

TEK MAKİNDE ÜRÜN SIRALAMA PROBLEMLERİNE İLİŞKİN BİR MATEMATİKSEL MODEL ÖNERİSİ

Arş. Gör. Banu BITGEN**

ÖZET

Bu çalışmanın ana içeriğini, tek makinede ürün sıralama problemi ve bu problemi çözebilmek için geliştirilmiş yeni bir matematiksel model oluşturmaktadır. Konu edilen tek makinede ürün sıralama problemi; sipariş üzerine üretim yapan işletmeler için; toplam hazırlık maliyetinin minimize edileceği, deterministik ve statik nitelikte bir problemdir. Siparişte yer alan bir grup ürün, hazırlık maliyetleri minimize edilmek üzere tek makinede nasıl sıralanmalıdır? Çalışmada, bu soruya cevap verebilmek üzere geliştirilmiş yeni bir matematiksel model sunulmaktadır.

GİRİŞ

Sıralama problemleri, geçmişte de, günümüzde de pek çok alanda araştırmacıların ilgisini çekmiş bir çalışma alanıdır (Blazewicz,1991:283). Özellikle, üretim alanında ilgi görmektedir. Bunun nedeni de, ürün sıralama kararlarının üretim maliyetlerini doğrudan etkiliyor olmasıdır (Koulomas,1993:957). Sıralama problemlerinin literatürdeki genel tanımı, işlerin n tane makinede ardışık olarak sıralanmasıdır.

Tek makinede ürün sıralama problemleri ise, sıralama problemlerinden bir tanesi ve en çok ilgi çekenidir (Graves,1982:647). Bu problemler de, n tane ürünün, tek makinede daha önceden belirlenmiş bir performansı optimize eden sıralamasının arandığı problemlerdir.

Tek makinede ürün sıralama problemi; sadece bir makinede üretilecek n tane ürünün bu tek makinede, belirli bir ölçüyü optimize etmek kaydıyla nasıl sıralanacağına belirlenmesi problemidir. n tane ürün, tek makinede bir anda sadece biri işlem görmek üzere tek tek sıralanacaktır (Baker,1983:381). Bu çalışmada da, özellikleri aşağıda belirtilecek olan, tek makinede ürün sıralama problemlerinden biri ele alınacak ve bu problemi çözecek yeni bir model geliştirilecektir.

* Bu çalışma, yazarın yüksek lisans tezinin bir bölümünden oluşmaktadır. (Banu BITGEN, **Tek Makinede Ürün Sıralama Problemi: Teori ve Atlantik Halıcılık A.Ş.'de Uygulaması**, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Kayseri,1999.)
** Erciyes Üniversitesi İ.İ.B.F. İşletme Bölümü.

I. PROBLEMİN TANIMLANMASI

Problem, sipariş üzerine üretim yapan işletmeler için tek makinede toplam hazırlık maliyetinin minimize edileceği deterministik ve statik nitelikte bir problemdir. Aşağıdaki varsayımlar altında tek makinede ürün sıralama problemlerine çözüm aranmaktadır:

1. Zaman ve kapasite kısıtlaması yoktur. Kapasite, siparişte yer alan ürünlerin hepsinin üretilmesine yeterlidir. Dolayısıyla, ürünlerden üretilmesi gereken miktarlara modelde yer verilmemiştir.

2. Ürünlerin; teslim tarihleri eşit, ya da keyfi olduğu için ürünler arasında öncelik ilişkileri söz konusu değildir.

Problem, tek makinede üretilecek n adet ürünün sıralanması problemi. İlk ve son ürünün belli olduğu bir sıralama aranmaktadır. n tane ürün için tek makinede $n!$ tane muhtemel sıralama yapılabilir. Amaç, bunlar arasından optimum olanın bulunmasıdır.

Üretime alınacak ürünlerin özelliklerine göre, üretimine başlanabilmesi için bazı hazırlıkların (makinelere ayarlanması vb.) yapılması gerekmektedir. Bu hazırlıkların da bir maliyeti söz konusudur. Bu maliyet; zaman kaybının neden olduğu maliyet, işgücü maliyeti vb. maliyetler veya bunların toplamı niteliğinde bir maliyet olabilir. Maliyetler önceden bilinmektedir. Üretici, üretime alacağı ürün zincirindeki toplam hazırlık maliyetinin en aza indirilmesini isteyecektir. Model, toplam hazırlık maliyetlerini en aza indirmek için yukarıdaki varsayımlar altında kurulmuştur.

II. MODEL

Yukarıda anlatılan probleme çözüm getirmek için, Gezgün Satıcı Modelinden hareketle toplam hazırlık maliyetlerini minimize eden yeni bir model geliştirilmiştir.

Modelin matematiksel gösterimi şöyledir:

Parametreler:

n = ürün sayısı

c_{ij} = i 'inci üründen j 'inci ürüne geçiş durumunda j 'inci ürünün hazırlık maliyeti

$i, j = 1, \dots, n \quad (i \neq j)$

a_i = i 'inci üründen başlanması durumunda i 'inci ürünün hazırlık maliyeti

$i = 1, \dots, n$

Değişkenler:

1 i 'inci üründen j 'inci ürüne geçilirse

$x_{ij} =$

0 i 'inci üründen j 'inci ürüne geçilmezse

$i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad ; \quad i \neq j$

- $x_j =$
- 1 başka bir üründen j'inci ürüne geçilirse
 - 0 başka bir üründen j'inci ürüne geçilmezse yani j'inci ürün sıralamanın ilk ürünü olursa
- $j = 1, 2, 3, \dots, n$
- $y_i =$
- 1 i'inci üründen başka bir ürüne geçilirse
 - 0 1 i'inci üründen başka bir ürüne geçilmezse yani i ürünü sıralamanın son ürünü olursa
- $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Model genel ifadesiyle şöyledir:

$$\min \sum_{i=1}^n ai(1 - x_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n cijx_{ij} \quad (i \neq j)$$

Sınırlar:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (i \neq j)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = n - 1 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ji} = x_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (i \neq j)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = n - 1 \quad (2)$$

$$\sum y_i + x_j \geq 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (i = j) \quad (3)$$

$$x_{ij}, y_i, x_j = 0, 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Amaç fonksiyonu, hazırlık maliyetlerinin toplamının minimize edilmesi esasına göre yazılmıştır.

Birinci sınırlar kümesi; ürünlerin bir tanesinden, başka ürünlere geçiş yapılmamasını garantilemektedir. Bu ürün, açık zincirin son halkası yani sıralamadaki son ürün olacaktır. İkinci sınırlar kümesi; ürünlerden bir tanesine, başka ürünlerden geçiş yapılmamasını sağlamaktadır. Bu ürün de açık zincirin ilk halkası yani sıralamadaki ilk ürün olacaktır. Üçüncü sınırlar kümesi ise her bir ürünün üretilmesini

yani ya o üründen başka bir ürüne geçiş yapılmasını ya da başka bir üründen o ürüne geçiş yapılmasını veya her ikisinin birden gerçekleştirilmesini garantilemektedir.

Bu model, ürün sıralamasını yapabilmektedir. Sıralamada, ilk ve son ürünü bulabilmektedir. Modelin 1. sınırlar kümesi; sıralamanın son ürününü, 2. sınırlar kümesi de ilk ürününü belirlemektedir. Ayrıca, x_j değişkenleriyle ilk ürünün hazırlık maliyetini de dikkate almak mümkündür.

Model, bu haliyle çözümlünce alt turlar çıkabilir. Biz bu alt turları peşinen kırıcı sınırlardan (Bakınız Lawler, 1986,17) yararlanmak yerine; bu alt turları, çıktıkça, modele yeni sınırlar ekleyerek kırma yolunu seçtik.

Alt turu oluşturan düğümlerin numara sırasına göre dizildiği kabulü altında;

$N = \{ n_1, n_2, \dots, n_n \}$ düğümler kümesi,

$N_1 = \{ n_1, n_2, \dots, n_r \}$ alt turda yer alan düğümler kümesi olsun. $N_1 \subset N$

$1 < r \leq n-2$

Alt tur kırıcı bu sınırlar, aşağıdaki şartlar altında modele eklenecektir:

$r > 2$ durumunda bir alt tur ile karşılaşırsak, modele eklenecek sınırlar:

$$x_{n_1 n_2} + x_{n_2 n_3} + \dots + x_{n_{r-1} n_r} \leq r-1$$

$$x_{n_2 n_1} + x_{n_3 n_2} + \dots + x_{n_1 n_r} \leq r-1$$

$r = 2$ durumunda bir alt turu kırmak için modele eklenecek sınır:

$$x_{n_1 n_2} + x_{n_2 n_1} \leq 1$$

III. MODELİN BİR ÖRNEK PROBLEME UYGULANMASI

Tek makinede, 5 farklı ürün sırasıyla üretilecektir. Bir üründen öbürüne geçişteki hazırlık maliyetleri aşağıdaki gibidir:

Zaman (dakika)

i/j	1	2	3	4	5
1		15	6	18	23
2	15		28	7	14
3	6	28		23	30
4	18	7	23		4
5	23	14	30	4	

Ürünlerden biri ile başlanacak, sıralamadaki son ürüne kadar tüm ürünlerin üretilmesiyle görev sona erecektir. Başlangıçtaki ürüne geri dönülmesi söz konusu

değildir. 5 üründen herhangi bir tanesi ile başlandığında, ilgili hazırlık maliyetleri şöyledir:

Ürün	İlk ürünün hazırlık maliyeti (dakika)
1	6
2	12
3	8
4	10
5	15

Toplam hazırlık maliyeti en az olan sıralamayı bulunuz.

A. MODELİN KURULMASI

Yukarıdaki problemi yansıtan özel model, genel model esas alınarak n=5 şartı altında aşağıda sunulmuştur.

$$\text{Min } 15x_{12} + 6x_{13} + 18x_{14} + 23x_{15} + 15x_{21} + 28x_{23} + 7x_{24} + 14x_{25} + 6x_{31} + 28x_{32} + 23x_{34} + 30x_{35} + 18x_{41} + 7x_{42} + 23x_{43} + 4x_{45} + 23x_{51} + 14x_{52} + 30x_{53} + 4x_{54} + 6(1-x_1) + 12(1-x_2) + 8(1-x_3) + 10(1-x_4) + 15(1-x_5)$$

Sınırlar

(I)

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = y_1$$

$$x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = y_2$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = y_3$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} = y_4$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = y_5$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 4$$

(II)

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = x_1$$

$$x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = x_2$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} = x_3$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} = x_4$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = x_5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$$

(III)

$$x_1 + y_1 \geq 1$$

$$x_2 + y_2 \geq 1$$

$$x_3 + y_3 \geq 1$$

$$x_4 + y_4 \geq 1$$

$$x_5 + y_5 \geq 1$$
$$x_{12}, x_{13}, x_{54}, x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5 = 0, 1$$

B. MODELİN ÇÖZÜMÜ

Modeli, Lindo (Linear Interactive and Discrete Optimizer), doğrusal programlama problemlerini çözmeye kullanılan bilgisayar programı ile çözüyoruz.

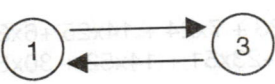
1. Çözüm:

Amaç fonksiyonunun değeri = 35

İterasyon sayısı = 30

$$x_{13} = x_{24} = x_{31} = x_{45} = 1$$

$$x_2 = y_5 = 0$$



Modelin ilk çözümünde, sonuç yukarıdaki gibi alt turlu (1 ve 3 numaralı ürünler arasında) çıkmıştır. Bu alt turu kırarak modeli çözmeye devam ediyoruz.

Bu alt turu kırmak için, modele aşağıdaki sınırı ekliyor ve modeli yeniden çözüyoruz:

$$x_{13} + x_{31} \leq 1$$

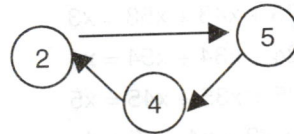
2. Çözüm

Amaç fonksiyonunun değeri = 37

İterasyon sayısı = 11

$$x_{13} = x_{25} = x_{42} = x_{54} = 1$$

$$x_1 = y_3 = 0$$



Modelin ikinci çözümünde de ilk ürünün birinci ürün, son ürünün üçüncü ürün olduğu alt turlu (2, 5 ve 4 numaralı ürünler arasında) bir sonuç elde edilmiştir. Bu alt turu kırarak modeli çözmeye devam ediyoruz.

Bu alt turu kırmak için, modele şu sınırları ekliyoruz:

$$x_{25} + x_{54} + x_{42} \leq 2$$

$$x_{52} + x_{45} + x_{24} \leq 2$$

3. Çözüm

Amaç fonksiyonunun değeri = 37

İterasyon sayısı = 24

$$x_{12} = x_{31} = x_{45} = x_{54} = 1$$

$$x_3 = y_2 = 0$$



Modelin üçüncü çözümünde de alt turlu (4 ve 5 numaralı ürünler arasında) bir sonuç çıkmıştır. Bu alt turu kırarak sınırı modele ekleyerek, modeli yeniden çözüyoruz.

Yukarıdaki alt turu kırmak için modele şu sınırı ekliyoruz:

$$x_{45} + x_{54} \leq 1$$

4. Çözüm

Amaç fonksiyonunun değeri = 40

İterasyon sayısı = 46

$$x_{12} = x_{24} = x_{31} = x_{45} = 1$$

$$x_3 = y_5 = 0$$



Modelin dördüncü çözümünde, alt tursuz en iyi sıralama bulunmuştur.

IV. ÇÖZÜM SONUÇLARININ DEĞERLENDİRİLMESİ

Modelin ilk üç çözümünde alt turlu sonuçlar çıkmıştır. Alt turlar kırılarak çözüme devam edilmiştir. Dördüncü çözümde, istenen sonuca ulaşılmış ve alt tursuz en iyi çözüm elde edilmiştir. Sıralamanın toplam maliyeti, 40 dakika olarak bulunmuştur.

Sıralamanın, ilk ürünü 3 numaralı üründür. 3 numaralı üründen 1 numaralı ürüne, 1 numaralı üründen 2 numaralı ürüne, 2 numaralı üründen 4 numaralı ürüne

ve 4 numaralı üründen de sıralamanın son ürünü olan 5 numaralı ürüne geçilen bir sıralama elde edilmiştir.

SONUÇ

Bu çalışmada, sipariş üzerine üretim yapan işletmeler için toplam hazırlık maliyetinin minimize edileceği deterministik ve statik nitelikte, tek makinede ürün sıralama problemlerine çözüm getirmek için geliştirilen matematiksel bir model sunulmuştur. Model; hazırlık maliyetlerinin toplamının minimize edilmesi esasına göre yazılmış olan amaç fonksiyonu ile ilk ve son ürünü bulan ve n tane ürünün üretilmesini garantileyen sınırlardan oluşmaktadır. Ayrıca, alt turlar çıktıkça modele alt tur kırıci sınırlar da eklenmektedir. Alt tur kırıci sınırlar dışında toplam $3n+2$ tane sınır bulunmaktadır.

Modelde, x_j, y_i ve x_{ij} değişkenleri olmak üzere toplam $n^2 + n$ tane değişken vardır. x_{ij} değişkenleriyle düğümünden düğüme geçişteki hazırlık maliyetlerinin, amaç fonksiyonunda yer alan x_j değişkenleri ile de ürün zincirinin ilk düğümünün hazırlık maliyetinin dikkate alınması sağlanmaktadır.

Model, ilk ürünün hazırlık maliyeti de dahil olmak üzere toplam hazırlık maliyetlerini minimize ederek optimum sıralamayı bulabilmektedir.

BİBLİYOGRAFYA

- BAKER, K.R. "Preemptive Scheduling of a Single Machine to Minimize Maximum Cost Subject to Release Dates and Precedence Constraints", **Operations Research**, Vol. 31, No. 2, (Mart – Nisan 1983), ss. 381.
- BLAZEWICZ, J. "Mathematical Programming Formulations for Machine Scheduling", **European Journal of Operational Research**, Vol. 51, 1991, ss. 283-300.
- GRAVES, S.C. "A Review of Production Scheduling", **Operations Research**, 1982, ss. 646-674.
- KOULAMAS, C. "Operation Sequencing and Machining Economics", **International Journal of Production Research**, Vol. 31, No. 4, 1993, ss.957-975.
- LAWLER, E.L. **The Travelling Salesman**, John Wiley, New York, 1986.