

Canlı toplumlarının derecelendirilmesi için nispi entropi, boolean operatörleri ve temel bileşenler analizi kardeşliği

Kürşad Özkan*

Özet: Canlı toplumların sayısal olarak birbirlerine göre derecelendirilmiş verileri toplum-çevre ilişkilerini incelemek ve açıklamak için temel girdilerdir. Bu çalışmada iki olasılık dağılımı olan p ve q arasındaki simetrik olmayan farkın ölçümü olarak tanımlanan nispi entropiyi $D[p(x) | q(x)]$ kullanarak temel bileşenler analizinin ordinasyon eksenleri boyunca canlı toplumların derecelendirilmesinin nasıl gerçekleştirileceği sorusuna cevap bulmak amaçlanmıştır. Çalışmada ilk olarak üç bitki toplumundan oluşan hipotetik bir veri matrisi kullanılarak bitki toplum çiftlerinin nispi entropi hesaplarına girilmiştir. Fakat bu işlem sonunda, orijinal veri matrisinde "0" verilerinin varlığı sebebiyle toplum çiftleri arasında nispi entropi hesapları gerçekleştirilememiştir. Bu sebepten veri matrisi her bir toplumun marjinal entropilerini arttırmak suretiyle tekrar düzenlenmiştir. Böylece toplum çiftleri arasında gölgeli nispi entropi ($D_{\blacksquare}[p(x) | q(x)]$) başarılı bir şekilde hesaplanmıştır. Bu aşamadan sonra, toplum çiftleri arasında entropik ölçüm değerlerini içeren matriste, her bir toplumun kendi ile çakıştığı köşegen elemanlarının entropik değerlerini bulmak için devreye Boolean operatörleri ve temel bileşenler analizi (TBA) sokulmuştur. En son aşamada elde edilen veri grubuna son bir kez TBA uygulanmış, toplumlar TBA'nın ordinasyon ekseninde konumlandırılmıştır. Bu yaklaşımla elde edilen çıktılar, orijinal veriye kümeleme analizi kullanarak elde edilen çıktılar ile çok benzer bulunmuştur. Bu sonuç, nispi entropi, Boolean operatörleri ve TBA birlikteliği ile canlı toplumlarının birbirlerine göre konumlanmasının veya derecelenmesinin başarılı bir şekilde uygulanabileceğine dair bir kanaatin oluşmasını sağlamıştır.

Anahtar kelimeler: Bilgi teorisi, Olasılık teorisi, Kullback-Leibler ayrışması, Bilgi kazancı, Bilgi ayrışması

Brotherhoods of relative entropy, boolean operators and principle component analysis for a gradient of living communities

Abstract: It is well known that gradient values of the living communities are the most important and valuable data to examine and explain community-environmental relationships. On this context, the purpose of the present study is to find an answer to the question that is how to generate a gradient of living communities along the PCA (Principal Component Analysis) ordination axes by using relative entropy ($D[p(x) | q(x)]$), a measure of the non-symmetric difference between two probability distributions, p and q . A hypothetic data matrix composed of 3 plant communities was subjected to relative entropy. Relative entropy could not be calculated from original data since the hypothetic data matrix includes zero values. The data matrix was, therefore, re-arranged by increasing the marginal entropy of each of the communities. Thus shaded relative entropies ($D_{\blacksquare}[p(x) | q(x)]$) among the communities were successfully calculated. Next, the locations of the resulted matrix in which each community shares a cell with itself were analyzed using Boolean Operators and principle component analysis (PCA). Lastly, the last PCA was applied in order to determine the locations of the plant communities along the ordination axes. The results of such approach were compared to the results obtained from the original data by using cluster analysis. The results were found very similar as a result of this comparison and, it was formed an opinion to be able to successfully use the combinations of shaded relative entropy and Boolean operators for a gradient of the living communities along the PCA ordination axes.

Keywords: Information theory, Probability theory, The Kullback–Leibler divergence, Information gain, Information divergence

1. Giriş

Nispi entropi, $D[p(x) | q(x)]$, iki olasılık dağılımı $p(x)$ ve $q(x)$ arasındaki mesafenin bir ölçümüdür ve $\infty \geq D[p(x) | q(x)] \geq 0$ olup $p(x) = q(x)$ durumunda $D[p(x) | q(x)] = D[q(x) | p(x)]$ olur ki bu, $D[p(x) | q(x)] = 0$ anlamına gelmektedir. Ancak $p \neq q$ ise o zaman genellikle $D[p(x) | q(x)] \neq D[q(x) | p(x)]$ sonucuna ulaşılır (Cover and Thomas, 1991). $D[p(x) | q(x)] \neq D[q(x) | p(x)]$ bize benzerlik veya benzemezlik matrisi gibi çift yönlü aynı değerleri içeren

matristen farklı bir $M \times M$ matrisine ulaşmayı sağlar. Böyle bir matris içerdiği toplumların birbirleri ile derecelenmesinde kullanılabilir. Ancak bu matriste aşılması gereken bir problem vardır. Bu problem bir toplumun kendi döngüsü ile çakıştığı hücrenin hangi değeri alacağına belirsizliğidir. İkili Boolean operatörleri burada devreye girmektedir. Boolean operatörleri ile ilgili açıklamalar metnin ilerleyen kısımlarında verilmiş olup, nispi entropi ile ilgili açıklamalara devam edersek;

✉ * Isparta Uygulamalı Bilimler Üniversitesi, Orman Fakültesi, Orman Mühendisliği Bölümü, 32260, Isparta

@ * **Corresponding author** (İletişim yazarı): kursadozkan@sdu.edu.tr

✓ **Received** (Geliş tarihi): 09.10.2017, **Accepted** (Kabul tarihi): 21.05.2018



Citation (Atıf): Özkan, K., 2018. Canlı toplumlarının derecelendirilmesi için nispi entropi, boolean operatörleri ve temel bileşenler analizi kardeşliği. Turkish Journal of Forestry, 19(2): 130-137.
DOI: [10.18182/tjf.342500](https://doi.org/10.18182/tjf.342500)

$$D[p(x) | |q(x)] = \sum_{i=1}^N p(x_i) \log_b [p(x_i)/q(x_i)] \quad (1)$$

$$D[q(x) | |p(x)] = \sum_{i=1}^N q(x_i) \log_b [q(x_i)/p(x_i)] \quad (2)$$

eşitlikleri ile hesaplanmaktadır.

Nispi entropi ile ilgili işlemler üç kural temelinde gerçekleştirilir. Bu kurallar (1) $0 \log_b(0/0) = 0$, (2) $0 \log_b(0/q) = 0$ ve $p \log_b(p/0) = \infty$ şeklindedir (Cover and Thomas, 1991). Nispi entropinin hesaplanmasını veri evreni eğer sadece iki ekolojik meta toplumdaki ibaret ise son iki kural, ikiden fazla ekolojik meta toplumdaki oluşuyorsa tüm kurallar engellemektedir.

Şöyle ki;

İlk kural ($0 \log_b(0/0) = 0$) iki ekolojik meta toplumun nispi entropisini belirlenmesinde kabul edilebilir. Zira meta toplumların her ikisine de ait olmayan bir üye için bir işlemden bahsedilemez. Diğer bir değişle ikili durum için $p = q = 0$ işleminden muafir ki o yüzden, matematiksel bir işlem olarak düşünmeden $0 \log_b(0/0) = 0$ kuralı iki meta toplumdaki oluşan veri evrenindeki hesaplar için kabul görür. Ancak eğer bu veri evreni başka bir meta toplum dâhil olur ise durum değişir. Zira en son eklenen meta topluma (C) ait bir "x" üyesi diğer iki meta toplumdaki (örneğin A ve B meta toplumlarında) yok ise, A ve B arası nispi entropi hesabı C'nin bu "x" üyesi dikkate alınmadan gerçekleştirilemez. Özetle ikiden fazla meta toplum evreni için ilk kural geçersizdir.

İkinci kural ($0 \log_b(0/q) = 0$) bir p değerinin olması durumunda q değeri olmasa bile işlem sonucu "0" kabulüne dayanmaktadır. Ekolojik meta toplumların karakter tabanlı incelemesinde nispi entropi bu durumda istenen rolü tam anlamı ile oynayamaz. Kısacası ikinci kabul de ekolojik açıdan sorunlu bir kabuldür ve yanlışta götürür.

Üçüncü kuralda, $p \log_b(p/0) = \infty$ p değerini ifade eden meta toplumun herhangi bir üyesi değere sahip olsa, ama onun karşısındaki diğer meta toplumdaki bu üyeye ait değer olmasa bu durumda işlem sonucu ∞ 'a gider ki, elbette ki bu kural da ekolojik meta toplumların nispi entropi hesaplarına yönelik işlem süreçlerini sonuçsuz bırakır.

Yukarıdaki açıklamalar itibariyle ortaya cevap verilmesi gereken bir soru çıkmaktadır. Şöyle ki; bahsi geçen kuralları çiğneyerek nispi entropi hesabına giremeyeceğime göre, ekolojik meta toplumların birbirlerine göre kıyaslamak için nispi entropi hesabını nasıl gerçekleştireceğiz?

Bu makale yukarıdaki soruya cevap bulmak amacıyla kaleme alınmıştır. Daha farklı bir ifade ile, bu çalışma iki olasılık dağılımı olan p ve q arasındaki simetrik olmayan farkın ölçümü olarak tanımlanan nispi entropiyi $D[p(x) | |q(x)]$ ilgili veri yapısını yeniden tanımlayarak ve Boolean operatörlerini kullanarak ekolojik meta toplumları birbirlerine göre derecelendirilmek amacıyla gerçekleştirilmiştir.

2. Materyal ve yöntem

Çalışma Çizelge 1'de verilen hipotetik veriler ile gerçekleştirilmiştir. Çizelge 1'de sütunlar ekolojik meta toplumları ve satırlar türleri ifade etmektedir. Çizelgenin hücrelerindeki sayısal değerler türlerin birey sayılarını, parantez içindeki değerler türlerin ilgili meta toplumdaki oransal değerini ifade etmektedir.

Meta toplum çiftlerinde nispi entropiye yönelik işlemleri karşılıklı yer değiştirerek gerçekleştirirsek hesap sonuçları Çizelge 2'deki gibi olur.

Bütün işlem sonuçlarının " ∞ " bit çıkmasının sebebi $p \log_b(p/0) = \infty$ kuralının bir sonucudur. Zira meta toplumların p ifadesi ile karşılaştırılması esnasında en az bir hücrede q değeri "0" olmuştur.

Diğer yandan örnek veri setinde hiçbir hücre çifti için q değeri "0" olmasa bile elde edilecek sonuçlar ekolojik meta toplumların karşılaştırılması için zaten uygun olmazdı. Zira ikiden fazla meta toplum evreninde bir türün sadece bir meta toplumdaki bulunması durumu, diğer iki veya daha fazla meta toplumun bu türden bağımsız davranamayacağı anlamına gelmektedir. Ekolojik meta toplumlar için bu gerçek $0 \log_b(0/0) = 0$ kuralına aykırı bir durumdur.

Ek olarak, iki ekolojik meta toplum karşılaştırırken bir tür p ifadesi ile meta toplumun birinde yok ise, fakat q ifadesi ile diğer meta toplumdaki olsa bile $0 \log_b(0/0) = 0$ kuralına göre sonuç "0" olur ki, bu durumda iki meta toplumun farklılığı hesaplara yansımaz. Bu kural da ekolojik meta toplum çiftlerinin karşılıklı nispi entropisini hesaplamaya engel teşkil etmektedir.

Çizelge 1. Üç meta toplumdaki (mt_1, mt_2, mt_3) oluşan bir havuzda türler, onların birey sayıları ve oransal değerleri (Veriler hipotetiktir, türlerin oransal değerleri parantez içinde gösterilmiştir)

Türler	mt_1	mt_2	mt_3
s_1	35 (0,35)	0 (0)	10 (0,15384615)
s_2	15 (0,15)	0 (0)	0 (0)
s_3	10 (0,1)	5 (0,03876)	0 (0)
s_4	5 (0,05)	44 (0,34109)	0 (0)
s_5	0 (0)	0 (0)	25 (0,38461538)
s_6	0 (0)	35 (0,27132)	5 (0,07692308)
s_7	5 (0,05)	10 (0,07752)	0 (0)
s_8	0 (0)	35 (0,27132)	20 (0,30769231)
s_9	30 (0,30)	0 (0)	5 (0,07692308)

Çizelge 2. Nispi entropiye yönelik hesap sonuçları

İşlemler	Sonuçlar
$D[p(mt_1) q(mt_2)]$	∞
$D[p(mt_2) q(mt_1)]$	∞
$D[p(mt_1) q(mt_3)]$	∞
$D[p(mt_3) q(mt_1)]$	∞
$D[p(mt_2) q(mt_3)]$	∞
$D[p(mt_3) q(mt_2)]$	∞

2.1. Negatif film

Eğer gerçek görüntü ile bir sonuç alamazsak, o zaman gerçek görüntüdeki bütün boşlukları doldurup, dolu olanları doluluk değerini dikkate alarak boşaltsak ne olur? Şekil 1'deki gibi olur.



Şekil 1. Bir görüntü ve onun negatif görüntüsü

Aynı işlemi ekolojik meta toplumlardan oluşan bir veri havuzuna, örneğin Çizelge 1'deki verilere, maksimum hücre değerini 45¹ olarak alıp uygulasak ne olur? Durum Çizelge 3'deki gibi olur.

Veri havuzundaki boşlukları doldurmak, nispi entropinin maksimum entropi alanına çekilmesini ve bu alanda üç kuralı çiğnemenin hesaplanmaların yapılması anlamına gelmektedir. Diğer bir deyişle nispi entropinin aydınlıktan bakarak değil de -ki bu alanda hesaplamalar ile değer elde edemiyoruz- karanlıktan bakarak sayısal değerlere ulaşılmasını sağlar.

Bu durumda $D[p(x) || q(x)]$ ve $D[q(x) || p(x)]$ 'yi $D \blacksquare [p(x) || q(x)]$ ve $D \blacksquare [q(x) || p(x)]$ olarak ifade etmek daha doğru olur. Çizelge 3'deki ham verilerin oransal değerleri Çizelge 4'de, $D \blacksquare [p(x) || q(x)]$ ve $D \blacksquare [q(x) || p(x)]$ hesap sonuçları da Çizelge 5'de verilmiştir.

Çizelge 5'deki veriler ile ilgili açıklamaları detaylandırırız; Çizelge 6 incelenecek olur ise, meta toplumların kendilerine eş köşe hücreleri dışında bütün hücrelerin dolu olduğunu ve meta toplum çiftlerinin p ve q ifadesi ile analizinde asimetrik değerlerin ortaya çıktığını görüyoruz. Bu çizelgede diğer görünmesi gereken husus köşe hücrelerindeki soru işareti olmalıdır.

Köşe hücrelerindeki soru işareti sebebiyle bu verinin analiz sürecinde yolumuza iki farklı yaklaşımla devam etme seçeneği doğmaktadır.

İlk yol Çizelge 6'daki asimetrik veriyi simetrik hale dönüştürmektir ki, bu işlem aşağıda gösterilen üç numaralı formül ile gerçekleştirilebilir ve böylece tüm meta toplumlar için simetrik değerlere ulaşılabilir. Bu durumda haliyle meta toplumların kendilerine eş hücre değerleri için işlem düşer ve meta toplumların simetrik verisi daha sonraki istatistiksel işlemler için hazır hale gelmiş olur. Zira meta toplumların simetrik veri değerlerinden oluşan matris bir benzerlik matrisi konumu kazanmıştır.

$$\blacksquare Dmt_i, Dmt_j = \blacksquare \sqrt{Dmt_i Dmt_j} \quad (3)$$

Çizelge 6'daki değerler itibarıyla simetri matrisi Çizelge 7'de verilmiştir.

¹ Çizelge 1'deki verilerin doldurulması -bir nevi maksimum entropi alanına çekilme işlemi- sonucu, bütün hücrelerin değer alabilmesi gerekmektedir. Bu sebepten orijinal verilerden çıkarma işlemi için kullanılacak değer Çizelge 1'de bulunan maksimum değerden daha yüksek değere sahip olan en küçük değer olmasına karar verilmiştir. Çizelge 1'de en yüksek hücre değeri 44 olduğu için, verinin maksimum entropi alanına çekilmesi için kullanılacak eşik değeri 45 olarak alınmıştır.

Simetrik yapıda matris bizi derecelenmeye ordinasyon analizleri, gruplandırmaya ise kümeleme analizleri ile götürür.

Kümeleme yaklaşımları ile işlemlerin devam ettirelim. Bunun için öncelikle, orijinal veri setindeki veriler (Çizelge 1) kullanılarak meta toplum çiftleri arası oklit mesafesi belirlenmiş (Çizelge 8) daha sonra, TREX programı kullanarak (Boc vd., 2012) her iki matris (Çizelge 7 ve 8) ayrı olarak analiz edilmiş ve sonuçta iki filogenetik ağaç elde edilmiştir (Şekil 2).

Çizelge 3. Çizelge 1'deki verilerin negatif görüntüsü

Türler	mt_1	mt_2	mt_3
s_1	10	45	35
s_2	30	45	45
s_3	35	40	45
s_4	40	1	45
s_5	45	45	20
s_6	45	10	40
s_7	40	35	45
s_8	45	10	25
s_9	15	45	40

Çizelge 4. Çizelge 3 değerlerinin oransal değerleri

Türler	mt_1	mt_2	mt_3
s_1	0,03278689	0,16304348	0,10294118
s_2	0,09836066	0,16304348	0,13235294
s_3	0,1147541	0,14492754	0,13235294
s_4	0,13114754	0,00362319	0,13235294
s_5	0,14754098	0,16304348	0,05882353
s_6	0,14754098	0,03623188	0,11764706
s_7	0,13114754	0,12681159	0,13235294
s_8	0,14754098	0,03623188	0,07352941
s_9	0,04918033	0,16304348	0,11764706

Çizelge 5. Maksimum entropi alanına çekilen veriler ile nispi entropiye yönelik hesap sonuçları

İşlemler	Sonuçlar
$\blacksquare D[p(mt_1) q(mt_2)]$	0,990649
$\blacksquare D[p(mt_2) q(mt_1)]$	0,678692
$\blacksquare D[p(mt_1) q(mt_3)]$	0,206959
$\blacksquare D[p(mt_3) q(mt_1)]$	0,215027
$\blacksquare D[p(mt_2) q(mt_3)]$	0,367572
$\blacksquare D[p(mt_3) q(mt_2)]$	0,702835

Çizelge 6. Nispi entropiye yönelik değerlerin çapraz çizelgesi

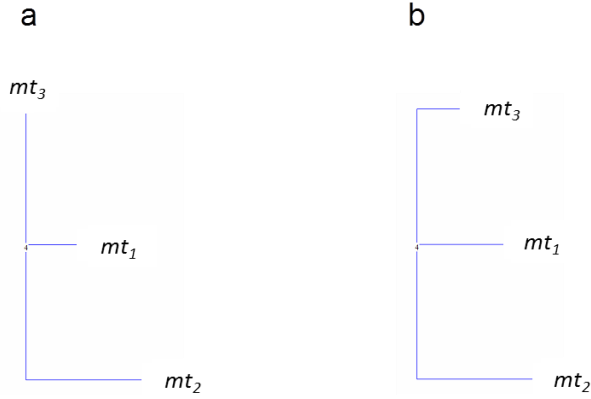
İfade	q		
	mt_1	mt_2	mt_3
p	mt_1	?	0,990649
	mt_2	0,678692	?
	mt_3	0,215027	0,702835
			?

Çizelge 7. Meta toplumların maksimum entropi alanında simetrik nispi entropi değerleri

	mt_1	mt_2	mt_3
mt_1	0	0,81997	0,21095
mt_2	0,81997	0	0,50827
mt_3	0,21095	0,50827	0

Çizelge 8. Orijinal veriden (Çizelge 2 verisi) meta toplum çiftleri arasında Öklid mesafe değerleri

	mt_1	mt_2	mt_3
mt_1	0	79,819	51,72
mt_2	79,819	0	62,738
mt_3	51,72	62,738	0



Şekil 2: Simetrik değerlere (a) ve öklit mesafesine göre (b) neighbour-joining kümeleme analizi sonuçları

Şekil 2’teki filogenetik ağaçlar incelendiğinde bunların birbirlerine büyük oranda benzediği görülmektedir. Kısmen de olsa şekiller arasındaki farklılığın sebebi yaklaşım farklılıklarından kaynaklanmaktadır. Ne var ki elde edilen sonuçların yorumu aynı yola çıkmaktadır. Kazanılan bu bilgi ekolojik değerlendirmeler için önemlidir ama ekosistem süreç analizlerinin nihai safhalarında (modelleme-yaygınlaştırma) istenen sonuca tam anlamı ile götüremeyebilir. Zira kümeleme yaklaşımı ile elde edilen bu bilgi meta toplumlarının birbirlerinden farklılıklarının ifade eden sürekli bir veri tipi sunmamaktadır.

Yukarıdaki açıklamaların ışığı altında farz edelim ki, birinci yaklaşım pas geçilsin, nispi entropi eşitliği ile elde edilen orijinal değerlere dokunmadan analizlere devam edilsin. Bu durumda öncelikle köşe hücrelerine yönelik işlemlerin gerçekleştirilmesi ile işe başlanmalıdır.

2.2. Boolean² operatörleri

Doğru-yanlış durumlarının sayısal olarak (0,1) ifade edildiği bir x değişkenine ait değer haritası (V) aşağıdaki şekilde ifade edilir (Arpasi, 2003).

$$v(x) = \begin{cases} 1; & \text{eğer } x \text{ doğru ise} \\ 0; & \text{eğer } x \text{ yanlış ise} \end{cases}$$

² Klasik mantık doğru-yanlış, siyah-beyaz, iyi-kötü, güzel-çirkin gibi zıt kavramlardan ibarettir. Bu mantık Aristo mantığı olup tanım sayılara döktüldüğünde “0” ve “1”e denk gelmektedir. Bulanık mantıkta ise 0 ile 1 arasındaki diğer olası sayılar yer almaktadır.0,5 gibi. Siyah ile beyaz arasındaki gri renk gibi; Gerçek hayatta kullandığımız bu mantık Paskal ile doğan ve Lütfi Askerzade ile hayata geçirilen mantıktır. Boolean mantığı da bulanık mantık gibi aslında gerçek hayatımızda kullandığımız bir mantık; aynı anda aynı durum için kullandığımız çelişkili ifadelerin mantığı... Bir nevi dengeleri korumak için, taraf olmamak için kullanılan mantık; farklı bir açıdan düşünersek belki de bir nevi yalaka mantığı. Bir üst versiyonu ince ayar yalıklık diyelim; üçlü mantık (ternary logic) oluyor. Boolean mantığında iki değişken için 16 fonksiyon varken üçlü mantıkta bu sayı 19600 oluyor. Üçlü mantıkta bu çalışmada kullanılabilir. Ama o zaman işlemler birkaç bin kat daha uzun olurdu. Sonuç olarak, ekoloji bulanık mantığa olduğu gibi Boolean mantığına da kapısını aralamıştır. Neden mi? Çünkü **ekoloji asıl olarak mantıksal süreç analizlerini içeren olasılık yaklaşımı, entropi temelli bütünsel bir “yöntem” bilimdir.**

Tek değişkenli ($n=1$) fonksiyonların ($f(x)$) $f_1 = id(x)$ (doğrulama), $f_2 = N(x)$ (ret etme), $f_3 = \tau(x)$ (yineleme) ve $f_4 = \gamma(x)$ (çelişki) (Çizelge 9) olmak üzere dört farklı durumu söz konudur (Ben-Ari, 1993).

Çizelge 9: Tek değişkenli Boolean model fonksiyonları

x	$id(x)$	$N(x)$	$\tau(x)$	$\gamma(x)$
1	1	0	1	0
0	0	1	1	0

Eğer $n=2$ ise, diğer bir deyişle 2 değişken var ise, bu durumda iki değişkenli fonksiyon ($f(x, y)$)’dan 16 farklı fonksiyon (Çizelge 10) söz konusu olmaktadır (Ben-Ari, 1993).

2.3. Asimetrik matrisin köşe elemanları ve Boolean operatörleri

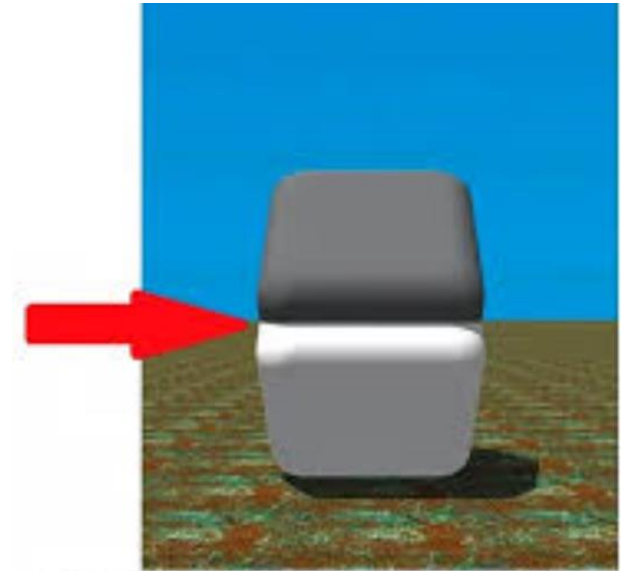
Asimetrik matriste (Çizelge 6) meta toplumların kendilerine eş hücreleri hangi işlem ile değer alacak? Sorusuna cevap bulmak zorundayız.

Örneğin mt_1 - mt_1 köşe hücresi aşağıdaki şıklarda gösterilen hangi işlem ile nispi entropi değeri alacak?

İşlemler³

- $\blacksquare D[p(mt_1) | q(mt_2 + mt_3)]$
- $\blacksquare D[p(mt_2 + mt_3) | q(mt_1)]$
- $\blacksquare D[p(mt_1) | q(mt_1)]$

Yukarıdaki sorunun cevabına yönelik olarak Şekil 3 üzerinden tartışmalara başlayalım.



Şekil 3. Gerçekten göz yanılması mı?

³ “c” seçeneğinde $p=q$ ’dur. Yani $\blacksquare D[p(mt_1) | q(mt_1)] = \blacksquare D[q(mt_1) | p(mt_1)]$ olmaktadır. Bu yüzden meta toplumların kendi hallerine yönelik tek alternatif vardır.

Şekil 3'te iki blok vardır. Sizce alttaki bloğun rengi nedir?

Resmin tüm kompozisyonunda aşağıdaki bloğun rengi beyaz gibi görünür. Ama okun olduğu yönde parmağınızı koyduğunuzda aslında alt bloğun rengi siyahtır.

Ortaya çıkan bu farklılığı bir göz yanılması olarak ifade etmek yeterli bir cevap mıdır?

Göz yanılması gözün resimdeki tüm kompozisyonunu dikkate alması sonucu olmuştur ve aslında resmin tüm kompozisyonunda alt bloğun rengi gerçekte beyazdır, gözün buradaki algısı ve bize gönderdiği mesaj alt bloğa düşen gölge şeklindedir. Zira göz kompozisyonu, yani bütünü dikkate alarak alt bloğa odaklanma eyleminde bulunmuştur. Bu kompozisyonu bozup parçalara ayırdığımızda ise alt bloğun rengi siyah olmaktadır. Bu iki durum arasındaki farkı (paradoksu) bir yanılma olarak mı yoksa bir konu veya tema değişimi olarak mı değerlendireceğiz?

Şekil 3'e yönelik açıklamalara göre alt bloğun rengi ile ilgili bir karar vermek durumunda olsak aşağıdaki şıklardan hangisini seçeceğiz?

- Siyah
- Beyaz
- Hem siyah hem beyaz
- Ne siyah ne beyaz

Her cevabı bir yönü ile doğru bir yönü ile yanlış olarak kabul edersek, bir belirsizlik durumunu kabul ediyoruz demektir.

Bu durumda;

Eğer siyah için 1;0, beyaz için 0;1 ifadesini kullanırsak, iki değişken durumu söz konusu olur.

Bu durumda 1;1 (hem siyah hem beyaz), 1;0 (sadece siyah), 0;1 (sadece beyaz) ve 0;0 (ne beyaz ne de siyah) olmak üzere 4 seçenek doğar ve bu seçeneklerden birbirlerinden farklı -duruma göre bazen aynı kapıya çıkabilecek- 16 fonksiyon türer (Çizelge 10).

Şekil 3 için tartışılan durumlar nispi entropiye yönelik köşe hücrelerine verilecek değerler içinde geçerlidir.

Bu bağlamda önermeler aşağıda olduğu şekildedir.

Önerme 1 : mt_1 'in köşe değeri $\blacksquare D[p(mt_1) | |q(mt_2 + mt_3)]$ işleminin sonucudur (1;0)

Önerme 2 : mt_1 'in köşe değeri $\blacksquare D[p(mt_2 + mt_3) | |q(mt_1)]$ işleminin sonucudur (0;1)

Önerme 3 : mt_1 'in köşe değeri hem $\blacksquare D[p(mt_1) | |q(mt_2 + mt_3)]$ hem de $\blacksquare D[p(mt_2 + mt_3) | |q(mt_1)]$ işleminin sonucudur (1;1).

Önerme 4 : mt_1 'in köşe değeri ne $\blacksquare D[p(mt_1) | |q(mt_2 + mt_3)]$ ne de $\blacksquare D[p(mt_2 + mt_3) | |q(mt_1)]$ işleminin sonucu olmayıp, kendi haline göre yapılan işlemin $\blacksquare D[p(mt_1) | |q(mt_1)]$ (0;0) bir sonucudur, yani "0" dır.

Haliyle yukarıdaki önermelerden de 16 fonksiyon türemektedir (Çizelge 10).

Köşe hücrelerine yönelik ilk aşama veri atama sürecini açıkladığımız göre, yapay örnek için -her meta toplumun kendi haline ait nispi entropi değeri "0" olduğu bilgisine sahip olduğumuzdan-her meta toplumun kendi eş hücresi için iki ve toplamda altı adet nispi entropi değerini belirlersek, sonuçlar Çizelge 11'de gibi olur.

2.4. Fonksiyonlara yönelik açıklamalar

Çizelge da 10'daki önermelerimiz için 1=doğru, 0=yanlış anlamına gelmektedir. İşlem stratejimiz bu çizelge doğrultusunda gerçekleşecektir. Ancak çalışmamız doğrultusunda bu çizelgedeki bütün fonksiyonlar kullanılmayacaktır.

Şöyle ki;

Fonksiyon f_1 ve f_{16} sabitedir, bu fonksiyonlardan f_{16} tüm önermeleri yalanlamaktadır. Geriye kalan 15 fonksiyon içinde (1;1)=(1;0) \wedge (0;1) olduğundan $f_8 = f_{10}$ 'dur. Bundan dolayı bu iki fonksiyondan birini işleme almamak tercih edilebilir. Diyelim ki f_{10} 'u çıkarttık, bu durumda işlemlerimizin yol haritasını farklı alternatifleri içeren 14 fonksiyon ($f_1, f_2 \dots, f_9, f_{11}, f_{12} \dots, f_{15}$) tarafından gerçekleşecektir.

Çizelge 10. İki değişkenli Boolean model fonksiyonları

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Çizelge 11. Köşe hücrelerine yönelik nispi entropi hesapları

Köşe hücreleri için analizler	Köşe değerleri
$\blacksquare D[p(mt_1) q(mt_2 + mt_3)]$	0,285094
$\blacksquare D[p(mt_2 + mt_3) q(mt_1)]$	0,321653
$\blacksquare D[p(mt_2) q(mt_1 + mt_2)]$	0,426711
$\blacksquare D[p(mt_1 + mt_3) q(mt_2)]$	0,788137
$\blacksquare D[p(mt_3) q(mt_1 + mt_2)]$	0,096882
$\blacksquare D[p(mt_1 + mt_2) q(mt_3)]$	0,112362
$\blacksquare D[p(mt_1) q(mt_1)]$	0
$\blacksquare D[p(mt_2) q(mt_2)]$	0
$\blacksquare D[p(mt_3) q(mt_3)]$	0

O halde ilk iş, Çizelge 6'daki verileri alarak sadece köşe elemanları için belirlenmiş 3 farklı değer için (Çizelge 11) üç farklı matris oluşturmak olmalıdır. Bu matrisler Çizelge 12-14'de verilmiştir.

İkinci aşama, önce fonksiyon içi ve daha sonra fonksiyonlar arası işlemleri kapsamaktadır.

İşlemler bileşen oluşturmaya yönelik analitik süreçlerdir. Bunun için ideal analiz temel bileşenler analizi (TBA) olup, fonksiyon içi işlemler için öncelikle 1;1, 1;0, 0;1 ve 0;0 durumlarının TBA analizlerini gerçekleştirmemiz gerekmektedir.

3. Bulgular

1;0, 0;1 ve 0;0 önermelerinin TBA uygulamaları Çizelge 12, 13 ve 14'deki veriler ile gerçekleştirilmiş olup sonuçlar Çizelge 15, 16 ve 17'de verilmiştir. 1;1 önermesi ise 1;0 ve 0;1 önermelerinden çıkan TBA eksen değerlerinin TBA analizlerini içermektedir. 1;1 önermesi için 1;0 ve 0;1 önermelerinin TBA analizleri ile elde edilen eksen değerleri kullanılarak (hem eksen I ve hem de eksen II için) gerçekleştirilen TBA analizi sonuçları Çizelge 18'de verilmiştir.

Bütün sonuçları özetlersek tüm fonksiyonlara (14 fonksiyona) yönelik işlemler için hazırlanmış önermelerin değerleri Çizelge 19'daki gibidir.

Bu aşamadan sonra yapılacak işlemler sırası ile aşağıdaki gibidir.

1. Meta toplumların hem eksen I hem de eksen II verileri kullanılarak her bir fonksiyon için TBA uygulaması sonucu her bir fonksiyonun eksen I ve eksen II değerlerinin elde edilmesi
2. Fonksiyonların eksen I ve eksen II değerleri için TBA uygulamaları ve en son elde edilen eksen 1 ve eksen 2 değerlerini apsis-ordinat eksenine yerleştirilmesi ve işlemin sonlandırılması

Fonksiyonlara yönelik işlemler sonucu Eksen I ve Eksen II için elde edilen değerler Çizelge 20'de gösterilmiştir.

Çizelge 12. $\blacksquare D[p(mt_i) | |q(mt_{i\neq})]$ temelinde nispi entropiye yönelik değerlerin çapraz çizelgesi

	mt_1	mt_2	mt_3
mt_1	0,285094	0,990649	0,206959
mt_2	0,678692	0,426711	0,367572
mt_3	0,215027	0,702835	0,096882

Çizelge 13: $\blacksquare D[p(mt_{i\neq}) | |q(mt_i)]$ temelinde nispi entropiye yönelik değerlerin çapraz çizelgesi

	mt_1	mt_2	mt_3
mt_1	0,321653	0,990649	0,206959
mt_2	0,678692	0,788137	0,367572
mt_3	0,215027	0,702835	0,112362

Çizelge 14. $\blacksquare D[p(mt_i) | |q(mt_i)]$ temelinde nispi entropiye yönelik değerlerin çapraz çizelgesi

	mt_1	mt_2	mt_3
mt_1	0	0,990649	0,206959
mt_2	0,678692	0	0,367572
mt_3	0,215027	0,702835	0

Çizelge 15. 1;0 önermesinin TBA analizi sonuçları

		1;0	Eksen I	Eksen II	
Eksenler	Özdeğer	Varyans %	mt_1	-0,27459	0,13086
I	0,138849	86,5	mt_2	0,42417	0,02851
II	0,021669	13,5	mt_3	-0,14959	-0,15937

Çizelge 16. 0;1 önermesinin TBA analizi sonuçları

		0;1	Eksen I	Eksen II	
Eksenler	Özdeğer	Varyans %	mt_1	-0,08108	0,16611
I	0,075329	77,283	mt_2	0,30587	-0,04499
II	0,022143	22,717	mt_3	-0,22479	-0,12112

Çizelge 17. 0;0 önermesinin TBA analizi sonuçları

		0;0	Eksen I	Eksen II	
Eksenler	Özdeğer	Varyans %	mt_1	0,507	0,11639
I	0,394072	95,195	mt_2	-0,70215	0,040451
II	0,019891	4,8051	mt_3	0,19515	-0,15684

Çizelge 18. 1;1 önermesinin birinci ve ikinci eksene ait TBA analizinin ilk eksen sonuçları

Eksen I		Eksen II		
Eksenler	Özdeğer	Varyans %	mt_1	-0,27054
I	0,205187	95,802	mt_2	0,52295
II	0,008991	4,198	mt_3	-0,25241
Eksen II		Eksen II.I		
Eksenler	Özdeğer	Varyans %	mt_1	0,21013
I	0,075329	77,283	mt_2	-0,01196
II	0,022143	22,717	mt_3	-0,19817

Çizelge 19. Fonksiyonlara yönelik işlemler için temel veriler

Eksen	I	I	I	I
Önermeler	1;1	1;0	0;1	0;0
mt_1	-0,27054	-0,27459	-0,08108	0,507
mt_2	0,52295	0,42417	0,30587	-0,70215
mt_3	-0,25241	-0,14959	-0,22479	0,19515
Eksen	II	II	II	II
Önermeler	1;1	1;0	0;1	0;0
mt_1	0,21013	0,13086	0,16611	0,11639
mt_2	-0,01196	0,02851	-0,04499	0,040451
mt_3	-0,19817	-0,15937	-0,12112	-0,15684

Çizelge 20. Fonksiyonların I. ve II. eksen değerlerine yönelik TBA analizi sonuçları

Meta toplamlar	Eksen I			Eksen II		
	mt_1	mt_2	mt_3	mt_1	mt_2	mt_3
Fonksiyonlar						
f_1	-0,6292	1,0196	-0,39036	0,31818	0,002465	-0,32064
f_2	-0,3826	0,73956	-0,35696	0,29717	-0,01692	-0,28026
f_3	-0,63246	0,97269	-0,34023	0,2724	0,025771	-0,29818
f_4	-0,38333	0,67334	-0,29001	0,24705	0,006843	-0,25389
f_5	-0,5661	0,92716	-0,36106	0,29068	-0,01228	-0,2784
f_6	-0,27399	0,60582	-0,33183	0,26761	-0,03605	-0,23156
f_7	0,56976	-0,87533	0,30558	0,23923	0,012813	-0,25205
$f_8 = f_{10}$	-0,27054	0,52295	-0,25241	0,21013	-0,01196	-0,19817
f_9	0,57145	-0,87513	0,30368	0,23876	0,013771	-0,25253
f_{11}	0,57615	-0,8203	0,24415	1,2122	0,33976	-1,5519
f_{12}	-0,27459	0,42417	-0,14959	0,13086	0,02851	-0,15937
f_{13}	0,5012	-0,76545	0,26425	0,20074	-0,00507	-0,19568
f_{14}	-0,08108	0,30587	-0,22479	0,16611	-0,04499	-0,12112
f_{15}	0,507	-0,70215	0,19515	0,11639	0,040451	-0,15684

Fonksiyonların eksen I'e ait eksen I ve eksen II'e ait eksen I değerlerine yönelik TBA analizlerinin sonuçları Çizelge 21 ve Çizelge 22 gösterilmiştir.

Çizelge 21 ve Çizelge 22'deki eksen I değerlerinin grafiksel gösterimi Şekil 4'de gösterilmiştir.

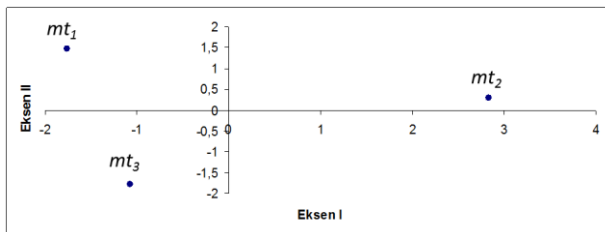
Çalışmada son olarak bahsi geçen yaklaşımla elde edilen bulguları farklı bir açıdan değerlendirmek için orijinal verilere Eğilimsiz Uyum Analizi (Detrended Correspondance Analysis: DCA) analizi de uygulanmıştır. Uygulanan DCA analizi sonucu elde edilen dört eksenin özdeğerleri sırası ile 0,6767; 0,05184; 0,01242 ve 0,006853 olarak bulunmuştur. DCA analizi sonuçlarının grafiksel gösterimi Şekil 5'de verilmiştir.

Çizelge 21. Fonksiyonların eksen I değerlerine uygulanan TBA sonuçları

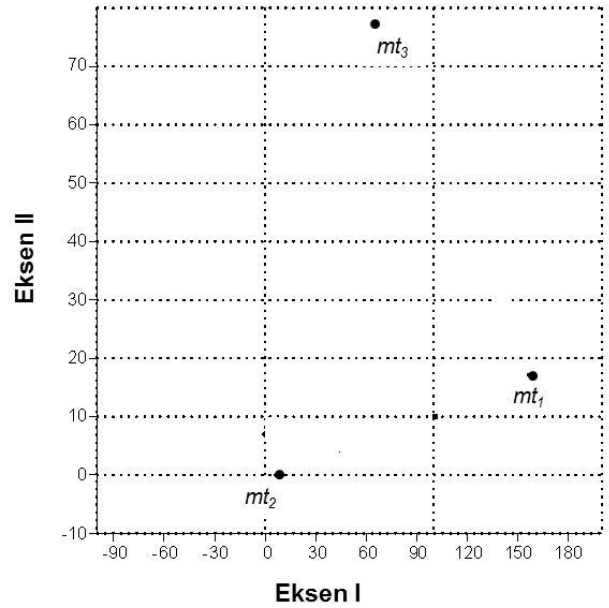
Eksen I	Özdeğer	Varyans %	Eksen II
1	6,14822	99,287	mt_1 -1,7592
2	0,044135	0,71273	mt_2 2,8359
			mt_3 -1,0767

Çizelge 22. Fonksiyonların eksen II değerlerine uygulanan TBA sonuçları

Eksen II	Özdeğer	Varyans %	Eksen II.I
1	2,7077	98,931	mt_1 1,4805
2	0,029268	1,0694	mt_2 0,29114
			mt_3 -1,7716



Şekil 4. Çizelge 21 ve Çizelge 22'deki Eksen I değerlerinin grafiksel gösterimi



Şekil 5. Orijinal verilere uygulanan DCA analizi sonuçları

4. Tartışma ve sonuçlar

Fonksiyonların eksen I ve eksen II değerlerine uygulanan TBA sonuçlarına göre, her iki eksenin eksen I'lerine ait varyans açıklama %'leri toplam varyansın % 98'lik kısmından daha fazlası açıklamaktadır (Çizelge 21 ve 22). İlk eksenlerin (Çizelge 15-Çizelge 18) tümünün açıklama paylarının % 77'in üstünde olması, Şekil 4 üstünde meta toplamların konumlanmasında ilk eksene odaklanacağımız anlamına gelmektedir.

Şekil 4'de Eksen I'e göre meta toplum sıralamasının soldan sağa sırası ile mt_1 , mt_3 ve mt_2 veya sağdan sola mt_2 , mt_3 ve mt_1 olduğu görülmektedir. Bu sıralama Çizelge 8'de meta toplum çiftleri arasında hesaplanan Öklid mesafe değerlerine ve Şekil 2'deki dendrogramlarda meta toplamların konumlanmaları ile de uyumludur.

Makalede bahsi geçen yaklaşımla elde edilen bulguları farklı bir açıdan değerlendirmek için canlı toplumların derecelenmesinde en fazla tercih edilen yöntemlerden biri olan DCA analizi (Hill ve Gauch, 1980; Peet vd., 1988; Ejrnaes, 2000; Pathak ve Baniya, 2017) uygulanmıştır. Uygulanan DCA analizi sonucu ilk eksenin ağırlık payının % 90'ın üstünde olduğu belirlenmiştir. Bu sonuç DCA

eksen değer çıktılarının yorumlamasının sadece ilk eksenle yapılmasının uygun olacağı anlamına gelmektedir. Şekil 6 incelenecek olur ise, sağdan sola sıralamanın mt_1 , mt_3 ve mt_2 şeklinde olduğu görülebilir. Bu sıralama mantıklı bir sıralamadır. Ancak mesafe değerleri itibariyle konumlanmalar şüphelidir. Çünkü meta toplumların birinci eksendeki değerleri mt_1 den mt_3 'e sırası ile 157; -9; 66 şeklindedir. Diğer bir değişle mt_3 'ün mt_2 ye mt_1 'den daha yakın durduğu görülmektedir. DCA uygulamasının ilk eksen sonuçları, bu makaledeki yaklaşımla elde edilen sonuçların aksine, Çizelge 8'deki sonuçlarla sıralama açısından olmasa da mesafe değerleri açısından bir çelişki göstermektedir.

Nispi entropi bilgi teorisinin temel entropik eşitliklerinden birisidir (Schumacher ve Westmoreland, 2002, Vedral, 2002; Cover ve Thomas, 1991). Bilgi teorisi içerisinde yer alan Shannon entropisi'nin çekirdek aile üyeleri olan marjinal entropi, koşullu entropi, ortak entropi ve birleşik entropi meta toplumların derecelenmesini onların içerdiği bitki tür sayısı ve oransal dağılımlara göre yapabilmektedir ve bu sayede farklı açılardan elde edilmiş entropik değerler üstünden toplumların çeşitliliğini birbirlerine göre derecelenmiş verilerle karşılaştırılabilmektedir (Özkan, 2016). Nispi entropi ise bize meta toplumların karakter özellikleri açısından değerlendirme yapma imkânı sunmakta, meta toplumlarının birbirlerine göre yapısal benzerlik veya benzeşmezliğini ve buna dayanarak birbirlerine göre mesafesini anlamamızı sağlamaktadır. Nispi entropi bu bağlamda geleneksel mesafe veya benzemezlik eşitliklerinden çok daha fazla avantaj sağlamaktadır. Geleneksel benzemezlik eşitlikleri kullanarak A ve B toplumu arasındaki benzemezlik değeri ile B ve A toplumu arasındaki benzemezlik değeri aynı değer olmaktadır. Nispi entropi de A'ya göre B'nin ve B'ye göre A'nın fark değeri bir entropik ölçüm olarak değişiklik göstermekte ve bu da bize nispi entropiyi kullanarak toplumları gruplandırma veya sıralama fırsatı vermektedir. Bu bağlamda nispi entropi, Boolean operatörleri ve TBA birlikteliği veya kısaca kodlarsak NBT ile toplumların birbirlerine göre derecelenmesi veya mesafe değerleri ile sıralanması mümkün olabilmektedir. Üstelik bu şekilde bir yaklaşım ile (bu makalede verilen hipotetik verilerin işlenmesi ile çıkan sonuçlar itibariyle) canlı toplumlarını derecelendirilmesinde DCA sonuçlarından bile daha iyi sonuçlar almak mümkün olabilmektedir. Elbette ki bu yaklaşımın kabul görebilmesi için onun farklı alanlarda ve farklı veri matrislerinde uygulanması ve sonuçlarının DCA sonuçları ile kıyaslanması ve değerlendirilmesi gerekmektedir. Bu sayede NBT yaklaşımının avantajları ve dezavantajları daha iyi anlaşılabilir ve hangi şartlarda daha etkin sonuçlar elde edilebileceği anlaşılabilir.

Açıklama

Yapılan bu çalışmada, daha önce Ecology Symposium 2017 de "Instead of $D[p(x) \parallel q(x)]$, $D_{\blacksquare}[p(x) \parallel q(x)]$ For a Character Based Gradient of Ecological Communities" başlığı ile sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

Kaynaklar

- Arpasi, J.P., 2003. A Brief intrduction of ternary logic. <http://www.docslides.com/luanne-stotts/a-brief-introduction-to-ternary>. Accessed: 07.09.2017
- Ben-Ari, M., 1993. Mathematical Logic for Computer Science. Third Edition, Springer London Heidelberg New York Dordrecht.
- Boc, A., Diallo A.B., Makarenkov, V., 2012. T-REX: a wep server for inferring validating and visualizing phylogenetic trees and networks. *Nucleic Acids Reseach*, 40: 573-579.
- Cover, T.M., Thomas, J.A., 1991. Elements of information theory. Wiley, Network., http://coltech.vnu.edu.vn/~thainp/books/Wiley_-_2006_Elements_of_Information_Theory_2nd_Ed.pdf; Erişim tarihi: 14.03.2016.
- Ejrnæs, R., 2000. Can we trust gradients extracted by detrended correspondence analysis? *Journal of Vegetation Science*, 11(4): 565-572.
- Hill, M.O., Gauch, H.G., 1980. Detrended correspondence analysis: An improved ordination technique. *Classification and ordination*. Springer, Dordrecht. pp. 47-58.
- Özkan, K., 2016. Application of information theory for an entropic gradient of ecological sites. *Entropy*, 18(10): 340.
- Pathak, R.P., Baniya, C.B., 2017. Species diversity and tree carbon stock pattern in a community-managed tropical shorea forest in Nawalparasi, Nepal. *International Journal of Ecology and Environmental Sciences*, 42(5): 3-17.
- Peet, R.K., Knox, R.G., Case, J.S., Allen, R., 1988. Putting things in order: The advantages of detrended correspondence analysis. *The American Naturalist*, 131(6): 924-934.
- Schumacher, B., Westmoreland, M.D., 2002. Relative entropy in quantum information theory. *Contemporary Mathematics*, 305, 265-290.
- Vedral, V., 2002. The role of relative entropy in quantum information theory. *Reviews of Modern Physics*, 74(1): 197.