O.Selçuk YAHŞİ

Doç.Dr.,
Makina Mühendisliği Bölümü,
Orta Doğu Teknik Üniversitesi,
Ankara

Ankastre Kirişte Gerilme Dağılımı

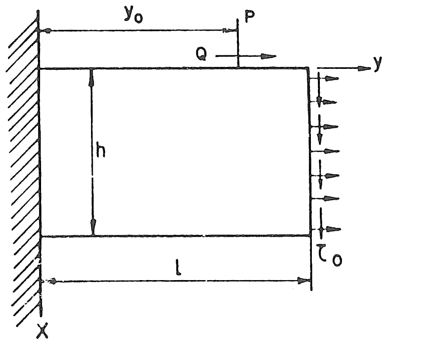
GİRİŞ

Bu çalışmada ankastre kirişlerdeki gerilme dağılımı herhangi bir yaklaşık kiriş teorisi kullanılmadan düzlem elastisite teorisi kullanılarak bulunmuştur. Formülasyonda Fourier-Integral-Transformasyonu kullanılarak problem simultane üç tekil integral denklemine indirgenmiştir. Bu denklem takımlarının incelenmesi ile ankastre kirişin sabitleştirilmiş uçlarında gerilmelerin sonsuza gittiği bu nedenle ankastre kiriş tasarımında klasik tasarım yöntemlerinin kullanılamıyacağı gösterilmiştir.

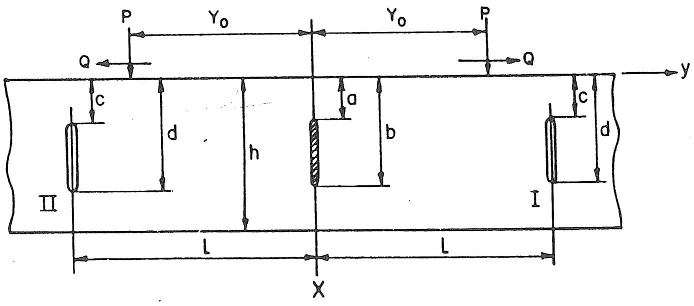
PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Çalışmada çözümü aranan problem Şekil 1'de verilmiştir. Bu problemi çözebilmek için öncelikle üzerinde simetrik iki çatlak ve ortasında esnemez saplantı bulunan sonsuz şerit elastostatik probleminin çözümü aranmıştır (Bkz. Şekil 2). Şekil 2'de gösterilen bu problemde eğer esnemez saplantı ve çatlaklar x=0 ve x=h yüzeylerine ilerletilirse veya başka bir deyişle problemde a=c=0 ve b=d=h olarak alınırsa esnemez saplantı şeritin iki yarısını birbirinden bağımsız hale getireceğinden Şekil 1'de verilen problemin elde edileceği görülmektedir.

Bu problemin çözümü, tam düzlemde simetrik iki süreksizlik problemi çözümü (iki simetrik çatlağı yaratmak için), y>0 yarı düzlemi çözümü (esnemez saplantıyı yaratmak için) ve sonsuz şerit çözümlerinin toplamı olarak elde edilebilir. Problemin formülasyonunun ayrıntıları ve ankastre kirişteki gerilme ve deplasman ifadeleri [1]'de (35) ve (36) numaralı ifadelerde verilmiştir. Bu ifadelerde bilinmeyen olarak görülen $f(t), g(t), E_1(\alpha), E_2(\alpha), A_i(\alpha) (i=1,...,4)$ fonksiyonları ise aşağıda verilen sınır şartlarından elde edilecektir.



Şekil 1 Ankastre kiriş geometrisi



Şekil 2 Üzerinde simetrik iki çatlak ve ortasında rigid saplantı bulunan sonsuz şeritin geometrisi

$$\sigma_{xx}(0,y) = P\delta(y-y_0)\,, \qquad 0 < y < \infty \qquad (1a)$$

$$\sigma_{xy}(0,y) = Q\delta(y-y_0)\,, \qquad 0 < y < \infty \qquad (1b)$$

$$\sigma_{xx}(h,y) = 0\,, \qquad 0 < y < \infty \qquad (1c)$$

$$\sigma_{xy}(h,y) = 0\,, \qquad 0 < y < \infty \qquad (1d)$$

$$v(x,0) = 0\,, \qquad 0 < x < h \qquad (2a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0\,, \qquad 0 < x < h \qquad (2b)$$

$$\sigma_{yy}(x,\ell) = p_1(x)\,, \qquad c < x < d \qquad (3a)$$

$$\sigma_{xy}(x,\ell) = p_2(x)\,, \qquad c < x < d \qquad (3b)$$

Bu ifadelerde, (1a-d) şerit sınır şartlarını, (2a-b) şeritin sabit uç koşulunu ve (3a-b) ise şeritin diğer ucundaki yükleri vermektedir.

Kirişin uç kısmındaki kayma gerilmesi dağılımı

$$\sigma_{xy}(x,0) = m(x) \qquad (4)$$

olarak tanımlanır ve (1-3) sınır şartları uygulanırsa problemin bütün bilinmeyenleri f(x), g(x) ve m(x) cinsinden ifade edilip; problem f(x), g(x) ve m(x) bilinmeyenleri cinsinden aşağıda verilen üç tekil integral denklemine indirgenebilir [1].

$$\frac{1}{2\mu\pi(\kappa+1)} \int_0^h \{[-\frac{2}{t-x} + \frac{\kappa-3}{t+x} + \frac{12x}{(t+x)} - \frac{8x^2}{(t+x)}$$

$$+ \frac{\kappa-3}{t+x-2h} + \frac{12(x-h)}{(t+x-2h)^2} - \frac{8(x-h)^2}{(t+x-2h)^3}]$$

$$+ k_{11}(x,t)\}\; m(t)dt + \int_c^d f(t)\, k_{12}(x,t)dt$$

$$+ \int_c^d g(t)\, k_{13}(x,t)dt = I(x,\varepsilon) \qquad (5)$$

$$\frac{1}{\pi(\kappa+1)} \int_0^h f(t) \left[\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} + \frac{6x}{(t+x)^2} - \frac{4x^2}{(t+x)^3}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{t+x-2h} + \frac{6(x-h)}{(t+x-2h)^2} - \frac{4(x-h)^2}{(t+x-2h)^3}\right]dt$$

$$+ \int_0^h m(t)\, k_{21}(x,t)dt + \int_0^h f(t)\, k_{22}(x,t)dt$$

$$+ \int_0^h g(t)\, k_{23}(x,t)dt = II(x,\varepsilon) \qquad (6)$$

$$0 < x < h$$

$$\frac{1}{\pi(\kappa+1)} \int_0^h f(t) \left[\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} + \frac{6x}{(t+x)^2} - \frac{4x^2}{(t+x)^3}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{t+x-2h} + \frac{6(x-h)}{(t+x-2h)^2} - \frac{4(x-h)^2}{(t+x-2h)^3}\right]dt$$

$$+ \int_0^h m(t)\, k_{31}(x,t)dt + \int_0^h f(t)\, k_{32}(x,t)dt$$

$$+ \int_0^h g(t)\, k_{33}(x,t)dt = III(x,\varepsilon) \qquad (7)$$

$$0 < x < h$$

Bu ifadelerde g(x) ve f(x) çatlağı yaratan süresizliklerin sırası ile x ve y yönündeki şiddetlerini vermektedir. κ ise malzeme sabiti olup düzlem şekil değiştirme problemi için $3-4\nu$ ve düzlem gerilme problemi için ise, $(3-\nu)/(1+\nu)$ değerine eşittir. (5-7)'de verilen $k_{ij}(x,t)(i,j=1,2,3)$, $I(x,\varepsilon)$, $II(x,\varepsilon)$ ve $III(x,\varepsilon)$ fonksiyonlarının ifadeleri [1]'de ek olarak verilmiştir.

(5-7) denklemleri [2]'de verilen sayısal yöntemlerle çözülebilirler. Bu çalışmada ise, sayısal sonuçlar yerine yine [2]'de verilen yöntemler kullanılıp asimptotik açılımları yapılarak ankastre kirişin sabit uçlarında gerilme dağılımları aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$\lim_{x\to 0} \sigma_{xy}(x,0) \simeq \Omega(0)(h-x)^{\beta} x^{\beta}\,, \qquad -1 < \beta < 0 \qquad (8a)$$

$$\lim_{x \to h} \sigma_{xy}(x,0) \cong \Omega(h)(h-x)^{\beta}x^{\beta} , \quad -1 < \beta < 0 \qquad (8b)$$

$$\lim_{x \to 0} \sigma_{yy}(x,0) = \frac{h^{\beta}x^{\beta}\Omega(0)}{(\kappa+1)\sin\pi\beta} [(1-\kappa)\cos\pi\beta$$

$$- 2\beta(2\beta+\kappa+5) - 3\kappa - 5] , \quad -1 < \beta < 0 \qquad (9a)$$

$$\lim_{x \to h} \sigma_{yy}(x,0) = \frac{h^{\beta}(h-x)^{\beta}\Omega(h)}{(\kappa+1)\sin\pi\beta} [-(1-\kappa)\cos\pi\beta$$

$$+ 2\beta(2\beta+\kappa+5) + 3\kappa + 5] , \quad -1 < \beta < 0 \qquad (9b)$$

Bu ifadelerdeki $\Omega(0)$ ve $\Omega(h)$ değerleri $x \in [0,h]$ aralığında sürekli ve sonlu olan $\Omega(x)$ fonksiyonunun iki uç noktadaki değeridir. β ise gerilmelerin tekilliğinin şiddeti vermektedir ve aşağıda verilen karakteristik denklemin kökleridir.

$$- 2\kappa \cos\pi\beta - 4\beta(\beta+2) + \kappa^2 - 3 = 0 \qquad (10)$$

Karakteristik denklemden de görüldüğü gibi tekilliğin şiddeti, β, sadece ortamın Poisson oranı, ν'nün bir fonksiyonu olup çeşitli Poisson oranları için değeri Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1 Gerilme tekilliği şiddetinin Poisson oranı ile değişimi

ν \ β	Düzlem Gerilme durumunda	Düzlem Şekil Değiştirme Durumunda
0.0	0.0	0.0
0.1	-0.1330	-0.1752
0.2	-0.2189	-0.1927
0.3	-0.2888	-0.2417
0.4	-0.3501	-0.2795
0.5	-0.4053	-0.3100

(8a,b) ve (9a,b)'de verilen gerilme ifadeleri daha basitleştirilerek şu şekilde yazılabilir:

$$\lim_{x \to 0} \sigma_{iy}(x,0) = F_i(\beta,k,\Omega)x^{\beta} , \quad i=x,y \qquad (11a)$$

$$\lim_{x \to h} \sigma_{iy}(x,0) = G_i(\beta,k,\Omega)(h-x)^{\beta} , \quad i=x,y \qquad (11b)$$

Bu ifadelerdeki F_i ve G_i $(i=x,y)$ fonksiyonları, geometrisi ve yüklemesi belirlenen her ankastre kiriş için sabit bir değer olmaktadır.

Bu durumda (11a,b) ve Çizelge 1'in birlikte incelenmesinden kayma gerilmelerinin ve normal gerilmelerin ankastre kirişin sabit uçlarında sonsuza gittiği açıkça görülmektedir. Bu da klasik tasarım yöntemlerinin ankastre kirişler için uygulanamayacağını açıkça göstermektedir. Yapı ve makina aksamı tasarımında mümkün olduğunca kaçınılan ve en zayıf bilinen ankastre kirişlerin tasarımı klasik tasarım yöntemleri yerine kırılma mekaniği yöntemleri kullanılarak yapılmalıdır.

STRESS DISTRIBUTION IN CANTILEVER BEAMS

In this paper the general plane for a semi-infinite strip held rigidly on its short end, containing a crack perpendicular to its boundaries is considered. Strip is under the effect of concentrated loads at its boundaries. By extending the crack to the surfaces, the problem is reduced to that of cantilever beam.

Integral transform technique is used to provide an exact formulation of this problem in terms of a system of three singular integral equations. Stress singularities at the beam corners are obtained from the singular integral equations.