

# ÇOK AŞAMALI ÜRETİM SÜRECİ İLE BİRDEN ÇOK ÜRÜN ÜRETEK İŞLETMELERDE, TERMİN PLANLAMASINA İLİŞKİN BİR MATEMATİKSEL MODEL ÖNERİSİ

Doç. Dr. Filiz Çalışkan

## GİRİŞ

Üretim planlaması, üretim prosesinin organizasyonunu gerçekleştirirken, üretim faktörlerinin farklı şekilde kombine edilerek ürüne dönüştürülmesi sürecinde zaman boyutunu düzenler. Üretim planlamasında zaman boyutunun düzenlenmesi, yani süre planlaması, bir parçanın, bir grubun ya da bir ürünün üretilmesi için gerçekleştirilmesi gereken işlemlerin sürelerini ve birbirlerini izleme sıralarını belirleme faaliyetidir.

Teknolojideki, müşteri tercihlerindeki hızlı değişimler sonucu mal çeşidinin artması, rekabetin yoğunlaşması, kalite anlayışının yaygınlaşması gibi nedenler, üretim planlaması sürecini kompleks bir yapıya kavuştururken, çabuk ve doğru karar almayı da güçleştirmektedir. Çabuk ve doğru karar almayı kolaylaştırmak amacı ile üretim planlamasında kısmi planlama hedefleri oluşturulmaktadır. Bunlar<sup>1</sup>:

- üretim süresinin minimizasyonu,
- termin sapmalarının minimizasyonu,
- stok miktarının minimizasyonu,
- kapasite kullanım oranının maksimizasyonu

gibi dir.

Üretim süresinin minimizasyonu, termin sapmalarının minimizasyonu gibi kısmi hedeflere ulaşabilmek için süre planlamasının yapılması gerekmektedir. Şayet ürün birden çok grup ve parçadan oluşuyor ise süre planı daha da önem kazanmaktadır. Süre planlaması, üretim planlamasında zamansal akış planları için yaygın olarak kullanılan bir kavramdır ve üretim planlamasının en son aşamasını oluştururken, görevlerin uygulanması ile ilgili terminlerin belirlenmesini sağlar. Termin belirleme, iş sistemlerinde üretim sürecinin gerçekleşmesi esnasında her bir işlemin başlangıç ve bitiş zamanlarının

---

<sup>1</sup>Zaepfel Günter, Hubert Missbauer; " **Produktionsplanung und Steuerung-für die Fertigungsindustrie- ein Systemvergleich**". Zeitschrift Betriebswirtschaftslehre,57, H.9, 1987, s.882

saptanması faaliyetidir. Termin planlaması siparişe yönelik, kapasiteye yönelik ve bütünlük termin planlaması olmak üzere üç farklı başlıkta incelenmektedir<sup>2</sup>.

Siparişe yönelik termin planlaması, sadece bir siparişin gözönüne alındığı termin planlamasıdır. Mevcut kapasitenin yeterliliğinin kesin olması durumunda işletmelerde uygulanmaktadır. Genellikle büyük projelerin gerçekleştirilmesinde söz konusudur.

Kapasiteye yönelik termin planlaması ile, birden fazla siparişin bulunması durumunda, hem işlerin yani, siparişlerin sıralanması hem de öncelik ilişkileri dikkate alınmak kaydı ile işlem sıralarının belirlenmesi gerçekleştirilir. Kapasite ihtiyacı ile mevcut kapasite birbirlerine eşitlenerek, kapasite sınırları gözönüne alınmış olur.

Bütünlük termin planlaması kapasiteye yönelik termin planlamasında gerçekleştirilen adımlara ek olarak ölçü ve kontrol araçları, çalışma dökümanları, yardımcı donanımlar gibi kontrol edilebilir girdilerin kullanıma hazır olup olmadıklarını da denetler.

Termin planlamasında, üretim aşamalarına göre düzenlenmiş ürün ağaçlarından yola çıkılmaktadır. Termin planlamasında da planlama faaliyeti süre planlamasında olduğu gibi ileriye veya geriye doğru hesaplamalar ile gerçekleştirilmektedir.

Bu çalışmada birden fazla ürün üreten bir işletmede, yine birden fazla siparişin olması durumunda, işlem sıralarını ve kapasiteyi gözönüne alarak, bir kapasiteye yönelik termin planlaması problemine çözüm getirmek amacı ile matematiksel model önerilmiştir. Bu bir tamsayı programlama modelidir.

## 1. PROBLEMİN TANIMLANMASI

Birden çok ürün üreten bir işletme sözkonusudur. Her bir ürün birden çok parçadan oluşan yarımamül olma niteliğini de taşıyabilmektedir. Yarımamülleri oluşturan parçalar ise işletmenin dışardan sağladığı hammaddelerden üretilmektedir. Her bir yarımamül hem diğer yarımamüller, parçalar ve hammaddeler ile montaj işlemi sonucunda tek bir ürün haline gelebilmekte, hem de talep olması durumunda dışarıya ürün olarak satılabilmektedir. Ürün, yarımamül, parça ve hammadde arasında karmaşık üretim ilişkisi bulunmaktadır. Yani, bir ürün, birden çok yarımamül, parça ve hammaddeden oluşurken, parça diğer parçalar ve hammaddelerin montajı sonucu elde edilebilmektedir. Modelin kurulması esnasında elde bulunan bilgiler ve modelin çözümü sonucu ulaşılmak istenen bilgiler aşağıdaki gibidir.

<sup>2</sup>REFA Planlama ve Yönelme Yöntem Bilgisi, Kitap 3,MPM , No:545, 1985 s.49.

### İşletme yöneticisinin elindeki bilgiler:

- üretim aşamalarını gösteren ürün ağacı,
- üretim hattı sayısı,
- standart süreler,
- öncelik ilişkileri,
- ve her ürünün her hatta üretilebileceği dir.

### Ulaşılmak istenen bilgiler:

- talep edilen ürünlere, yarımamüllere ve parçalara olan ihtiyacı karşılayacak yarımamül, parça ve hammadde miktarları,
- hatlarda işlem sıraları gözönüne alınarak gerçekleştirilen üretim faaliyetindeki **minimum ve dengelenmiş** çalışma süreleri dir.

## 2. MODELİN KURULMASI

Tamsayılı Programlama Modelinin kurulması değişkenlerin ve parametrelerin tanımlanması, sınırların ve amaç fonksiyonunun oluşturulması adımları ile gerçekleştirilmektedir.

### 2.1. Değişkenlerin ve Parametrelerin Tanımlanması

$X_i$  : i parçasından üretilecek miktar<sup>3</sup>  $i=1, \dots, n$

$a_{ij}$  : i parçasından, j parçasının bir biriminin üretimi için gereken miktar  $i \neq j$

$X_{ji}$  : j hattında üretilen i parçasının sayısı  $i=1, \dots, n$   
 $j=1, \dots, m$

$T_j$  : j. montaj hattındaki toplam üretim süresi  $j=1, \dots, m$

$b_{ji}$  : i parçasının j hattındaki üretim süresi  $i=1, \dots, n$   
 $j=1, \dots, m$

$p_{jk}$  : j hattında k. aşamadaki paralel işlemlerin birlikte üretilebilecekleri ortak süre  $j=1, \dots, m$   $k=1, \dots, r$

$t_{ji}$  : j montaj hattında i parçasının üretim süresi  $j=1, \dots, m$   
 $i=1, \dots, n$

$d_{ji}$  : i parçasının üretimine j'inci hatta başlama zamanı  $i=1, \dots, n$   
 $j=1, \dots, m$

$V$  : talep

<sup>3</sup> Burada parça tanımı genel anlamda alınmıştır, yani ürün, yarımamül, parça ve hammadde miktarlarını ifade etmektedir.

**K** : toplam üretim süresi

### 2.2.Sınırların Oluşturulması

**I. Sınırlar Seti:** Gozinto Grafiği yardımı ile gerekli tüm parçaların üretim miktarları bulunur.<sup>4</sup>

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \quad i=1, \dots, n$$

**II. Sınırlar Seti:** Her bir üretim hattında, o hatta tahsis edilen parçaların üretilmesi için, gerekli olan toplam süre belirlenir.

$$\sum_{i=1}^n b_{ji} X_i + p_{jk} = T_j \quad t_i \leq p_{jk} \quad i=1, \dots, n$$

$$j=1, \dots, m$$

$$k=1, \dots, r$$

**III. Sınırlar seti:** Her ürünün her hattaki üretiminin toplam sayısı ihtiyaç kadar olmalıdır. Kapasiteler eşitlenir.

$$\sum_{j=1}^m X_{ji} = X_i \quad i=1, \dots, n$$

**IV. Sınırlar seti:** Her parçanın üretiminde, o parça için gereken toplam üretim süresinin bulunması gerçekleştirilir.

$$b_{ji} X_i = t_{ji} \quad i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, m$$

**V. Sınırlar Seti:** Öncelik ilişkileri gözönüne alınır.

$$d_{ij} \geq d_{ij} + t_{ji} \quad i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, m$$

**VI. Sınırlar seti:** Hatların yükleri dengelenir.

Hatların toplam üretim süresini dengelemek amacı ile her hattın toplam üretim süresi K değişkenine eşitlenir.

$$T_j \leq K \quad j=1, \dots, m$$

### 3.3. Amaç Fonksiyonunun Oluşturulması

Montaj hatlarındaki toplam üretim süresinin minimum olması istendiği için amaç fonksiyonunda K değişkeni minimize edilir.

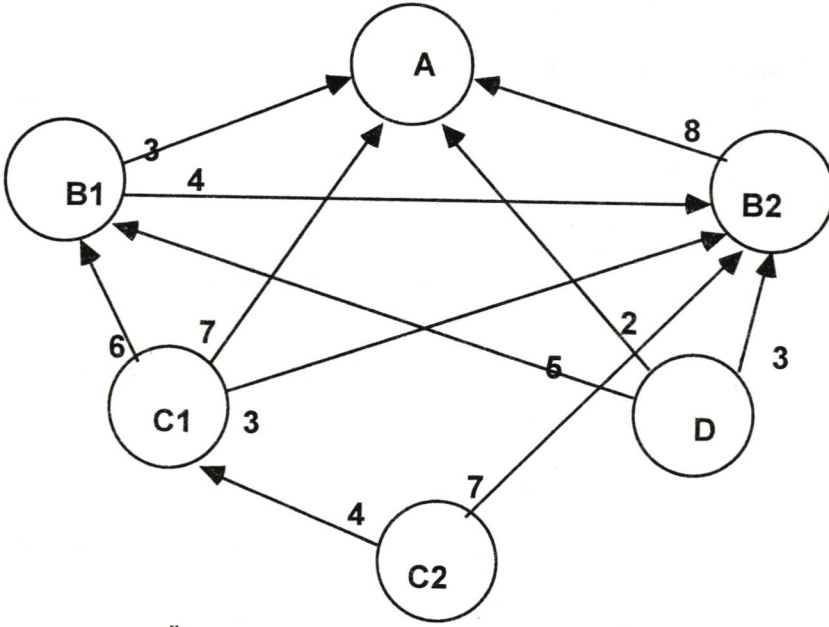
$$\text{Minimum } C = K$$

### 3. Önerilen Modelin Bir Örnek Probleme Uygulanması

Esas alınan örnekteki ürünün ürün ağacından elde edilen Gozinto grafiği aşağıdaki gibidir.

<sup>4</sup>Müller Mehrbach, **Operations Research**, 3. Auflage, Verlag Vahlen, 1973, s. 45





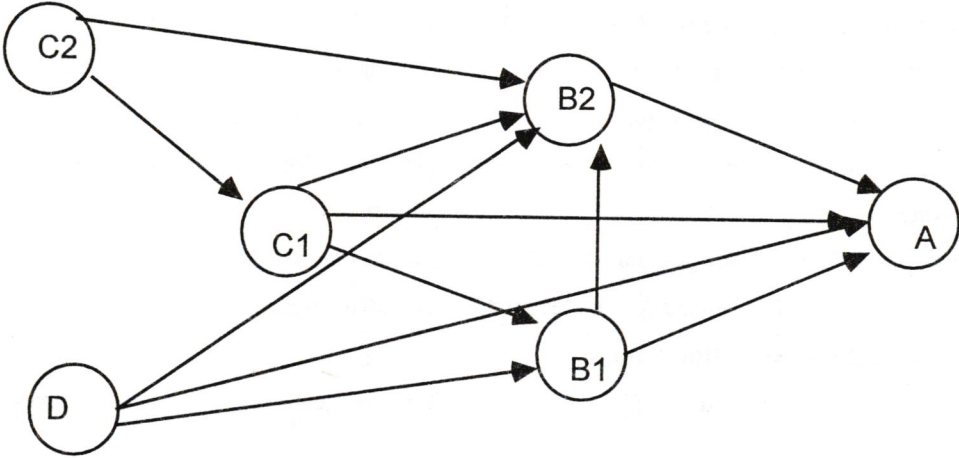
Ürün ağacından elde edilen Gozinto Grafiği

Gozinto Grafiğinde belirtilen ilişkileri açıklamak amacı ile problem şu şekilde ifade edilebilir: Bir İ işletmesi A ve B2 ürünlerini üretmektedir. B2 ürünü aynı zamanda bir yarımamül olup A'nın içinde de kullanılmaktadır. A ve B2 ürünleri B1 ve C1 parçaları ile C2 ve D ham maddelerinden oluşmaktadır. Ürünlerin, yarımamüllerin, parçaların ve hammaddelerin aralarındaki miktar ilişkileri ürün ağaçlarından faydalanılarak Gozinto grafiği ile gösterilmiştir. İşletmenin iki üretim hattı bulunmaktadır. Her iki ürünü de iki hatta üretmek mümkündür. Ürünlerin bir kısmını birinci hatta diğer kısmını da ikinci hatta üretmek te mümkün olabilmektedir. Ancak, bir hatta üretimine başlanılan parça o hatta tamamlanmalıdır<sup>5</sup>. Yani üretim miktarları tamsayı değişkenler ile ifade edilmelidir. Herbir ürünün, yarımamülün, parçanın ve hammaddenin öncelik ilişkileri aşağıda verilmiştir.

<sup>5</sup> Burada parça tanımı genel anlamda alınmıştır, yani ürün, yarımamül, parça ve hammadde miktarlarını ifade etmektedir.

<u>faaliyet</u>	<u>sonraki faaliyet</u>
C2	B2, C1
D	B2, B1, A
B2	A
B1	B2, A
C1	B2, B1, A
A	-

Öncelik ilişkilerinin daha iyi anlaşılması amacı ile aşağıdaki grafik çizilmiştir. Bu grafikte de görüldüğü gibi C2 ile D arasında ve C1 ile D arasında öncelik ilişkisi sözkonusu değildir. Yani, öncelik ilişkisi bulunmayan parçalar arasında paralel üretim<sup>6</sup> gerçekleşebilmelidir.



### Öncelik ilişkilerin grafik ile gösterilmesi

Ancak, paralel işlemler aynı üretim aşamasında olan ürünlerin üretimleri ile ilgili olarak seçilmelidir. Örneğimizde C2 ile D birinci aşamada, C1 ikinci aşamada, B1 ve B2 üçüncü aşamada ve A dördüncü aşamada üretilmesi gereken parçalardır. Örnek problemde birinci aşamadaki D ve C1 parçaları paralel işlemler olarak seçilmiştir.

A ürününe olan talep 60 birimdir. Sipariş miktarı bilinen A ürününü üretmek için her bir yarımamülden, parçadan ve hammadeden gerekli olan miktarların hesaplanması

<sup>6</sup>İki farklı ürünün aynı hatta veya aynı iş istasyonunda ve aynı zamanda üretilmesi durumudur.

gerekmektedir. Her iki hattaki üretim süresi hem minimum olmalı hem de dengelenmelidir. Her bir mamül, yarımamül, parça ve hammaddenin üretim hatlarındaki montajı için standart süreleri dakika cinsinden aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 t_{1A} &= 3 & t_{1D} &= 5 & t_{2C2} &= 5 \\
 t_{1B1} &= 4 & t_{2A} &= 5 & t_{2D} &= 1 \\
 t_{1B2} &= 6 & t_{2B1} &= 2 \\
 t_{1C1} &= 3 & t_{2B2} &= 5 \\
 t_{1C2} &= 7 & t_{2C1} &= 4 \\
 & & \text{standart süreler} & & & 
 \end{aligned}$$

Hatların toplam üretim süreleri belirlenirken işlemlerin öncelik sıralarına göre dizilmeleri gerekmektedir. Ancak, üretim hattı üzerinde, aralarında öncelik ilişkilerinin bulunmadığı işlemlerin paralel olarak gerçekleşmesi beklenen bir durumdur. Böyle bir durumda, istasyonun toplam süresi bulunurken, bu işlemlerin aynı iş istasyonunda, aynı süre içerisinde üretileceğinin göz önüne alınması gerekmektedir. Önerilen Modelde paralel olarak üretilmek üzere seçilen ürünlerin üretim sürelerinin bir başka üretim aşamasına sarkmasını engelleyici herhangi bir sınır oluşturulmamıştır. Yani, pratikte aynı üretim aşamasında bulunmayan parçaların, aralarında öncelik ilişkisi olmaması koşulu ile bir önceki veya sonraki aşamada üretilebileceği düşüncesinden hareket edilmiştir.

### 3.2.Sınırların Oluşturulması

**I. Sınırlar Seti:** Gozinto Grafiği yardımı ile gerekli tüm parçaların üretim miktarları bulunur.<sup>7</sup>

$$\begin{aligned}
 XD &= 3XB2 + 2XA + 5XB1 \\
 XC2 &= 4XC1 + 7XB2 \\
 XC1 &= 6XB1 + 7XA + 3XB2 \\
 XB2 &= 8XA \\
 XB1 &= 3XA + 4XB2 \\
 XA &= 60 \text{ (talep)}
 \end{aligned}$$

**II. Sınırlar Seti:** Her bir üretim hattında gerekli olan toplam süre belirlenir.

$$3X1A + 4X1B1 + 6X1B2 + 3X1C1 + p11 = T1 \text{ (1. hattaki toplam üretim süresi)}$$

$$5X2A + 2X2B1 + 5X2B2 + 4X2C1 + p21 = T1 \text{ (II. hattaki toplam üretim süresi)}$$

$$t1D \leq p11$$

(1. hatta paralel işlemler)

<sup>7</sup>Müller Mehrbach, Operations Research, s. 45.

$$\begin{aligned} t1c2 &\leq p11 \\ t2D &\leq p21 \\ t2c2 &\leq p21 \end{aligned}$$

(II. hatta paralel işlemler)

**III. Sınırlar seti:** Her ürünün her hattaki üretimini toplam sayısı ihtiyaç kadar olmalıdır. Kapasiteler eşitlenir.

$$\begin{aligned} X1A + X2A &= XA & X1C1 + X2C1 &= XC1 \\ X1B1 + X2B1 &= XB1 & X1C2 + X2C2 &= XC2 \\ X1B2 + X2B2 &= XB2 & X1D + X2D &= XD \end{aligned}$$

**IV. Sınırlar seti:** Her parçanın üretiminde, o parça için gereken toplam üretim süresinin bulunmasını gerçekleştirir.

$$\begin{aligned} 3X1A &= t1A \\ 4X1B1 &= t1B1 \\ 6X1B2 &= t1B2 \\ 3X1C1 &= t1C1 \\ 7X1C2 &= t1C2 \\ 5X1D &= t1D \\ \\ 5X2A &= t2A \\ 2X2B1 &= t2B1 \\ 5X2B2 &= t2B2 \\ 4X2C1 &= t2C1 \\ 5X2C2 &= t2C2 \\ X1D &= t2D \end{aligned}$$

**V. Sınırlar Seti:** Öncelik ilişkileri gözönüne alınır.

$$\begin{aligned} d1C1 &\geq d1C2 + t1C2 \\ d1B2 &\geq d1C2 + t1C2 \\ d1B2 &\geq d1D + t1D \\ d1b2 &\geq d1C1 + t1C1 \\ d1B2 &\geq d1B1 + t1B1 \\ d1B1 &\geq d1D + t1CD \\ d1B1 &\geq d1C1 + t1C1 \\ d1A &\geq d1B2 + t1B2 \\ d1A &\geq d1C1 + t1C1 \\ d1A &\geq d1D + t1D \\ d1A &\geq d1B1 + t1B1 \\ d2C1 &\geq d2C2 + t2C2 \\ d2B2 &\geq d2C2 + t2C2 \\ d2B2 &\geq d2D + t2D \\ d2B2 &\geq d2C1 + t2C1 \\ d2B2 &\geq d2B1 + t2B1 \\ d2B1 &\geq d2D + t2D \\ d2B1 &\geq d2C1 + t2C1 \\ d2A &\geq d2B2 + t2B2 \end{aligned}$$



$$d2A \geq d2C1 + t2C1$$

$$d2A \geq d2D + t2D$$

$$d2A \geq d2B1 + t2B1$$

**VI. Sınırlar seti:** Hatların yükleri dengelenir. Hatların toplam üretim süresini dengelemek amacı ile her hattın toplam üretim süresi K değişkenine eşitlenir.

$$T1 \leq K$$

$$T2 \leq K$$

### 3.3. Amaç Fonksiyonunun Oluşturulması

Montaj hatlarındaki toplam üretim süresinin minimum olması istendiği için amaç fonksiyonunda K değişkeni minimize edilir.

$$\text{Minimum } C = K$$

### 3.4. Tamsayı olma şartının sağlanması

Her hatta üretimine başlanmış olan parçanın (burada parça tanımı genel anlamda alınmıştır, yani ürün, yarımamül, parça ve hammaddeyi ifade etmektedir) o hatta bitirilmesinin sağlanması amacı ile hatlarda üretilecek olan ürünlerin miktarlarını veren değişkenlerin tamsayı olması gerekmektedir. Bu amaçla aşağıdaki sınırlar modele ilave edilir.

gin X1A	gin X1B1
gin X1B2	gin X1C1
gin X1C2	gin X1D
gin X2A	gin X2B1
gin X2B2	gin X2C1
gin X2C2	gin X2D

## 4. ÖNERİLEN MODELİN ÇÖZÜM SONUCU

Önerilen Tamsayı Programlama Modeli Lindo Paket Programı ile çözülmüştür. Çözüm süresi yaklaşık iki saniye kadardır ve çözüm sonucu aşağıdaki gibidir.

$$AF = 200300$$

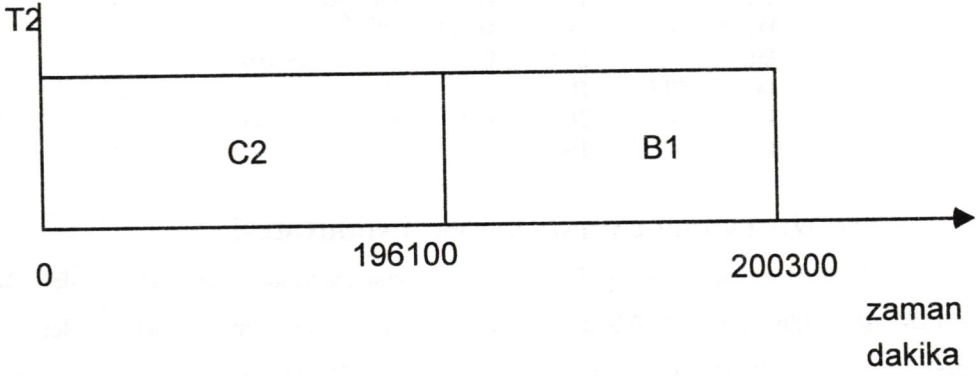
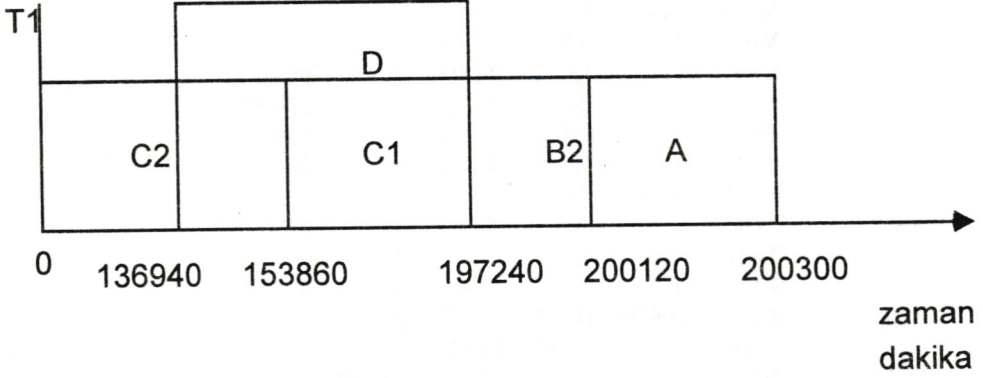
XD =	12060	XC2 =	61200
XC1 =	14460	XB2 =	480
XB1 =	2100	XA =	60
X1A =	60	X2A =	0
X1B1 =	0	X2B1 =	2100
X1B2 =	480	X2B2 =	0

X1C1 = 14460	X2C1 =	0
X1C2 = 21980	X2C2 =	39220
X1D =	12060	X2D = 0
K =	200300	T1 = 200300
T2 =	200300	T1A = 180
T1B1 = 0		T1B2 = 2880
T1C1 = 43380	T1C2 =	153860
T1D =	60300	T2A = 0
T2B1 = 4200	T2B2 =	0
T2C1 = 0		T2D = 0
T2C2 = 196100	D1C2 =	0
D1D =	136940	D2C2 = 0
D2D =	196100	D1C1 = 153860
D1B2 =	197240	D1B1 = 197240
D1A =	200120	D2C1 = 196100
D2B2 = 200300	D2B1 =	196100
D2A =	200300	P11 = 153860
P21 =	196100	

## 7. ÇÖZÜM SONUÇLARININ DEĞERLENDİRİLMESİ

A ürününe olan 60 birimlik talebin karşılanabilmesi için 2100 adet B1 parçasından, 480 adet B2 ürününden (aynı zamanda yarımamül), 14460 adet C1 parçasından, 61200 adet C2 hammaddesinden ve 12060 adet te D hammaddesinden gerekmektedir.

Önerilen Modelin çözüm sonuçlarına göre, T1 ve T2 hatlarının her ikisinde de toplam üretim süresi 200300 dakikadır. T1 hattında 21980 adet C2, 14460 adet C1, 480 adet B2 ve 60 adet A ürünü ile 12060 adet D hammaddesi üretilmektedir. T1 hattında üretim C2 ürünü ile başlayacaktır. 136940. dakikada D hammaddesinin üretimine, 153860. dakikada C1 ürününün, 197240. dakikada B2 ürünün üretimine ve 200120. dakikada da A ürünün üretimine başlanması gerekmektedir. D nin üretimi, C1'in üretim süresinin tamamı ve C2'nin üretim süresinin bir kısmında paralel olarak üretilmektedir.



T2 hattında 39220 adet C2, 2100 adet B1 ürünü üretilmektedir. T2 hattında önce C2 ürünü ile üretime başlanmaktadır. C2 nin üretimini bittiği 196100. dakikada B1 ürünün üretimine başlanmaktadır.

## 8. SONUÇ

Teknolojideki, müşteri tercihlerindeki hızlı değişimler sonucu mal çeşidinin artması, rekabetin yoğunlaşması, kalite anlayışının yaygınlaşması ile karmaşıklaşan üretim prosesinin planlanmasında, işletme yöneticileri bilimsel yöntemleri kullanmak durumunda kalmaktadırlar. Termin belirleme faaliyeti ise üretim planlamasının son aşamasını oluşturmaktadır.

Bu çalışmada kapasiteye yönelik termin planlaması esas alınmıştır. Birden çok ürünün, çok aşamalı üretim süreci ile üretildiği bir işletmede, termin planlaması bir **Matematiksel Model** (Tamsayılı Programlama Modeli) yardımı ile gerçekleştirilmiştir. Önerilen model, öncelik ilişkileri dikkate alınmak kaydı ile hem sipariş verilen ürün için gerekli yarımamül, parça ve hammadde sayısını hesaplamakta, hem de bunların tümünün

montaj hatlarındaki üretime başlama saatlerini verirken, toplam üretim süresini de minimize etmektedir. Ayrıca, hatlardaki üretim süresi de dengelenmektedir.

Önerilen modelin kurulmasında ürün ağacından faydalandığı çalışmanın başında belirtilmiştir. Üretim aşamalarına göre düzenlenmiş olan bu ürün ağacında, paralel işlemler belirlenirken, aynı üretim aşamasında olan ürünlerin aynı anda üretilebilecek ürünler olarak seçilmesine özen göstermek gerekmektedir. Çünkü, aynı aşamada yer alan paralel işlerin, aynı anda yapılmasına model imkan vermektedir. Ancak, farklı aşamalarda yer alan ve paralel olarak yapılması pratikte mümkün olan (D ve C1 gibi) işlerin, aynı anda yapmak üzere seçilmesi durumunda modelin ikinci sınırlar seti hatların toplam sürelerini doğru olarak hesaplayamamaktadır. Bu güçlüğün giderilmesinin ayrı bir çalışma konusu olduğu düşünülmektedir.

Ayrıca, bu Model kontrol edilebilen girdiler ile ilgili hiçbir bilgi vermemektedir. Modelin geliştirilerek bütünlük termin planlaması problemlerine çözüm getirebilecek düzeye getirilmesi ileriye dönük olarak hedeflenmektedir.

#### **YARARLANILAN KAYNAKLAR**

Günter Zaepfel , Hubert Missbauer; " **Produktionsplanung und Steuerung-für die Fertigung.sindustrie- ein Systemvergleich**".Zeitschrift Betriebswirtschaftlehre, 57, H.9, 1987.

Müller Mehrbach, **Operations Research**, 3. Auflage, Verlag Vahlen, 1973.

**REFA Planlama ve Yönelme Yöntem Bilgisi**, Kitap 3, MPM , No:545, 1985 .