



Analysis of a Teaching Approach Aiming at Eliminating Student Difficulties with Radian

Hatice AKKOÇ* Nihal AKBAŞ GÜL**

ABSTRACT. The purpose of this study is to develop a teaching approach aiming at eliminating student difficulties with radian and to investigate students' progress in overcoming these difficulties. For this purpose, two groups were taught the radian concept with two different approaches. In the first group, mathematics curriculum was followed, while in the other group a teaching approach which was designed considering student difficulties with radian was embraced. A multiple-case study was designed by selecting three pairs of 10th grade students from two groups and the progress of students' understanding of radian was compared in a qualitative way. The findings of the study indicated that the second approach was more effective in terms of overcoming student difficulties with radian.

Key Words: Trigonometry, radian, student difficulties

SUMMARY

Purpose and Significance: Trigonometry is an important topic in school mathematics and radian is one of the fundamental concepts in trigonometry. Known as a unit of angle measure, the relationship between radian and real numbers has generally been overlooked. However, to be able to define

* Marmara University, Atatürk Faculty of Education, Department of Mathematics Education
Tel: +90 216 3459090 – 212; Fax: +90 216 338 80 60 E-mail: hakkoc@marmara.edu.tr;
haticeakkoc@yahoo.com

** Çanakkale Ali Haydar Önder School Tel: +90 505 384 79 03
E-mail: nihalakbas@gmail.com

trigonometric functions in terms of real numbers, we need to build a relationship between radian and real numbers. When we examine mathematics curriculum at secondary level in Turkey, we can see that quite a limited time is allocated for the radian concept. This results in a lack of understanding of radian. In this study, what is aimed is to develop a teaching approach to eliminate student difficulties with the radian concept. The teaching approach was developed considering three main areas of student difficulties with the radian concept which was reported in the literature and emphasizes the definition of radian as the ratio of two lengths: the length of the arc of a central angle of a circle and the radius of the circle.

Methods: To be able to investigate the effectiveness of the designed teaching approach, two groups of 10th grade students were taught with two different approaches. In the first group, mathematics curriculum were followed, while the designed teaching approach was followed in the other group. A multiple-case study was designed by selecting three pairs of 10th grade students from two groups on the basis of theoretical sampling. Using a conceptual test, students' difficulties with radian were identified before the instruction. Each student in the same pair had similar difficulties. After the teaching processes, students were interviewed using semi-structured interviews and a second conceptual test was administered. Interviews and the second conceptual test aimed to observe the progress of students in relation to eliminating the difficulties. Moreover written documents such as lesson-plans, worksheets and students' works have been analyzed. The progresses of each student in the same pair were coded and compared.

Results: The results of the study have indicated that the students in the second group have made considerable progress in overcoming three main difficulties: difficulty with seeing real numbers as radian, difficulty with defining the radian concept and seeing radian as the length of an arc, difficulty with the number π (considering π as equal to 180° instead of a number close to 3,14). On the other hand, students in the first group had experienced the difficulties mentioned above.

Discussion and Conclusions: Results of this study indicated that students in the second group could conceptualize radian concept more successfully and as a result of this, were successful in developing a relationship between real numbers, radian and trigonometric functions. It can be concluded that the progress resulted from defining the radian concept as the ratio of two lengths: the length of the arc of a central angle of a circle and the radius of the circle, and using computer software such as Cabri, Excel and Graphic Calculus to visualize the radian concept in the second group.



Radyan Kavramına İlişkin Öğrenci Güçlüklerinin Giderilmesine Yönelik Tasarlanan Bir Öğretim Yaklaşımının İncelenmesi

Hatice AKKOÇ* Nihal AKBAŞ GÜL**

ÖZ. Bu çalışmanın amacı radyan kavramına ilişkin öğrenci güçlüklerini gidermeye yönelik bir öğretim yaklaşımı tasarlamak ve uygulanan öğretim sürecinde güçlüklerin giderilmesi yönünde öğrencilerin nasıl bir gelişim gösterdiğini incelemektir. Bu amaçla iki farklı araştırma grubu belirlenmiş, bir grupta matematik öğretim programı ve ders kitabı takip edilmiş, diğer grupta ise literatürdeki radyan kavramına ilişkin öğrenci güçlükleri dikkate alınarak tasarlanan öğretim yaklaşımı benimsenmiştir. Her iki gruptan seçilen üçer 10. sınıf öğrencisinin katılımı ile bir çoklu durum çalışması tasarlanmış ve üç öğrenci ikilisinin gelişimleri karşılaştırmalı olarak ve yorumlayıcı bir paradigma çerçevesinde derinlemesine incelenmiştir. Araştırmanın bulguları, tasarlanan öğretim yaklaşımının literatürde rapor edilen öğrenci güçlüklerinin aşılması bağlamında matematik öğretim programı ve ders kitabı takip edilen gruba kıyasla daha etkili olduğunu göstermiştir.

Anahtar Sözcükler: Trigonometri, radyan, öğrenci güçlükleri

* Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Tel: +90 216 3459090 – 212; Belgegeçer: +90 216 338 80 60

E-posta: hakkoc@marmara.edu.tr; haticeakkoc@yahoo.com

** Çanakkale Ali Haydar Önder School Tel: +90 505 384 79 03

E-posta: nihalakbas@gmail.com

GİRİŞ

Trigonometri öğrencinin bilişsel birçok becerisini geliştirmesinin yanı sıra günlük hayatta da geniş bir kullanım alanına sahip matematiğin önemli bir konusudur. Özellikle astronomi ve coğrafya içinde önemli ölçüde uygulama alanı bulan trigonometri; geometri, fizik, optik, elektrik, haritacılık ve denizcilik gibi pek çok alanda da kullanılmaktadır (Sağlam ve diğerleri, 2007). Cebir ve geometri konuları arasında geçiş sağlama özelliğinin yanı sıra, limit, türev, integral gibi konularda da trigonometrik fonksiyonlar ve özellikleri kullanılmaktadır. Ortaöğretim matematik öğretim programındaki bu önemine ve kullanım alanındaki bu genişliğe karşın trigonometri öğrencilerin öğrenme güçlüğü çektiği konular arasında ilk sıralarda yer almaktadır (Durmuş, 2004). Durmuş, bu durumu trigonometrinin soyut bir konu olmasına ve öğrencilerin motivasyon eksikliğine bağlamaktadır. Bunlara ek olarak trigonometriyi oluşturan temel kavramların anlaşılmasında da öğrencilerin trigonometri konusunda öğrenme güçlüğü çekmelerinin önemli bir nedenidir (Steckroth, 2007). Açık kavramı ve açı ölçü birimleri trigonometriye temel teşkil eden önemli kavramlardandır. Radyan açı ölçü birimi özellikle trigonometrik fonksiyonların anlaşılmasında önem arz etmektedir (Akkoc, 2008). Trigonometrik fonksiyonların tanımlanmasında kullanılan radyan kavramı ile ilgili yapılan çalışmalar öğretmenlerin, öğretmen adaylarının ve öğrencilerin bu kavram ile ilgili bir takım öğrenme güçlüklerine sahip olduğunu ortaya koymuştur (Fi, 2003; Orhun, 2004; Topçu, Kertil, Akkoç, Yılmaz ve Önder, 2006; Steckroth, 2007; Akkoç, 2008). Radyan kavramı ile ilgili bu güçlükler trigonometrik fonksiyonların dolayısıyla trigonometrinin anlaşılmasını zorlaştırmaktadır (Akkoc, 2008). Bu nedenle radyan kavramına ilişkin öğrenci güçlüklerinin giderilmesine yönelik çalışmaların yapılması önem arz etmektedir.

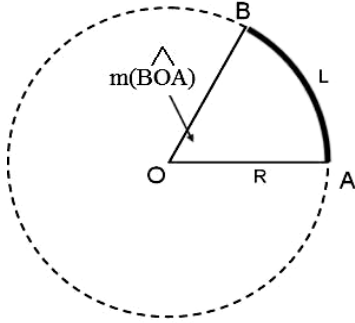
Derece açı ölçü biriminin kullanımı Babillere kadar uzandıği halde radyanın kullanımı nispeten yenidir (Maor, 1988). Thomas Muir ve/veya James Thompson 1870’de ilk defa radyan kavramını kullanan kişiler olmuştur. Ancak daha öncesinde matematikçiler uzun süre açı ölçümünde yay uzunluğunu kullanmışlardır. Örneğin, Leonhard Euler (1707–1783) açıları birim çember üzerinden kesilen yay uzunlukları ile ölçmüş ve böylece meşhur formülünü, $e^{it} = \cos t + i \sin t$, oluşturmuştur. Bu formülde t yay uzunluğu olup daha sonrasında radyan açı ölçü birimi olarak adlandırılmıştır (Akt. Joyce, 1996).

Trigonometrik fonksiyonların, dolayısıyla trigonometrinin anlaşılmasında önemli rolü olan radyan kavramı “merkez açının gördüğü yayın uzunluğunun çemberin yarıçap uzunluğuna oranıdır” şeklinde

tanımlanır (Bakınız Şekil 1). Şekil 1’de BOA açısının radyan cinsinden değeri $\frac{L}{R}$ ile hesaplanır.

Radyan kavramı iki uzunluğun oranı olduğundan dolayı radyan açı ölçü birimi bir gerçel sayı ile ifade edilir. Sarma fonksiyonu düşünüldüğünde (gerçel sayı eksenini birim çember üzerine sardığımızda) her gerçel sayıya karşılık bir radyan açı ölçüsü elde ederiz. Bu şekilde matematikçiler gerçel sayılar üzerinde trigonometrik fonksiyonları tanımlayabilmişlerdir (Akkoç, 2008). Oysa ki, birim çemberin 360 eşit parçaya bölünmesi ile elde edilen derece ölçü birimi trigonometrik fonksiyonların tanım ve değer kümesi olarak kullanılmamaktadır. Radyan kavramı ile trigonometrik fonksiyonlar arasında böyle bir ilişkinin kurulması, trigonometrik fonksiyonların anlaşılması açısından önem taşımaktadır. Bu önemine rağmen, aşağıdaki bölümde de inceleneceği üzere, radyan kavramına ilişkin çeşitli öğrenme güçlükleri söz konusudur.

Radyan kavramına ilişkin literatür



Şekil 1. Radyanın tanımı

Kang (2003) öğretmen adayları ile gerçekleştirdiği çalışmada ders kitapları ve öğretim programlarının, radyan kavramı ve trigonometrik fonksiyonların öğretmen adayları tarafından anlaşılmasını zorlaştırdığını vurgulamıştır. Araştırmaya katılan 33 öğretmen adayından sadece bir tanesi sinüs fonksiyonunu birim çemberi kullanarak doğru bir şekilde tanımlayabilmiştir. Kang (2003) öğrencilerin trigonometrik fonksiyonların tanım kümesinin elemanlarının gerçel sayılar olduğunu ve sinüs fonksiyonunun tanımını bilmediklerini ve bunun nedeninin trigonometrik fonksiyonlar tanımlanırken açının gerçel sayı olarak vurgulanmaması olduğunu belirtmiştir. Ayrıca radyanın tanımı verilmeden 1 radyanın tanımlanması, radyan ve derece arasındaki ilişkinin $\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$ formülü ile verilerek pekiştirici uygulamalar yapılması da radyanın kavramsal olarak öğrenilmesine ve gerçel sayılarla ilişkilendirilmesine engel olabilmektedir.

Öğretim programları ve ders kitaplarına ek olarak bir kavramın sınıfta nasıl sunulduğu da kavramın öğrenilmesinde etkilidir. Orhun (2004)

trigonometri konusunun sınıfta, öğretmen merkezli ve ezbere dayalı olarak öğretilmesi sonucunda öğrencilerin dik üçgende açılara ait soruları yapmada başarılı olurken, radyan kavramına ve trigonometrik fonksiyonlara ilişkin sorularda başarılarının düşük olduğunu ortaya koymuştur. Genel lise ve fen lisesi 10. sınıfa giden 77 öğrenciyle gerçekleştirdiği çalışmada katılımcıların sadece %19,5'i radyanı yay uzunluğu ile ilişkilendirmeleri gereken soruya doğru cevap vermişlerdir. Trigonometri konusunun sınıfta sunulmuş biçiminden dolayı öğrenciler trigonometriyi bir dik üçgenin açıları ve kenarları arasındaki ilişkiler olarak algılamaktadırlar. Bu nedenle dik üçgen ve açılarla ilgili sorularda başarılı olurken radyan kavramına ilişkin sorularda başarısız olmuşlardır. Bu bağlamda öğrencilerin radyan kavramına ilişkin sahip oldukları öğrenme güçlüklerinin öğretim programlarının yanı sıra öğretim yöntemlerinden de kaynaklandığı görülmektedir.

Radyan kavramına ilişkin literatür taraması öğrenme güçlüklerine sadece öğrencilerin değil öğretmen adayları ve öğretmenlerin de sahip olduğunu göstermektedir. Fi (2003) matematik öğretmen adaylarının trigonometri konusundaki alan ve pedagojik alan bilgisini değerlendirdiği çalışmada, konu alan bilgisini incelemesinde açı ölçü birimlerinden radyan kavramı üzerinde durmuştur. 5 öğretmen adayları ile yaptığı görüşmeler sonucunda öğretmen adaylarının da radyan kavramına ilişkin bir takım öğrenme güçlüklerine sahip olduğunu tespit etmiştir. Radyan ölçü birimin tanımlayamayan öğretmen adayları, derece ile yapılan işlemlerde radyanda olduğundan daha başarılı olmuşlardır. Derece ve radyan dönüşümünün

$\left(\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}\right)$ vurgulanması sonucu bu iki ölçü birimi arasında kolaylıkla

geçiş yapabilmektedirler. Problem çözümlerinde radyanı rahatlıkla kullanabilmelerine rağmen “1 radyan 180⁰'dir” algısına sahip olmaları öğretmen adaylarının radyan ölçü birimini sadece işlemsel olarak anladıklarını ancak bu konuda derin bir anlayışa sahip olmadıklarını göstermektedir. Akkoç (2008)'un çalışması ise matematik öğretmen adaylarının π sayısını x ekseninde 180 olarak işaretlediklerini ve “ $\pi=180$ ” algısına sahip olduklarını ortaya koymaktadır.

Öğretmen adaylarının yanı sıra öğretmenler de radyan kavramına ilişkin bir takım güçlükler çekmektedirler. Topçu, Kertil, Akkoç, Yılmaz ve Önder (2006) öğretmen ve öğretmen adayları ile yaptıkları çalışmalarında katılımcıların radyan kavram imajlarının derece imajları kadar zengin olmadığını tespit etmişlerdir. Seçilen dört katılımcıdan hiç biri radyanı yay uzunluğunun yarıçap uzunluğuna oranı olarak tanımlayamamıştır. Trigonometrik fonksiyonların tanım kümelerinin elemanlarının gerçel sayı

olduğunu vurgulamalarına rağmen radyanı gerçel sayı olarak görememişlerdir.

Nitekim Steckroth (2007) ve Akkoç (2008) radyan kavramına ilişkin öğrenme güçlüklerinin zayıf radyan kavram imajından kaynaklandığını ortaya koymuştur. Bu araştırmacılar, birim çember üzerinde radyanı tanımlayamama, gerçel sayılarla radyan arasında ilişki kuramama, yayın uzunluğu ile yayın ölçüsü kavramlarını karıştırma gibi öğrenme güçlüklerinin aşılmasının güçlü radyan imajları oluşturmakla mümkün olduğunu belirtmişlerdir. Akkoç (2008) öğretmen adaylarının iki farklı π imajına sahip olduklarını belirtmektedir: yaklaşık 3,14 olan ve irrasyonel bir

sayı olan π ve $\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$ formülünden yola çıkılarak 180'e eşit olarak

algılanan π . Buradan da anlaşılacağı üzere radyan kavramının sadece işlemsel olarak anlaşılması ciddi zorluklara neden olmaktadır. Steckroth (2007) bir lisede iki matematik sınıfı üzerinde gerçekleştirdiği çalışmasında Geometri Skatchpad yazılımı ve Power Point sunuları ile radyan kavramının görselleştirildiği sınıfta klasik yöntemle ders işlenen sınıftaki öğrencilere göre daha zengin kavram imajları oluştuğunu tespit etmiştir. Radyanın 5 farklı temsilinin bir arada kullanılmasının da öğrencilerin kavram imajlarını zenginleştireceğini ve radyan kavramının kavramsallaştırılmasını kolaylaştıracağını savunmuştur. Bu temsilleri sözel, cebirsel, sayısal, sabit grafik ve animasyonlu grafik temsilleri olarak sınıflandırmıştır. Steckroth (2007) kuvvetli bir radyan imajının oluşturulması için radyanın gerek sözel olarak gerekse de kutupsal koordinatlar yardımıyla yani cebirsel olarak da tanımlanması gerektiğini önermektedir. 1 radyanın $57,3^0$ olduğunun verilmesi de öğrencinin radyanla derece arasında ilişki kurmasını kolaylaştırmaktadır. Sözel olarak ifade edilen radyanın grafik temsilinin verilmesi öğrenciye radyan kavramına ilişkin farklı bir bakış açısı kazandıracaktır. Bu grafiğin animasyonlu olması ise görselliği arttırarak akılda kalmasını kolaylaştıracaktır.

Radyan kavramına ilişkin yukarıda bahsedilen çalışmaların bulguları değerlendirildiğinde öğretmenlerin, öğretmen adaylarının ve öğrencilerin radyan kavramına ilişkin sahip oldukları öğrenme güçlükleri (bu çalışma öğrenciler üzerine yoğunlaştığı için bu güçlükler "Öğrenci Güçlükleri" olarak adlandırılacaktır) aşağıdaki başlıklarda gruplandırılabilir:

- Gerçel sayıyı radyan olarak görememek (ÖG1: Öğrenci Güçlüğü 1)

▪ Radyanın tanımını kullanmamak başka bir deyişle radyanı yay uzunluğu ya da yay uzunluğunun yarıçapa oranı olarak görememek (ÖG2: Öğrenci Güçlüğü 2)

▪ π sayısını 180 olarak algılamak (π 'yi derece cinsinden 180^0 'ye denk olarak değil 180 'e eşit olarak algılamak), (ÖG3: Öğrenci Güçlüğü 3)

Çalışmanın amacı

Yukarıda sunulan literatür taraması, yeni matematik öğretim programının, radyan kavramına ilişkin öğrenci güçlüklerinin giderilmesi konusunda ne derece yeterliliğe sahip olduğu ile ilgili bir araştırma olmadığını göstermektedir. Bu çalışma kapsamında yukarıda üç başlıkta sunulan öğrenme güçlüklerini gidermeye yönelik bir öğretim yaklaşımı tasarlanmıştır. Bu makalenin amacı tasarlanan öğretim yaklaşımının, bu yaklaşım ile öğretim gören 10. sınıf öğrencilerinin, 10. sınıf ders kitapları takip edilerek öğretim gören öğrencilere kıyasla öğrenme güçlüklerini ne derece giderdiğini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki araştırma sorularına cevap aranacaktır:

- Yenilenen matematik ortaöğretim programı takip edilerek öğrenim gören 10. sınıf öğrencilerinin radyan kavramına ilişkin sahip oldukları güçlüklerin giderilmesi yönünde nasıl bir gelişim gözlenmiştir?
- Tasarlanan yeni öğretim yöntemi ile öğrenim gören 10. sınıf öğrencilerinin radyan kavramına ilişkin sahip oldukları güçlüklerin giderilmesi yönünde nasıl bir gelişim gözlenmiştir?
- Bu iki öğrenci grubu arasında radyan kavramına ilişkin öğrenme güçlükleri ne gibi farklılıklar göstermektedir?

YÖNTEM

Bu çalışma iki farklı öğrenci grubuna uygulanan iki farklı öğretim sürecinde öğrencilerin nasıl bir gelişim gösterdiklerini inceleyen nitel bir çalışmadır. Öğrencilerin radyan kavramına ilişkin öğrenme güçlüklerinin aşılması sürecinin derinden incelemesi ve verilen öğretim bağlamında kavram güçlüklerinin giderilmesine yardımcı olan unsurların belirlenmesi gerekmektedir. Bu nedenle bu araştırma yorumlayıcı paradigmayı temel almaktadır. Yöntem olarak çoklu durum çalışması benimsenmiştir. Bu amaçla, öğretim programı ve ders kitabı takip edilerek ders işlenen gruptan üç öğrenci ve tasarlanan öğretim yaklaşımı ile ders işlenen gruptan üç öğrenci seçilmiş, ve bu öğrencilerin radyan öğretimi sürecindeki gelişimleri karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Kontrol-deney grupları ile yapılan nicel bir çalışma yerine, bu şekilde bir durum çalışmasının benimsenmesinin

nedeni derinlemesine bir incelemede bulunmaktır. Zira, bu yaklaşım sadece hangi öğretim yönteminin etkili olduğunu ortaya çıkarmanın ötesinde verilen öğretimlerin hangi unsurlarının güçlükleri yenmede öğrencilere yardımcı olduğu bağlamında yorumlar yapılmasına imkan tanıyacaktır. Diğer yandan tek bir öğrenci ikilisi yerine üç öğrenci ikilisi seçilerek dış geçerliliğin artırılması hedeflenmiştir.

Katılımcılar

Araştırma 2007–2008 öğretim yılında Kırklareli’de bulunan çok programlı bir lisenin iki Türkçe-Matematik sınıfında yürütülmüştür. 10. sınıf matematik ders kitabı takip edilerek ders işlenen sınıf “A Grubu”, yeni tasarlanan öğretim yaklaşımı takip edilerek ders işlenen sınıf ise “B Grubu” olarak adlandırılmıştır. Her iki grupta da radyan ve trigonometrik fonksiyonlar konusu sekiz ders saati boyunca işlenmiştir.

İki grupta takip edilen iki farklı öğretim yaklaşımı

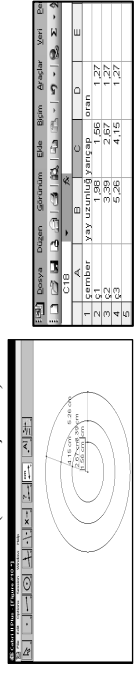
Bu alt başlıkta A ve B gruplarında işlenen radyan ve trigonometrik fonksiyonlar konularının öğretiminde benimsenen öğretim yaklaşımları ayrıntılı olarak açıklanacaktır. 14 öğrenciden oluşan A grubunda işlenen dersin içeriği öğretim programına uygun bir şekilde 10. sınıf matematik ders kitabı takip edilerek hazırlanmıştır (Sağlam ve diğerleri, 2007). 11 öğrenciden oluşan B grubunda ise radyan ve trigonometrik fonksiyonlar konusu ortaöğretim matematik programındakinden farklı bir öğretim yaklaşımı ile işlenmiştir. Yöntem olarak A grubundakine paralel olarak düz anlatım, soru-cevap ve buluş yöntemleri kullanılmıştır. Ancak kazanımlar ve içerik bağlamında daha farklı bir yaklaşım benimsenmiştir. Öğretim yaklaşımı tasarlanırken yukarıda literatür taraması sonunda özetlenen öğrenme güçlükleri (ÖG1, ÖG2 ve ÖG3) dikkate alınmış ve bu güçlükleri aşmaya yönelik bir öğretim planlanmıştır. Bu öğrenme güçlükleri ve tasarlanan ders planları ve ders notları iki matematik eğitmeniye sunulmuş ve yapılan ders planlamasını bu güçlükleri giderme kapasitesi açısından değerlendirmeleri istenmiştir. Bu uzmanların görüşüne göre ders planlamasına en son halleri verilmiştir.

Bu iki yaklaşım aşağıda ayrıntılı olarak sunulacaktır. Bunun öncesinde belirtmek gerekir ki her iki grupta da makalenin yazarlarından biri öğretmenlik yapmıştır. Aynı öğretmenin her iki grupta da dersleri işlemesi, bu gruplarda gerçekleştirilen öğretimin benzerlikler göstermesine neden olabilir. Bunu önlemek için öğretmenin ders hazırlıkları makalenin diğer yazarı olan araştırmacı ile birlikte yapılmış ve her iki grupta benimsenecek yaklaşım öğretmen ile tartışılmıştır. Böylece öğretmenin iki farklı grupta üzerinde duracağı noktalar net bir şekilde ortaya konmuştur.

İki farklı grupta benimsenen yaklaşımın daha net ortaya konması için aşağıda Tablo 1’de tasarlanan öğretim yaklaşımlarının kazanımları ve uygulanan etkinlikler hakkında açıklamalar verilmektedir. B grubunda radyan kavramına dair öğrenci güçlüklerinin giderilmesi hedeflendiğinden, ekinlik açıklamaları kısmına giderilmesi hedeflenen öğrenci güçlükleri parantez içerisinde belirtilmiştir.

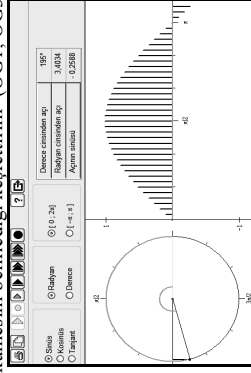
Tablo 1’de sunulan kazanımlar doğrultusunda A ve B gruplarının her ikisinde de yöntem olarak düz anlatım, soru-cevap ve buluş yöntemleri kullanılmıştır. B grubunda öğrencilerin radyan ve trigonometrik fonksiyonların öğretimi sırasında bilgisayar kullanımına yönelik karşılaşılabilecekleri zorluklar, anlatılan konuyu öğrenmelerini zorlaştırabileceğinden dolayı, öğrencilere Grafik Analiz, Cabri Geometri ve Derive yazılımları eski konuları tekrar mahiyetinde kullanılmıştır.

Tablo 1. A ve B Gruplarında Uygulanan Öğretimlerin Kazanımları ve Etkinlik Açıklamaları

A grubu		B grubu	
Kazanım: Yönlü açı ve yönlü yay kavramını açıklar.	Kazanım: Yönlü açı ve yönlü yay kavramını açıklar.	Kazanım: Yönlü açı ve yönlü yay kavramını açıklar.	Kazanım: Yönlü açı ve yönlü yay kavramını açıklar.
Not: Öğretim programında yay ölçüsü ile yay uzunluğu arasındaki farka dair bir kazanım bulunmamaktadır.	Not: Öğretim programında yay ölçüsü ile yay uzunluğu arasındaki farka dair bir kazanım bulunmamaktadır.	Etkinlik açıklaması: Bir yayın uzunluğu ile ölçüsünün aynı olmadığını göstermek için "Cabri Geometri" ve "Excel" yazılımları kullanılır.	Etkinlik açıklaması: Bir yayın uzunluğu ile ölçüsünün aynı olmadığını göstermek için "Cabri Geometri" ve "Excel" yazılımları kullanılır.
Kazanım: Birim çemberi belirtir ve denklemini yazar.	Kazanım: Birim çemberi belirtir ve denklemini yazar.	Kazanım: Birim çemberi belirtir ve denklemini yazar.	Kazanım: Birim çemberi belirtir ve denklemini yazar.
Kazanım: Radyanın tanımına dair bir kazanım bulunmamaktadır.	Kazanım: Radyanın tanımına dair bir kazanım bulunmamaktadır.	Kazanım: Radyanın tanımını yay uzunluğunun yarıçapa oranı olarak kavrar.	Kazanım: Radyanın tanımını yay uzunluğunun yarıçapa oranı olarak kavrar.
Etkinlik açıklaması: Bir çemberde 2π radyan olduğu vurgulandıktan sonra bir çemberde kaç radyan olduğu "Çemberin çevresi $2\pi r$ 'dir. Çemberi r birimlik kaç parçaya ayırınız? Bunu bulmak için bölme işlemi yapınız" şeklinde vurgularla 1 radyan anlatılmıştır. Yarım çemberde, çeyrek çemberde kaç radyan olduğu açıklanırken ders kitabına paralel bir şekilde radyanın π içeren ifadeleri kullanılır.	Etkinlik açıklaması: Bir çemberde 2π radyan olduğu vurgulandıktan sonra bir çemberde kaç radyan olduğu "Çemberin çevresi $2\pi r$ 'dir. Çemberi r birimlik kaç parçaya ayırınız? Bunu bulmak için bölme işlemi yapınız" şeklinde vurgularla 1 radyan anlatılmıştır. Yarım çemberde, çeyrek çemberde kaç radyan olduğu açıklanırken ders kitabına paralel bir şekilde radyanın π içeren ifadeleri kullanılır.	Etkinlik açıklaması: Açıkların radyan cinsinden değerleri yay uzunluğunun yarıçapa oranı olarak kağıt-kalem ve teknoloji kullanılarak öğrencilere hesaplatılır. Merkezli aynı olan çemberlerde merkez açının gördüğü yayın radyan cinsinden değerinin aynı olduğunu göstermek için "Cabri Geometri" ve "Excel" yazılımları kullanılır (Bakınız Şekil 2).	Etkinlik açıklaması: Açıkların radyan cinsinden değerleri yay uzunluğunun yarıçapa oranı olarak kavrar. Kalem ve teknoloji kullanılarak öğrencilere hesaplatılır. Merkezli aynı olan çemberlerde merkez açının gördüğü yayın radyan cinsinden değerinin aynı olduğunu göstermek için "Cabri Geometri" ve "Excel" yazılımları kullanılır (Bakınız Şekil 2).
			Şekil 2. Cabri Geometri ve Excel etkinliği Öğretim sırasında, öğrencilerden bu oranların neden eşit çıktığını yorumlamaları ve daha farklı çemberler için de deneme yapmaları ve sonuçları yorumlamaları istenmiştir. Bir çemberdeki radyan sayısının π içeren ifadesinin yanı sıra π yerine yaklaşık değeri olan $3,14$ 'ü koymak suretiyle elde edilen gerçek sayı değeri de vurgulanır, birim çemberde yaklaşık $6,28$ radyan olduğu keşfedilir (Bakınız Şekil 3) ve π gibi radyanla özdeşleştirilmiş kavramların π olarak kullanılmasına özen gösterilir. (ÖG2).
			Şekil 3. Çemberdeki radyan sayısının görsel açıklaması

Tablo 1-Devam. A ve B Gruplarında Uygulanan Öğretimlerin Kazanımları ve Etkinlik Açıklamaları

<p>Kazanım: Açık ölçü birimlerini belirtir ve birbirine çevirir.</p> <p>Etkinlik açıklaması: Açık ölçü birimlerini birbirine çevirmek için $\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$ formülü verilir ve formülü uygulatan örneklerde radyanın π içeren ifadeleri kullanılır. Yarım çemberde, çeyrek çemberde kaç radyan olduğu açıklanırken ders kitabına paralel bir şekilde radyanın π içeren ifadeleri kullanılır.</p> <p>Kazanım: Açının esas ölçüsünü açıklar.</p> <p>Kazanım: Trigonometrik fonksiyonları birim çember yardımıyla ifade eder, tanım ve görüntü kümelerini belirtir, trigonometrik özdeşlikleri gösterir.</p> <p>Etkinlik açıklaması: Dik üçgende trigonometrik oranlar hatırlatılır, daha sonra trigonometrik fonksiyonlar birim çember üzerinden tanımlanır. Fonksiyon olduğunun öğrenciye sezdirilmesi fonksiyonun her elemanını yalnız bir elemana eşlenmesi özelliği ile açıklanır. Sonrasında ise trigonometrik fonksiyonların tanım ve değer kümeleri tartışılır. Trigonometrik fonksiyonlarda yapılan örneklerde de radyanın π içeren ifadeleri kullanılır. Ders kitabından farklı olarak, bu grupta 1 radyanla beraber radyan da tanımlanır.</p>	<p>Kazanım: Açık ölçü birimlerini belirtir ve birbirine çevirir.</p> <p>Etkinlik açıklaması: Radyan ve derecenin birbirine dönüşümü öğrencilere orantı yolu ile verilir (2π radyan 360 derece ise, 1 radyan kaç derecedir?), bu sırada radyanın birim çemberde yay uzunluğuna denk geldiği sürekli vurgulanır (ÖG2; ÖG3).</p>
<p>Kazanım: Açının esas ölçüsünü açıklar.</p> <p>Kazanım: Trigonometrik fonksiyonları birim çember yardımıyla ifade eder, tanım ve görüntü kümelerini belirtir, trigonometrik özdeşlikleri gösterir.</p> <p>Etkinlik açıklaması: Temel trigonometrik fonksiyonlar Grafik Analiz yazılımı kullanılarak birim çember üzerinden tanımlanır (Bakınız Şekil 4). Trigonometrik fonksiyonların tanım ve değer kümeleri öğrencilere buldurulur. Tanım kümesi (gerçek sayılar) ile radyan açı ölçü birimi arasındaki ilişkiye dikkat çekilir. Grafik Analiz yazılımında birim çemberdeki yay uzunluğunun trigonometrik fonksiyon grafiğinde tanım kümesini belirlediği keşfettirilir (ÖG1; ÖG3).</p>	<p>Kazanım: Açının esas ölçüsünü açıklar.</p> <p>Kazanım: Trigonometrik fonksiyonları birim çember yardımıyla ifade eder, tanım ve görüntü kümelerini belirtir, trigonometrik özdeşlikleri gösterir.</p> <p>Etkinlik açıklaması: Temel trigonometrik fonksiyonlar Grafik Analiz yazılımı kullanılarak birim çember üzerinden tanımlanır (Bakınız Şekil 4). Trigonometrik fonksiyonların tanım ve değer kümeleri öğrencilere buldurulur. Tanım kümesi (gerçek sayılar) ile radyan açı ölçü birimi arasındaki ilişkiye dikkat çekilir. Grafik Analiz yazılımında birim çemberdeki yay uzunluğunun trigonometrik fonksiyon grafiğinde tanım kümesini belirlediği keşfettirilir (ÖG1; ÖG3).</p>



Şekil 4. Grafik Analiz yazılımı etkinliği

Veri Toplama Araçları

Çalışmanın verileri öğretimler öncesinde ve sonrasında uygulanan kavramsal testler, yarı-yapılandırılmış görüşmeler, ders gözlem ve belge analizi teknikleri ile toplanmıştır. Öğrencilere trigonometriye girişten önce uygulanan ve açık-uçlu sorulardan oluşan kavramsal testin amacı öğrencilerin radyan kavramı hakkındaki ön bilgileri ölçmektir. Öğretimler öncesinde ve sonrasında sorulan sorular aşağıda Tablo 2’de sunulmuştur. Tabloda, bu soruların hangi öğrenci güçlüklerini ölçmeye yönelik olduğu da belirtilmiştir.

Tablo 2. Öğrenci Seçimi için Kullanılan Kavramsal Testte Yer Alan Sorular

Öğrenci güçlükleri			Kavramsal Test 1 ve Kavramsal Test 2’de sorulan sorular
Öğrenci (ÖG1): Gerçel sayıyı radyan olarak görememek	Güçlüğü	1	1. $f : R \rightarrow R$ ve $f(x) = x \sin x$ fonksiyonu veriliyor. Aşağıda verilen noktayı hesaplayınız ve koordinat düzleminde gösteriniz. (30, $f(30)$) = ? (Burada 30, derece olarak verilmemiştir).
Öğrenci (ÖG2): Radyanın tanımasını kullanmamak başka bir deyişle radyanı yay uzunluğu ya da yay uzunluğunun yarıçapa oranı olarak görememek	Güçlüğü	2	2. Açık ölçü birimlerinden radyanın tanımını yapınız. 3. Bir çemberde yaklaşık kaç radyan vardır? Bunu nasıl hesaplıyorsunuz? 4. Birim çemberde 60 derecelik merkez açıya denk gelen yayın uzunluğu nedir?
Öğrenci (ÖG3): π sayısını 180 olarak algılamak	Güçlüğü	3	5. π hakkında bildiklerinizi yazınız. 6. $f : R \rightarrow R$ ve $f(x) = x \sin x$ fonksiyonu veriliyor. Aşağıda verilen noktayı hesaplayınız ve koordinat düzleminde gösteriniz. ($\pi/2$, $f(\pi/2)$) = ?

Öğrencilerin ÖG3’e sahip olup olmadıkları ancak verilen öğretimlerden sonra belirlenebileceği için ÖG3’ü ölçmeye yönelik olarak sorulan sorular verilen öğretimler öncesinde değerlendirilmemiştir. Ancak, öğrenciler 10. sınıfın başında trigonometri konusunda açık ölçü birimlerini ve dolayısıyla radyan kavramını gördükleri için öğrencilerin ÖG1 ve ÖG2’ye sahip olup olmadıkları belirlenmiştir. Yukarıdaki tabloda sunulan sorulara öğrencilerin vermesi gereken cevaplar ve bu cevapların hangi öğrenci güçlüğüne işaret ettiği Ek’de sunulmuştur.

Bu testin sonuçlarının analizine göre amaca yönelik örnekleme yöntemlerinden kuramsal örnekleme ile Ayşe ile Aysel, Burcu ile Banu ve Gül ile Gizem trigonometri ve radyan kavramlarının öğrenilmesi için gereken ön bilgi açısından birbirine denk olarak seçilmiştir (Bakınız Tablo 3).

Tablo 3. Kavramsal Test 1 Sonuçlarına göre A ve B Grubundan Birbirine Denk Seçilen Öğrenci Çiftleri

Güçlük	Ayşe	Aysel	Burcu	Banu	Gül	Gizem
ÖG1	√	√	√	√	√	√
ÖG2	X	X	√	√	√	√

Kuramsal örnekleme, araştırma sorularını temel alarak bir kuramı test edip açıklamaya yardım edecek özellik ve ölçüleri geliştirmeye yönelik bir örneklemin seçilmesini amaçlar (Mason, 1996). Tasarlanan öğretim yaklaşımının öğrenci güçlüklerini ne ölçüde giderebileceğini araştırmak için mevcut 10. sınıf öğrencileri arasından radyan kavramına ilişkin güçlüklerle sahip öğrenciler seçilmiştir. Yukarıdaki tabloda görüldüğü üzere Ayşe ve Aysel ÖG2'ye sahip olmadığı halde seçilmişlerdir. Bunun nedeni her iki öğrenci güçlüğüne de sahip üçüncü bir öğrenci çiftinin bulunmamasıdır. Ayrıca, yukarıdaki tabloda ÖG3'ün yer almamasının nedeni öğrencilerin trigonometrik fonksiyonlar konusunu ilk defa uygulanan öğretimler çerçevesinde görececek olmaları ve bu nedenle kavramsal test 1 ile öğrencilerin ÖG3'e sahip olup olmadıklarının, başka bir deyişle " $\pi = 180^\circ$ algısına" sahip olup olmadıklarının tespit edilmesinin mümkün olmamasıdır. Verilen öğretimlerin sonunda ise yine açık-uçlu sorulardan oluşan ikinci bir kavramsal test uygulanmıştır (Bakınız Ek). Uygulanan kavramsal test ile öğrencilerin radyan kavramına ilişkin sahip olduğu öğrenme güçlükleri ve bu güçlüklerin giderilmesindeki gelişimi ortaya koymak hedeflenmiştir. Öğrencilerin radyan kavramına ilişkin sahip oldukları güçlüklerin altında yatan nedenleri ve bu güçlüklerin giderilmesi yönündeki gelişimleri incelemek amacı ile öğrencilerle yarı-yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Görüşmelerde kavramsal testteki sorular kullanılmış, bu sorulara ek olarak öğrencinin sahip olabileceği öğrenme güçlüklerini açığa çıkarmak üzere öğrenci cevabını takiben sorular sorulmuştur. Ayrıca öğretmenin günlük planları, ders notları, hazırlanan çalışma kağıtları belge analizinde kullanılarak verinin çeşitliliğinin artırılması hedeflenmiştir.

Verilerin Analizi

Verilerin analizinin iki amacı bulunmaktadır: öğretim süreci sonucundaki mevcut öğrenme güçlüklerini ortaya koymak ve öğrencilerin gelişim süreçlerini ortaya koyup karşılaştırmak. Öğrencilerin kavramsal testlere verdikleri yazılı cevaplar literatür kısmında belirtilen “Öğrenci Güçlüğü 1” (ÖG1), “Öğrenci Güçlüğü 2” (ÖG2) ve “Öğrenci Güçlüğü 3” (ÖG3) açısından analiz edilmiştir. Öğrencilerle yapılan görüşmelerin transkriptleri de yine bu güçlükleri açığa çıkarmak amacıyla analiz edilmiştir. İç geçerliliğin artırılması için öğrenci güçlükleri bağlamındaki gelişimlerin kodlanması için iki farklı araştırmacı tarafından yapılmış ve kodlamalar karşılaştırılarak farklı kodlar üzerinde tartışılarak kodlamalara en son hali verilmiştir.

BULGULAR

Bu bölümde radyan kavramına ilişkin ön bilgiler açısından birbirine denk seçilen öğrenci ikililerinin öğretim sürecindeki gelişimleri karşılaştırmalı olarak ele alınacaktır. Öğrenci ikililerinin gelişimine yönelik bulgular ÖG1, ÖG2 ve ÖG3 bağlamında olmak üzere üç alt başlıkta incelenecektir.

Ayşe- Aysel Öğrenci İkilisinin Gösterdikleri Gelişimler Açısından Karşılaştırılması

ÖG1'in Giderilmesi Bağlamındaki Gelişimler

Öğretimler öncesinde uygulanan kavramsal test sorularına verdikleri cevapların analizi her iki öğrencinin de ÖG1'e sahip olduğunu, başka bir deyişle gerçel sayıları radyan olarak görmekte zorlandıklarını göstermiştir. Öğretimlerden sonra öğrencilerin ÖG1'in giderilmesi yönünde gösterdikleri gelişimler aşağıdaki tabloda karşılaştırmalı olarak sunulmuştur:

Tablo 4. *Ayşe ve Aysel'in ÖG1'in Giderilmesi Yönünde Gösterdiği Gelişimler*

ÖG1: Gerçel sayıları radyan olarak görememe	Ayşe	Aysel
Gerçel sayı olarak ifade edilen açı ölçülerini radyan olarak görebilme	+	+
Trigonometrik fonksiyonlardaki gerçel sayıları radyan olarak görebilme	-	+
Trigonometrik fonksiyonların tanım kümesinin elemanlarını radyan olarak görebilme	+	+

Yukarıdaki tabloda da belirtildiği üzere, uygulanan öğretimlerden sonra her iki öğrenci de açı ölçü birimlerindeki gerçel sayıların biriminin radyan olduğunu söyleyebilmektedir. Ancak Ayşe görüşmelerde trigonometrik

fonksiyonlarda kullanılan gerçel sayıların açı ölçü birimi olarak ne ifade ettiğini söyleyememiştir:

Araştırmacı: Peki sana 1'i sorsaydım bir şey diyebilir miydin? Sin1'i istiyorum.

Ayşe: ...Buradadır. 0'a 1 olduğu için sin1, 1 dir).

Araştırmacı: Buradaki 1'in birimi nedir?

Ayşe: Derecedir

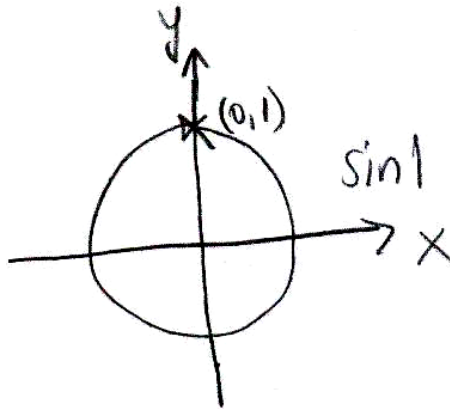
Araştırmacı: Derece mi, koymasam da üstüne işaret olur mu derece?

Ayşe:.....

Sin 1 ifadesinde 1'in değerini derece dışında ele alamayan Ayşe, sin 1 değerini yandaki şekilde de görüldüğü gibi birim çemberin üst bölümünde, çemberin y eksenini kestiği (0,1) noktasını işaret ederek açıklamaktadır. Dahası, Ayşe π 'yi radyanla özdeşleştirdiği için üzerinde derece işareti de olsa π radyan olarak kabul etmiş, $\sin 30^\circ$ 'u da derece ile özdeşleştirdiği için üzerinde derece işareti olmasa da derece olarak kabul edip işlemleri yapmıştır. Tasarlanan öğretim yöntemi ile işlenen derslerde ise trigonometrik fonksiyonlarda gerçel sayıların kullanılması ve açı ölçü birimlerini birbirine çevirirken gerçel sayıları içeren örneklerin yapılması Aysel'in gerçel sayıları radyan olarak görebilmesine neden olmuştur:

Araştırmacı: sin30'u sen orda 1/2 olarak aldın. 30 derece olarak verilmemiştir yazısını okudun mu?

Aysel: Hayır, şimdi okuyorum.



Şekil 5. Ayşe'nin sin 1 açıklaması

Araştırmacı. Okuduktan sonra bir daha düşün bakalım.

Aysel:.....

Araştırmacı: 30 derece olarak verilmemiş

Aysel: Radyan olarak verilmiştir. Gerçel sayı.

Her iki öğrenci de trigonometrik fonksiyonların tanım kümesinin elemanlarını radyan olarak görebilmektedir. Ancak Ayşe trigonometrik fonksiyonlarda gerçel

sayı kullanıldığını belirtmekle birlikte, bu gerçel sayıyı radyan cinsinden ifade etmekte zorlanmıştır.

ÖG2'nin giderilmesi bağlamındaki gelişimler

Öğretimlerden önce uygulanan kavramsal testin sonuçları her iki öğrencinin de ÖG2'ye sahip olmadıklarını göstermiştir. Yapılan öğretimlerden sonra öğrencilerde ÖG2'ye işaret eden alt becerilerde farklı gelişimler gözlenmiştir. Bu gelişimler aşağıdaki tablo ile özetlenmiştir.

Tablo 5. *Ayşe ve Aysel'in ÖG2'in Giderilmesi Yönünde Gösterdiği Gelişimler*

ÖG2: Radyanın tanımını yapamama, radyanı yay uzunluğu olarak görememe	Ayşe	Aysel
Radyanın tanımını yapma	+	+
1 radyanı tanımlarken radyanın tanımını kullanma	+	+
Birim çemberde radyanı açıklarken radyanın tanımını kullanma	-	+
Problem çözümünde radyanın tanımını kullanma	+	+
Bir çemberdeki radyan sayısını hesaplarken radyanın tanımını kullanma	+	+

1 radyanı tanımlarken ve bir çemberdeki radyan sayısını hesaplarken her iki öğrenci de araştırmacının yardımıyla radyanın tanımını kullanabilmişlerdir. Ayşe birim çemberde radyanın ne anlam ifade ettiğini açıklarken araştırmacının hatırlatmalarına rağmen radyanın tanımını kullanmamıştır. Aysel ise araştırmacının yardımıyla bu tanımları yapmış, daha sonra da tüm sorularda bu bilgiyi kullanabilmiştir. Görüşme sırasında bu bilgiye ulaşamayan Ayşe, temel trigonometrik fonksiyonların tanım kümesini radyan kavramı ile ilişkilendirmemiştir. Başka bir deyişle sinüs ve kosinüs gibi temel trigonometrik fonksiyonları birim çember üzerinde tanımlarken tanım kümelerini açıklamakta radyan kavramını kullanmamıştır. Oysa temel trigonometrik fonksiyonların tanım kümeleri gerçel sayılar olup radyan açısı ölçü biriminde ifade edilmektedir. Gerçel sayıları birim çember üzerinde gösteremediği için trigonometrik fonksiyonlarda π yerine hep derece cinsinden değerini vermiş, dolayısıyla π sayısı ile trigonometride kullanılan π 'nin farklı değerler olduğunu ifade etmiştir.

ÖG3'ün Giderilmesi Bağlamındaki Gelişimler

Her iki öğrenci de trigonometrik fonksiyonlar konusunu ilk defa uygulanan öğretimler sırasında görmüşlerdir. Bu nedenle kavramsal test 1 ile öğrencilerin ÖG3'e sahip olup olmadıkları tespit edilememiştir. Ancak yapılan öğretimlerden sonra Ayşe'de bu güçlüğü oluşturduğu gözlenirken, Aysel'in verdiği cevaplarda bu güçlüğü gözlenmemiştir.

Tablo 6. Ayşe ve Aysel'in ÖG3'ün Giderilmesi Yönünde Gösterdiği Gelişimler

ÖG3: $\pi = 180^\circ$ olarak algılama	Ayşe	Aysel
Bir çemberdeki radyan sayısının gerçel sayı değerini söyleme	-	+
Radyanın π içeren ifadelerinde π yerine yaklaşık değerini koyabilme	-	+
Trigonometrik fonksiyonlarla işlem yaparken $\pi = 180^\circ$ yerine $\pi = 3,14$ kullanma	-	+

Ayşe'nin kavramsal test ve görüşmelerdeki sorulara cevap verirken bir çemberdeki radyan sayısının gerçel sayı değerini söyleyemediği, radyanın π içeren ifadelerinde de π yerine yaklaşık değeri olan 3,14'ü koyamadığı görülmüştür. Ayşe π sayısı ile trigonometride kullanılan π 'nin farklı şeyler olduğunu düşünmektedir:

Araştırmacı: Cos π 'deki π 'nin değeri nedir?

Ayşe: 180

Araştırmacı: 180'dir. Diğer tarafta da koyamıyorsun çünkü dereceye çevirdiğinde aynı şey çıkıyor. Peki 2π bölü 3'teki π nedir acaba?

Ayşe: Bilmiyorum.

Araştırmacı: cos π 'deki π , 180'dir. Ama diğer π 'nin ne olduğunu bilmiyorsun.

Ayşe:

Araştırmacı: cos π 'de π yerine sen 180 dedin. Onun yerine 3,14 diyebilir miyiz?

Ayşe:hayır.

Diğer taraftan, bulgular B grubundaki Aysel'in $\pi = 180^\circ$ algısına sahip olmadığını göstermiştir. Örneğin, trigonometrik fonksiyonlarda π yerine yaklaşık değeri olan 3,14'ü koyarak işlem yapmıştır. Ayrıca bir çemberdeki radyan sayısının gerçel sayı değerini (yaklaşık 6,28) kolaylıkla söyleyebilmiştir.

Burcu- Banu Öğrenci İkिलisinin Gösterdikleri Gelişimler Açısından Karşılaştırılması

ÖG1'in Giderilmesi Bağlamındaki Gelişimler

Öğretimler öncesinde gerçel sayıları radyan açı ölçü birimi olarak görmekte zorlanan Burcu ve Banu'nun, yapılan öğretimlerden sonra ÖG1 ile

ifade edilen bu güçlüğü giderilmesi yönünde gösterdikleri gelişimler aşağıdaki tabloda karşılaştırmalı olarak sunulmuştur:

Tablo 7. *Burcu ve Banu'nun ÖG1'in Giderilmesi Yönünde Gösterdiği Gelişimler*

ÖG1: Gerçel sayıları radyan olarak görememe	Burcu	Banu
Gerçel sayı olarak ifade edilen açı ölçülerini radyan olarak görebilme	-	+
Trigonometrik fonksiyonlardaki gerçel sayıları radyan olarak görebilme	-	+
Trigonometrik fonksiyonların tanım kümesinin elemanlarını radyan olarak görebilme	-	-

Öğretim sırasında 1 radyan tanımlanmasına rağmen, Burcu görüşme sırasında öğretmenin sorduğu “1 radyan kaç derecedir?” sorusuna “1 radyan diye bir şey olmaz. Radyan diyebilmemiz için π olması gerekmez mi?” yanıtını vermiştir. Bu da Burcu'nun gerçel sayı olarak ifade edilen açı ölçülerini radyan olarak algılamakta güçlük çektiğini göstermektedir. Dahası, Burcu görüşme sırasında trigonometrik fonksiyonlarda kullanılan gerçel sayıların birimi ile ilgili yorum yapamamıştır:

Burcu:.....hocam bununla ilgili bir şey gelmiyor aklıma

Araştırmacı: Sin30' u hesaplayamaz mısın?

Burcu:..... Hayıryapamıyorum. Yani böyle ya yazılıda da yapamadım bunu hocam.

Araştırmacı: Burada demiş ki 30 derece verilmemiştir. Ne olarak verilmiştir o zaman?

Burcu: Reel sayı. Normal sayı olarak verilmiş.

Araştırmacı: Normal sayının sinüsünü nasıl hesaplarız?

Burcu:sin 30bilmiyorum.... derece değil

Araştırmacı: O zaman nasıl olacak ?

Burcu:.....sorun orda zaten.

Diğer yandan B grubundan seçilen Banu'nun öğretim sürecinden önce gerçel sayıları radyan olarak değerlendiremezken, tasarlanan yeni öğretim yaklaşımı sonucunda bu güçlüğü aştığı görülmüştür. Diğer yandan her iki öğrenci de trigonometrik fonksiyonların tanım kümesinin elemanlarının hangi açı ölçü birimine karşılık geldiğini ifade edememiş, ancak Banu B grubunda kullanılan Grafik Analiz yazılımı ile yapılan etkinliği hatırlayınca trigonometrik fonksiyonların tanım kümesindeki gerçel sayıların açı ölçü birimi olarak radyana karşılık geldiğini söylemiştir.

ÖG2'nin Giderilmesi Bağlamındaki Gelişimler

Kavramsal test 1'in sonuçları göre her iki öğrencinin de radyanın tanımını yapmakta ve radyanı yay uzunluğu olarak görmekte güçlük çektiğini göstermiştir. Yapılan öğretimlerden sonra bu güçlüğü giderilmesi bağlamında öğrencilerde farklı gelişimler gözlenmiştir. ÖG2 bağlamındaki bu gelişimler Tablo 8'de karşılaştırmalı olarak özetlenmiştir.

Tablo 8. *Burcu ve Banu'nun ÖG2'in Giderilmesi Yönünde Gösterdiği Gelişimler*

ÖG2: Radyanın tanımını yapamama, radyanı yay uzunluğu olarak görememe	Burcu	Banu
Radyanın tanımını yapma	+	+
1 radyanı tanımlarken radyanın tanımını kullanma	-	+
Birim çemberde radyanı açıklarken radyanın tanımını kullanma	-	+
Problem çözümünde radyanın tanımını kullanma	+	+
Bir çemberdeki radyan sayısını hesaplararken radyanın tanımını kullanma	-	-

Her iki öğrenci de uygulanan öğretimlerden önce radyanın tanımını yapamamaktadırlar. Her iki öğretim yönteminde de radyanın tanımının verilmesi ile öğrenciler radyanı tanımlayabilir duruma gelmişlerdir. Ancak önce 1 radyanın tanımını öğrenen Burcu'nun radyanın tanımını öğrenmede zorluk yaşadığı tespit edilmiştir. Örneğin, birim çemberde 1 radyanı açıklarken radyanın tanımından yola çıkmamış, 1 radyanı ezbere açıklamıştır:

Burcu: hmmm.....yarıçapı r birim kadar olan çemberde....yarıçap uzunluğundaki yayı gören yaya.....yarı çap uzunluğundaki yaya..... yayı gören yaya radyan denir.

Araştırmacı: Nasıl oldu şimdi yayı gören yaya?

Burcu: ☺☺... Yayı gören....iki ışının arasında kalan parçaya radyan denir.

Araştırmacı: Nedir o parça

Burcu: 1 radyan

Araştırmacı: 1 radyanı tanımlıyorsun. Ama ben senden 1 radyanı istemedim ki radyanı istedim.

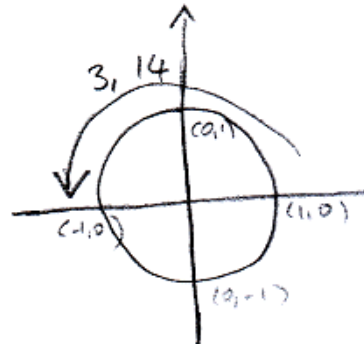
Burcu: hmmm...onu da biliyorum.....alfa açısının bir çemberde.....alfa açısının bir çemberde alfa uzunluğundaki yayın.....☺☺ karıştırdım..

Araştırmacı: Sakin ol, bir daha söyle

Burcu: ☺☺alfa açısının bir çemberdeki ...birim çemberdeki....yok.....yarıçap uzunluğundaki yayın....neyin oranınaydı....bir şeyin oranına..... radyan cinsinden değeri denir.

Burcu'nun karşılaştığı diğer bir güçlük de, gerçel sayıların trigonometrik değerlerinin aynı sayının derece cinsinden ölçüsüne eşit olarak görmesidir. Örneğin, Burcu trigonometrik değerlerde π yerine yaklaşık değeri olan 3,14 yerine 180 koyarak işleme devam etmektedir.

Öğretimlerden önce Burcu ile aynı güçlüklerle sahip olan Banu ise tasarlanan yeni öğretim yaklaşımı sonucunda radyanın sözel olarak ve grafik ile açıklanması sonucunda radyanı kolaylıkla tanımlayabilmektedir. Birim çemberde radyanın yay uzunluğuna karşılık geldiğini söylemekte zorlanmasına rağmen gerek gerçel sayıları gerekse trigonometrik fonksiyonlarda verilen değerleri birim çember üzerinde başarılı bir şekilde göstermiştir.



Şekil 6. Banu'nun π açıklaması

ÖG3'ün Giderilmesi Bağlamındaki Gelişimler

Her iki öğrenci de trigonometrik fonksiyonlar konusunu ilk defa uygulanan öğretimler çerçevesinde görmüşlerdir. Bu nedenle kavramsal test 1 ile öğrencilerin ÖG3'e sahip olup olmadıkları, başka bir deyişle " $\pi = 180^\circ$ algısına" sahip olup olmadıkları tespit edilememiştir. Yapılan öğretimlerden sonra Burcu'nun $\pi = 180^\circ$ algısına kısmen sahip olduğu görülmüştür. Bu iki öğrencinin ÖG3'e işaret eden alt becerilerdeki gelişimler aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo 9. Burcu ve Banu'nun ÖG3'ün Giderilmesi Yönünde Gösterdiği Gelişimler

ÖG3: $\pi = 180^\circ$ olarak algılama	Burcu	Banu
Bir çemberdeki radyan sayısının gerçel sayı değerini söyleme	-	+
Radyanın π içeren ifadelerinde π yerine yaklaşık değerini koyabilme	+	+
Trigonometrik fonksiyonlarla işlem yaparken $\pi = 180^\circ$ yerine $\pi = 3,14$ kullanma	-	+

Yapılan öğretimlerden sonra Burcu'nun bir çemberdeki radyan sayısının gerçel sayı değerini söylerken ya da trigonometrik fonksiyonlarda π 'nin değeri sorulduğunda önce 180° yanıtını verdiği gözlemlenmiştir. Görüşme süresince sorulan ipucu niteliğindeki sorulardan sonra π yerine yaklaşık değeri olan 3,14'ü koyabilmektedir. Trigonometrik fonksiyonlarda da π yerine yaklaşık değerinin koyulabileceğini söylemekte ancak nasıl hesaplanacağını bilmediği için π 'yi 180 olarak almaktadır. Diğer yandan Banu trigonometrik fonksiyonlarda π yerine yaklaşık değerini kolaylıkla koyabilmekte ve sonucu hesaplayabilmektedir.

Gül - Gizem İkilisinin Gösterdikleri Gelişimler Açısından Karşılaştırılması

ÖG1'in Giderilmesi Bağlamındaki Gelişimler

Uygulanan öğretimler öncesinde her iki öğrenci de gerçel sayıları radyan olarak değerlendirmede zorlanmaktadırlar, başka bir deyişle ÖG1'e sahiptirler. Yapılan öğretimlerden sonra ise öğrencilerde ÖG1'in giderilmesi yönündeki gelişimleri aşağıdaki tabloda karşılaştırmalı olarak sunulmuştur:

Tablo 10. *Gül ve Gizem'in ÖG1'in Giderilmesi Yönünde Gösterdiği Gelişimler*

ÖG1: Gerçel sayıları radyan olarak görememe	Gül	Gizem
Gerçel sayı olarak ifade edilen açı ölçülerini radyan olarak görebilme	+	+
Trigonometrik fonksiyonlardaki gerçel sayıları radyan olarak görebilme	-	+
Trigonometrik fonksiyonların tanım kümesinin elemanlarını radyan olarak görebilme	-	-

Uygulanan öğretimlerden önce her iki öğrenci de ÖG1'e sahiptir. Öğretimlerden sonra her iki öğrenci de açı ölçü birimlerini birbirine çevirirken verilen gerçel sayıların ve trigonometrik fonksiyonlarda kullanılan gerçel sayıların biriminin radyan olduğunu söyleyebilmektedir. Ancak öğretim programı takip edilerek ders işlenen A grubundan seçilen Gül, bu yorumu yaparken gerçel sayılar ile radyanı ilişkilendirmemekte ve trigonometrik fonksiyonların tanım kümesindeki elemanların radyan cinsinden ifade edildiğini söyleyememektedir:

Araştırmacı: Yani sinüs ve kosinüsün tanım kümesinin elemanları hangi açı ölçü biriminden?

Gül:derece radyan gibi mi?

Araştırmacı: Evet

Gül: Derece

Araştırmacı: Niçin derece?

Gül:reel sayılar....radyanı zaten dereceye önce çevirmemiz gerekiyor. Radyan birim çember üzerinde gösterilmiyor dereceye çevirmeden. O yüzden reel sayılar da derecedir.

Diğer yandan, uygulanan öğretimlerden önce gerçel sayıları radyan olarak değerlendiremeyen Gizem'in yeni tasarlanan öğretim yaklaşımı sonucunda bu güçlüğü yendiği görülmüştür. Açık ölçü birimlerini birbirine çevirirken gerçel sayıları radyan olarak değerlendiren Gizem, trigonometrik fonksiyonlarda sorun yaşamaktadır. 6,28 ve 9,42 gibi 3,14'ün katı olan gerçel sayıların biriminin radyan olduğunu kolaylıkla söyleyebilmesine rağmen, derece imajı baskın olduğu için 30, 60 gibi derece ile özdeşleşen gerçel sayıların birimini radyan değil derece olarak değerlendirmiştir. Bu bulgulardan yola çıkılarak B grubunda işlenen derslerde trigonometrik fonksiyonlarda derece ile özdeşleşen gerçel sayıların kullanılmasına rağmen öğrencinin derece imajının halen baskın olduğu söylenebilir.

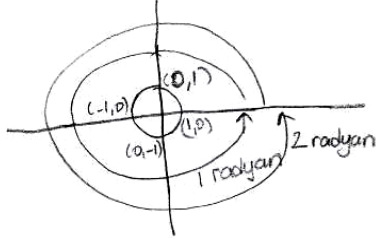
ÖG2'nin Giderilmesi Bağlamındaki Gelişimler

Öğretimlerden önce uygulanan kavramsal test 1'in sonuçlarına göre her iki öğrenci de ÖG2'ye sahiptirler. Yapılan öğretimlerden sonra öğrencilerde bu güçlüğün giderilmesi yönünde gözlenen farklı gelişimler aşağıdaki tablo ile özetlenmiştir:

Tablo 11. *Gül ve Gizem'in ÖG2'in Giderilmesi Yönünde Gösterdiği Gelişimler*

ÖG2: Radyanın tanımını yapamama, radyanı yay uzunluğu olarak görememe	Gül	Gizem
Radyanın tanımını yapma	+	+
1 radyanı tanımlarken radyanın tanımını kullanma	-	+
Birim çemberde radyanı açıklarken radyanın tanımını kullanma	-	+
Problem çözümünde radyanın tanımını kullanma	-	+
Bir çemberdeki radyan sayısını hesaplarken radyanın tanımını kullanma	-	-

Yapılan öğretimlerden sonra ÖG2'nin giderilmesi bağlamında öğrencilerde farklı gelişimler gözlenmiştir. Öğretim programı takip edilerek öğretim yapılan A grubundan seçilen Gül, bu öğretim sürecinin sonunda sadece radyanın tanımını yapabilme konusunda gelişim göstermiştir. Ancak bu tanımları 1 radyanı tanımlarken ve birim çemberde radyanı açıklarken kullanamamıştır. Bir çemberde 2π radyan olduğu cevabını vermesine rağmen, açıklama olarak açı ölçü birimlerini birbirine dönüştürürken



Şekil 7. Gül'ün radyan

açıklayamamaktadır. Bu da Gül'ün radyanın tanımını ve soru tiplerini ezberlediğini, tanımını kavramsallaştıramadığını düşündürmektedir. Gizem ise tasarlanan yeni öğretim yaklaşımı ile B grubunda yapılan öğretimden sonra radyanın tanımını yapabilmektedir. Ayrıca birim çemberde radyanı ve 1 radyanı açıklarken de araştırmacının da yardımıyla radyanın tanımını kullanabilmektedir. Ancak radyanı birim çemberde tur atma olarak görmekte ve 1 radyanın derece cinsinden değerini hesaplayıp doğru yerde göstermesine rağmen, “1 radyanda 1 tur, 3 radyanda 3 tur atarız” şeklinde yanlış bir yorumda bulunmaktadır (Bakınız Şekil 7).

ÖG3'ün Giderilmesi Bağlamındaki Gelişimler

Her iki öğrenci de trigonometrik fonksiyonlar konusunu ilk defa görmüşlerdir. Bu nedenle kavramsal test 1 ile öğrencilerin ÖG3'e sahip olup olmadıkları tespit edilmemiştir. Ancak yapılan öğretimlerden sonra Gül'de bu güçlüğün olduğu gözlenirken, Gizem'de gözlenmemiştir. Yapılan öğretimlerden sonra öğrencilerde bu güçlüğün giderilmesi yönünde gözlenen farklı gelişimler aşağıdaki tablo ile özetlenmiştir.

Tablo 11. Gül ve Gizem'in ÖG3'ün Giderilmesi Yönünde Gösterdiği Gelişimler

ÖG3: $\pi=180^\circ$ olarak algılama	Gül	Gizem
Bir çemberdeki radyan sayısının gerçel sayı değerini söyleme	+	+
Radyanın π içeren ifadelerinde π yerine yaklaşık değerini koyabilme	-	+
Trigonometrik fonksiyonlarla işlem yaparken $\pi=180^\circ$ yerine $\pi=3,14$ kullanma	-	+

A grubunda matematik öğretim programı takip edilerek işlenen derslerden sonra Gül bir çemberdeki radyan sayısının gerçel sayı değerini söylerken π yerine yaklaşık değerini verebilmektedir. Ancak trigonometrik fonksiyonlarla veya birim çember ile işlem yapılacaksa π 'nin 180 olarak alınacağını vurgulamaktadır. Ayrıca, trigonometrik fonksiyonlarda gerçel sayı ile karşılaştığında herhangi bir işlem yapamamaktadır. Bu nedenle

kullanılan $\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$ formülünden

yararlanmaya çalışmıştır. Bir çemberde kaç radyan olduğunu ezbere söylemiş ancak açıklamasını yapamamıştır. Radyanın tanımını sınıfta çözülen problemlerin benzerlerine uygulayabilmekte, ancak çözümünün radyanın tanımından geldiğini

trigonometrik fonksiyonlarda daha aşına olduğu bir ifadeyi kullanarak $\pi = 180^\circ$ olarak almaktadır. Bir çemberdeki radyan sayısının gerçel sayı değerini π yerine yaklaşık değeri olan 3,14'ü koyarak doğru bulmasına rağmen, bir bölgede yaklaşık 6,28 radyan yerine 5 radyan olduğunu söylemektedir.

Tasarlanan yeni öğretim yöntemi ile B grubunda yapılan öğretimden önce Gizem açı ölçü birimlerini birbirine çevirirken π 'yi bilinmeyen olarak düşünüp, işlemin herhangi bir basamağında yok etmektedir. Derste yapılan örneklerden sonra ise Gizem π yerine yaklaşık değeri olan 3,14 değerini vermeye başlamıştır. Trigonometrik fonksiyonlarda π yerine 3,14 koyduğunda birim çember üzerinde geldiği noktanın tam olarak koordinatları bilmemesi öğrenciyi π 'yi 180° olarak düşünmeye yöneltmektedir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Araştırmanın bulguları, B grubunda izlenen öğretim yaklaşımının literatürde rapor edilen öğrenci güçlüklerinin aşılması bağlamında matematik öğretim programı ve ders kitabı takip edilen A grubuna kıyasla daha etkin olduğunu göstermiştir. Bu bölümde çalışmada elde edilen bu bulgular ortaya konan araştırma soruları çerçevesinde ayrıntılı olarak tartışılacaktır. Bu bağlamda öncelikle tasarlanan öğretim yönteminin literatürde rapor edilen öğrenci güçlüklerini gidermede ne derece başarılı olduğu ve bu yöntemle öğrenim gören öğrencilerde radyan kavramına ilişkin hangi öğrenci güçlüklerinin oluştuğu, bu güçlüklerin giderilmesinde nasıl gelişimler gözlemlendiği ortaya konacaktır. Ardından matematik öğretim programı takip edilerek ders işlenen sınıftaki öğrencilerin radyan kavramına ilişkin sahip oldukları güçlükler ve bu güçlüklerin giderilmesine yönelik elde edilen gelişimler sunulacaktır. Her iki grup için yapılacak bu tartışmalar, takip edilen öğretim yaklaşımlarının farklı gelişimlere sebep olan unsurların ortaya koyulması ile şekillendirilecektir.

Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, tasarlanan öğretim yaklaşımının literatürde rapor edilen öğrenci güçlüklerini gidermede yeni ortaöğretim matematik öğretim programının takip edildiği öğretim yaklaşımına göre daha etkili olduğu görülmektedir. Literatürde rapor edildiği üzere öğrenciler radyanın tanımını yapmakta ve radyanı yay uzunluğu olarak görmekte güçlük çekmektedirler (ÖG1). Bu güçlüğü giderilmesi için B grubunda açı ölçü birimlerine başlarken dereceye hiç değinilmeden radyanın tanımı verilmiştir. Radyanın tanımı verilmeden önce konuya çemberde bir yayın ölçüsünün ve uzunluğunun farklı kavramlar olduğu vurgulanarak giriş yapılmıştır. Cabri Geometri ve Excel yardımıyla, alınan bir yayın ölçüsünün

ve uzunluğunun farklı kavramlar olduğu öğrencilere buldurulmuştur. Ardından radyan kavramı sözel olarak tanımlanmış ve grafik üzerinde gösterilmiştir. Bir çemberde ve birim çemberde 1 radyan, radyanın tanımı kullanılarak açıklanmıştır. Bir çemberin yarıçap uzunluğunda parçalara bölündüğünü gösteren bir grafik verilmiş, ardından örnekler yapılmıştır. Böylece bu gruptaki öğrencilerin radyanın tanımını öğrenmenin yanı sıra daha önceden öğrendikleri 1 radyanın nerden geldiğini de görme imkânları olmuştur. Başka bir deyişle, öğrencilerin radyanın tanımını yapmakta ve radyanı yay uzunluğu olarak görmekteki güçlüklerinin giderilmesi yönünde gelişmeler gözlenmiştir.

Literatürde rapor edilen diğer bir öğrenci güçlüğü ise gerçel sayıları radyan olarak görememekle ilgilidir (ÖG2). Bu güçlüğün giderilmesi için önce öğrencilere bağımlı, bağımsız değişken kavramları ve fonksiyonun bir değişim olduğu hatırlatılmıştır. Dik üçgende trigonometrik oranlara hiç değinilmemiştir. Doğrudan birim çember tanımları verilmiş, tanımlar verilirken de Grafik Analiz yazılımı kullanılmıştır. Fonksiyonların tanım ve değer kümeleri bu yazılım ile öğrencilere buldurulmuştur. Açının ölçüsü, yayın uzunluğu ve tanım kümesi arasındaki ilişki vurgulanmıştır. Bu yazılım sözel tanımları, renkli ve hareketli olarak desteklediği için daha akılda kalıcı olmuştur.

Trigonometrik fonksiyonlar konusunun Grafik Analiz ile anlatılması trigonometrik fonksiyonların tanım kümesindeki elemanların niçin radyan cinsinden ifade edildiğinin anlaşılmasına yardımcı olmaktadır. Ayrıca trigonometrik fonksiyonlarda gerçel sayıları içeren örneklerin de yapılması, bu örneklerin açı ölçü birimi olarak dereceyi içeren örneklerle karşılaştırmalı olarak sunulması ($\sin 30$ ve $\sin 30^\circ$ gibi) bu güçlüğün giderilmesinde etkili olmuştur. Tasarlanan yeni öğretim yaklaşımında trigonometrik fonksiyonlarda gerçel sayıların kullanılmasına özellikle dikkat edilmiştir. Aynı sayıların hem radyan hem de derece olduğu durumlar aynı anda verilerek öğrencilerin karşılaştırma yapmalarına olanak sunulmuştur. Yay uzunluğu ile radyan arasındaki ilişki vurgulandığı için öğrenciler gerçel sayıların birim çember üzerinde ne kadarlık bir yaya karşılık geldiğini de hesaplayabilmektedirler.

Literatürde rapor edilen bir diğer güçlük ise $\pi = 180$ olarak algılamakla ilgilidir (ÖG3). Bu güçlüğün giderilmesi için bir çemberde kaç radyan olduğunun gerçel sayı değeri vurgulanırken yerine yaklaşık değeri olan 3,14 koyulmuştur. Trigonometrik fonksiyonlarda da π yerine yaklaşık değeri verilerek, nasıl hesaplanacağına dair örnekler yapılmıştır. π gibi radyanla özdeşleştirilmiş kavramların π° olarak kullanılması ile aradaki

farkın vurgulanmasına özen gösterilmiştir. Bu yaklaşım öğrencilerin $\pi = 180$ algısının kırılmasında etkili olmuştur.

A grubunda ise öğretim yöntemi yeni ortaöğretim matematik öğretim programı çerçevesinde tasarlanmıştır. Matematik öğretim programı esas alınarak ders işlenen 10. sınıf öğrencilerinin radyan kavramına ilişkin güçlüklerin giderilmesinde diğer gruptaki öğrencilere göre daha az gelişim gözlenmiştir. Literatürde rapor edildiği üzere öğrenciler radyanın tanımını yapmakta ve radyanı yay uzunluğu olarak görmekte güçlük çekmektedirler (ÖG1). Bu güçlük A grubunda matematik öğretim programı takip edilerek işlenen dersler sonucunda kısmen giderilmiştir. Yenilenen ortaöğretim matematik öğretim programında radyan kavramı tanımlanmamaktadır. Radyan konusuna 1 radyanın tanımı yapılarak ve grafik üzerinde 1 radyan gösterilerek giriş yapılmaktadır. Radyanın tanımını bilmeyen öğrenciler 1 radyanın nasıl elde edildiğini kavramsal olarak anlayamamaktadırlar. Dolayısıyla 1 radyanın tanımını ezberlemektedirler. Trigonometri konusu boyunca da 1 radyanı başka hiçbir yerde kullanmamaktadırlar. Bu nedenle 1 radyanın tanımını öğrenmiş olmalarına rağmen öğrencilere “1 radyan kaç derecedir?” diye bir soru yöneltildiğinde π içermeyen ifadelerin radyan olamayacağını düşünmektedirler. Matematik öğretim programı takip edilerek işlenen derste öğretim programına ek olarak sadece radyanın tanımı yapılmış ve uygulama düzeyinde bir örnek çözülmüştür. Ayrıca alıştırma bölümünde 1 radyanın kaç derece olduğu sorusu da öğrencilere yöneltilmiştir. Böylelikle öğrenciler radyanın tanımını öğrenmişlerdir. Ancak 1 radyanın tanımını yaparken ve birim çemberde radyanın ne anlama geldiğini açıklamada radyanın tanımı hiç kullanılmamıştır. Bir yayın ölçüsü ve uzunluğu arasındaki farktan bahsedilmemiştir. Yay uzunluğuna hiç değinilmemiş, seçilen örneklerde yayın ölçüsü kavramları kullanılmıştır. Radyan ve yay uzunluğu hiç ilişkilendirilmemiştir. Bu nedenle bu gruptaki öğrenciler birim çemberde radyanın yay uzunluğuna denk geldiği yorumunu yapamamışlardır. 1 radyanı tanımlarken de radyanın tanımını kullanamamışlardır. 1 radyanın derece cinsinden değerinin sorulduğu sorudan sonra öğrenciler bir ifadeye radyan diyebilmek için π içermesine gerek olmadığı sonucuna ulaşmışlardır. Yeni öğretim programı takip edilerek uygulanan öğretim sonucunda öğrencilerde sadece radyanın tanımını yapabilme bağlamında gelişim gözlenmiştir.

Literatürde rapor edilen diğer bir öğrenci güçlüğü gerçel sayıların radyan olarak değerlendirilememesi ile ilgilidir (ÖG2). Matematik öğretim programı takip edilerek işlenen dersler sonucunda öğrenciler açı ölçü birimlerinde kullanılan gerçel sayıları radyan olarak görebilmektedirler. Trigonometrik fonksiyonlarda kullanılan gerçel sayıları ise radyan olarak

görmeye zorluk çekmektedirler. Gerçel sayılara radyan diyebilen öğrenciler de derece olmadığı için ikinci seçenek olarak radyan yanıtını vermektedirler. Yani trigonometrik fonksiyonlardaki gerçel sayılar ile radyanı ilişkilendirememektedirler. Bunun nedeni matematik öğretim programında trigonometrik fonksiyonların tanım kümesinin elemanlarının niçin gerçel sayılar olduğunun açıklanmamasıdır. Ders kitabında gerçel sayılar ve radyan arasında ilişki kurulmamaktadır. Derste de trigonometrik fonksiyonlar anlatılırken önce dik üçgende trigonometrik oranlar hatırlatılmış, daha sonra birim çember tanımları verilmiştir. Fonksiyon olduğunun öğrenciye sezdirilmesi fonksiyonun bire bir eşleme özelliği ile yapılmıştır. Trigonometrik fonksiyonlar birim çember kullanılarak tanımlanmış, tanım ve değer kümeleri verilmiştir. Trigonometrik fonksiyonlarda yapılan örneklerde hep radyanın π 'li ifadesi kullanılmıştır. Ders kitabında da verilen örneklerin tamamında açı ölçüsü olarak derecenin ve radyanın π 'li ifadesinin kullanılması da trigonometrik fonksiyonlarda gerçel sayı kullanımı ile ilk kez karşılaşılan öğrencilerin şaşırmasına neden olmaktadır. Açı ölçü birimlerinde gerçel sayılara radyan diyebilen öğrenciler, trigonometrik fonksiyonlarda kullanılan gerçel sayıların açı ölçü birimleri cinsinden ifadesini söyleyememektedirler.

Literatürde rapor edilen bir diğer öğrenci güçlüğü $\pi = 180$ algısı ile ilgilidir (ÖG3). Matematik öğretim programı takip edilerek işlenen derslerde π yerine yaklaşık değeri olan 3,14 hiç verilmemiştir. Hatta sürekli olarak “bir çember yayının ölçüsü 360^0 'dir” ya da “yarım çember yayının ölçüsü 180^0 ya da π radyan” vurgusu yapılmıştır. Bu vurgulama bazı öğrencilerde $\pi = 180$ algısının oluşmasına neden olmaktadır. Öğrenciler trigonometriye kullanılan tüm π 'ler için π yerine 180^0 ya da 180 koymaktadırlar. Yapılan öğretim sonucunda öğrencilerin radyanın π içeren ifadelerinde π yerine yaklaşık değeri olan 3,14'ü koyamadıkları görülmüştür. Trigonometrik fonksiyonlarda da π yerine değerini koyamayan öğrenciler, koymayı düşünse bile bir trigonometrik fonksiyonun gerçel sayı olarak değerinin nasıl hesaplanacağını bilmedikleri için π 'nin derece cinsinden değerini düşünmektedirler. Bu da öğrencilerde “ $\pi = 180$ ” algısının oluşmasına neden olmaktadır.

Özet olarak aynı önbilgiye sahip olarak seçilen öğrencilere farklı öğretim yaklaşımı benimsenerek uygulanan öğretimler, radyan kavramına ilişkin öğrenci güçlüklerinin giderilmesi ve oluşan yeni kavram güçlükleri bağlamında farklılıklar doğurmuştur. Yeni ortaöğretim matematik öğretim programı takip edilerek öğrenim gören 10. sınıf öğrencilerinde, literatürde rapor edilen öğrenci güçlüklerinin giderilmesi bağlamında, yeni öğretim

yaklaşımı ile öğrenim gören 10. sınıf öğrencilerine göre daha az gelişim gözlenmiştir. Araştırmanın yöntemi olarak seçilen durum çalışması, bu gelişimleri derinlemesine incelemeye ve daha da önemlisi iki farklı grupta benimsenen iki farklı öğretim yaklaşımının hangi unsurlarının bu farka sebep olduğunun belirlenmesine imkan tanımıştır.

Şu aşamada şunu da belirtmek gerekir ki, tasarlanan öğretim yaklaşımının takip edildiği B grubunda da bazı öğrenci güçlükleri tespit edilmiştir. Örneğin her iki grupta da öğretimlerden sonra öğrencilerin derece imajlarının baskın olduğu gözlenmiştir. Her iki grubun öğrencileri de 30, 60 gibi derece ile özdeşleşmiş sayıları gördüklerinde açı ölçü birimi olarak önce dereceyi düşünmektedirler. Matematik öğretim programı takip edilerek ders işlenen sınıfta önce derece, ardından 1 radyan tanımlanmıştır. Daha sonra derece ve radyanın birbirine dönüşümünü sağlayan $\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$ formülü

verilmiştir. Bu nedenle bu gruptaki öğrencilerde derece imajının güçlü olması durumunun değişmemesi beklenen bir sonuçtur. Tasarlanan yeni öğretim yaklaşımı bu durum göz önünde bulundurularak planlanmış ve öğrencilere trigonometrik fonksiyonlar dik üçgendeki oranlar olarak ve derece cinsinden verilmemiştir. Buna rağmen tasarlanan yeni öğretim yaklaşımı öğrencilerin derece imajının baskın olması durumunu değiştirmede yetersiz kalmıştır. Bu durum Cornu'nun (1991) epistemolojik kaynaklı olarak tarif ettiği öğrenci güçlüklerine işaret etmektedir. Cornu (1991) öğrencilerin kavramları anlamakta güçlük çekmelerinin üç temel nedenden kaynaklanabileceğini vurgulamıştır: epistemolojik, pedagojik (didaktik) ve psikolojik. Epistemolojik neden, öğrenilen kavramın kendi doğasından kaynaklanan nedenlerden dolayı öğrenilmesinin zor olmasıdır. Yani öğrenilen kavramın kendisinin zor bir kavram olması öğrenmeyi zorlaştırmaktadır. Öğrencilerin bir kavramı öğrenirken zorluk çekmesinin bir diğer nedeni ise pedagojik kaynaklı olması yani öğretim yöntemlerinden kaynaklanmasıdır. Farklı iki öğretim yöntemi kullanılmasına rağmen öğrencilerde hala derece imajının baskın olması bunun öğretim yöntemlerine bağlı bir nedenden dolayı kaynaklanmadığını göstermektedir. Tasarlanan yeni öğretim yönteminde öğrenci güçlükleri oluşturabileceği düşünülen yöntemlerden ve açıklamalardan uzak durulmasına rağmen öğrencilerde hala derece imajının baskın olması Cornu'nun (1991) tarif ettiği epistemolojik kaynaklı nedene dayandırılabilir. Yani radyan kavramının kendi doğasından kaynaklanan güçlükler öğrencilerin bu kavramı öğrenirken zorlanmalarına, derece imajının daha baskın olmasına neden olmaktadır. Nitekim çeşitli araştırmalar katılımcıların baskın derece imajlarını işaret etmektedir (Steckroth, 2007 ve Akkoç, 2008). Ancak matematik öğretim programlarının

bir gereği olarak öğrencilerin dereceyi radyana göre daha önce öğrenmeleri ve 8. sınıftan 10. sınıfa kadar matematik ve fizik derslerinde dar açıların trigonometrik oranlarını kullanmaları da öğrencilerde derece imajının baskın olmasında önemli bir etkidir. Tasarlanan yeni öğretim yaklaşımı öğrencilerin derece imajının baskın olması durumunu değiştirememiştir ama öğrencilerin 3,14 ve katı olan sayıları radyan olarak ele almalarına yardımcı olmuştur. Matematik öğretim programı takip edilerek ders işlenen gruptaki öğrenciler ise bu konuda yorum yapamamışlardır

Tasarlanan yeni öğretim yöntemi ile öğrenci güçlüklerini gidermede önemli gelişmeler kaydedilmiş olmasına rağmen bu gelişimin bütün öğrencilerde gözlenememiş olmasının bir nedeni de bireysel farklılıklar olabilir. Özellikle akademik başarısı düşük olan öğrenciler bir takım ön bilgi eksiklerine sahiptirler. Ayrıca problem çözme becerileri açısından da yeterli düzeyde olmayabilirler.

Son olarak, bu çalışmanın bulgularından yola çıkarak bu çalışmayı takiben yapılabilecek çalışmalar hakkında yön gösterici yorumları ortaya koymakta fayda vardır. Bu çalışma yorumlayıcı paradigma paralelinde, tasarlanan öğretim yaklaşımının hangi unsurlarının öğrenci güçlüklerini yenmede etkili olduğunu durum çalışması ile ortaya koymuştur. Bu çalışmayı takiben, pozitivist paradigma benimsenerek yapılabilecek bir çalışma ile kontrol ve deney grubunda daha fazla sayıdaki öğrenciye yeni matematik öğretim programı ve ders kitapları, ve tasarlanan öğretim yaklaşımı takip edilerek verilen eğitimlerin ne derece etkin olduğu ortaya konabilir. Böylece bu çalışmada nitel olarak elde edilen bulguların ne derece genellenebilir olduğu araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Akkoç, H. (2006) *Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi: Grafik Analiz Yaklaşımı: İlköğretim İkinci Kademe ve Liseler için (CD Ekli Öğretmen Çalışma Kitapları)*. Toroslu Kitaplığı: İstanbul.
- Akkoç, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39 (7), 857 – 878.
- Cornu, B. (1991). Limits. In. Tall, D. (Ed). *Advanced mathematical thinking*, (pp. 153-166). Kluwer, Boston.
- Durmuş, S. (2004). Matematikte öğrenme güçlüklerinin saptanması üzerine bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*,12(1), 125-128.

- Fi, C. D. (2003). Preservice Secondary School Mathematics Teachers' Knowledge of Trigonometry: Subject Matter Content Knowledge, Pedagogical Content Knowledge and Envisioned Pedagogy. *Unpublished PhD Thesis*, University of Iowa, Iowa, USA.
- Joyce, D.E. (1996). *Angle Measurement*. <http://www.clarku.edu/~djoyce/trig/angle.html> web adresinden 4 Eylül 2007 tarihinde edinilmiştir.
- Kang, O.K. (2003). *A new way to teach trigonometric functions*. <http://www.icme-organisers.dk/tsg09/OkKiKang.pdf> web adresinden 5 Nisan 2008 tarihinde edinilmiştir.
- Maor, E. (1988). *Trigonometric Delights*. Princeton University Press: New Jersey.
- Mason, J. (1996). *Qualitative Researching*. London: Sage.
- MEB (2005). *Orta Öğretim Matematik Dersi Öğretim Programı*. Ankara: MEB.
- Orhun, N. (2004). *Students' mistakes and misconceptions on teaching of trigonometry. International Conference on New Ideas in Mathematics Education*, Palm Cove: Australia.
- Sağlam, Z., Sevim, M., Yurtseven, T., Oğuz, T., Yıldırım, Y., Sağlam, A (2007). *Matematik 10. Sınıf Ders Kitabı*. (2. Baskı). Rotamat Basım, İstanbul.
- Steckroth, J.J. (2007). Technology-Enhanced Mathematics Instruction: Effects of Visualization on Student Understanding of Trigonometry. *Unpublished PhD Thesis*, University of Virginia, Virginia, USA.
- Topçu, T., Kertil, M., Akkoç, H., Yılmaz, K. ve Önder, O. (2006) Pre-service and in-service mathematics teachers' concept images of radian, *Proceedings of the 30th International Conference on the Psychology of Mathematics Education (PME30)*, Prague, Czech Republic, Vol. 5, pp. 281 - 288.

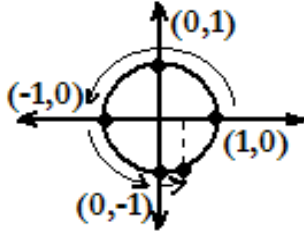
EK: KAVRAMSAL TESTLERDE YER ALAN SORULARA DAİR AÇIKLAMALAR

Aşağıda kavramsal testlerde yer alan sorularla ilgili açıklamalar bulunmaktadır. Bu soruların amacı öğrencilerin çalışmada ele alınan öğrenci güçlüklerine ne derece sahip olduklarını belirlemektir. Aşağıda her bir öğrenci güçlüğü ve güçlükleri ortaya çıkarmaya yönelik sorular sorular açıklanmıştır:

Öğrenci Güçlüğü 1 (ÖG1): Gerçel sayıyı radyan olarak görememek

Soru 1. $f : R \rightarrow R$ ve $f(x) = x \sin x$ fonksiyonu veriliyor. Aşağıda verilen noktayı hesaplayınız ve koordinat düzleminde gösteriniz. $(30, f(30)) = ?$ (Burada 30, derece olarak verilmemiştir.)

Açıklama: Bu sorunun amacı öğrencilerin gerçel bir sayıyı radyan açı ölçü birimi cinsinden değerlendirip değerlendirmediklerini ortaya çıkarmaktır. Burada $f(30)=30\sin(30)$ olup 30'un derece olarak verilmediği soruda özellikle vurgulanmıştır.



Şekil 8. Birim çemberde $\sin 30$

Derece olarak verilseydi $\sin 30^\circ = 0,5$ olacaktı, ancak burada gerçel sayı, yani radyan cinsinden verildiği için $\sin 30$ değeri yaklaşık olarak $-0,988$ olacaktır. Öğrencilerden beklenen $\sin 30$ 'un -1 'e yakın bir değer olduğunu tahmin etmeleridir. Birim çember üzerinde bir tur yaklaşık $6,28$ 'e denk gelmekte olup $4,75$ tur $29,83$ 'e denk gelmektedir. Bu ise $(0,-1)$ noktasına karşılık gelir. 30 'u elde etmek için ise birim çemberde 4.bölgeye geçilmesi gerekmektedir. Bakınız Şekil 8). Birim çember üzerinde $(0,-1)$ noktasında sinüs değeri -1 olup $\sin 30$ 'un değeri 4.bölgeye geçildiğinden -1 'den mutlak değerce biraz daha küçük bir sayı $(-0,988)$ olacaktır. Bu sorunun çözümü için açıların derece olmadığı vurgulandığı halde öğrenciler tarafından sadece derece olarak ele alınması öğrencilerin gerçel sayıları radyan olarak değerlendiremediklerinin göstergesi olarak kabul edilmektedir.

Öğrenci Güçlüğü 2 (ÖG2): Radyanın tanımını kullanmamak başka bir deyişle radyanı yay uzunluğu ya da yay uzunluğunun yarıçapa oranı olarak görememek

Soru 2. Açık ölçü birimlerinden radyanın tanımını yapınız.

Açıklama: Bu sorunun amacı öğrencilerin radyanı “bir çemberde açığı gören yayın yarıçapa oranı” olarak tanımlayıp tanımlayamadıklarını ortaya çıkarmaktır.

Soru 3. Bir çemberde yaklaşık kaç radyan vardır? Bunu nasıl hesaplırsınız?

Açıklama: Bu sorunun amacı öğrencilerin radyanın yay uzunluğu tanımını kullanarak örneğin bir birim çemberde 2π başka bir deyişle yaklaşık 6,28 radyan olduğunu hesaplayıp hesaplayamadıklarını ortaya çıkarmaktır.

Soru 4. Birim çemberde 60 derecelik merkez açığa denk gelen yayın uzunluğu nedir?

Açıklama: Bu soruda öğrencilerden birim çemberde derece cinsinden verilen açının radyan cinsinden değerini bulmaları ve bu değerın yay uzunluğunu vereceğini tahmin etmeleri beklenmektedir.

Öğrenci Güçlüğü (ÖG3): π sayısını 180 olarak algılamak (π 'yi derece cinsinden 180^0 'ye denk olarak değil 180'e eşit olarak algılamak):

Soru 5: π hakkında bildiklerinizi yazınız.

Açıklama: Bu sorunun amacı öğrencilerin π hakkındaki görüşlerini alarak π sayısını yaklaşık değeri olan 3,14'e yakın bir değer olarak değil 180'e eşit olarak algılayıp algılamadıklarını ortaya çıkarmaktır.