Manipulators, Y.Lisans Tezi, Makina Müh. Böl., ODTÜ, 1981.
- 6 Bellman, R., Dreyfus, S.E., Applied Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, 1962.