

Toros göknarında gövde çapı modelinin doğrusal olmayan karışık etkili modelleme yaklaşımı ile geliştirilmesi

Ramazan Özçelik^{a,*}, Emine Yiğit^b

Özet: Bu çalışmada, doğal Toros göknarı (*Abies cilicica* Carr.) meşcereleri için karışık etkili modelleme tekniği ile Max ve Burkhart parçalı gövde çapı modeli kullanılarak gövde formundaki birey içi ve bireyler arası değişkenlikler ortaya konmuştur. Bu amaçla 327 örnek ağaç ölçülerek, rasgele yöntemle iki gruba ayrılmış ve 203 adet örnek ağaç (%60) model geliştirmek için, geri kalan 124 adet (%40) ağaç ise geliştirilen modelin test edilmesi amacıyla kullanılmıştır. Model ölçüt değerlerine göre, en başarılı tesadüfi etkili parametre kombinasyonu olarak β_1 , β_3 , β_4 bulunmuştur. Modele tesadüfi etkilerin eklenmesi, hata korelasyonunu tamamen ortadan kaldırmamıştır. Hatalar arasındaki ağaç içi ve ağaçlar arası varyans ve otokorelasyon için modele sırasıyla bir hata varyans fonksiyonu ve otoregresif hata yapısı eklenmiştir. Bu işlem sonucunda, hata korelasyonu hemen hemen ortadan kalkmıştır. Diğer yandan, yeni bir ağaç için modelin kalibrasyonu amacıyla uygun bir Bayesian tahmincisi yardımı ile tesadüfi etkileri tahmin etmek amacıyla ekstra çap ölçümleri kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar test verileri ile denetlenmiştir. Ölçüt değerleri (ortalama hata, tutarlılık ve RMSE), ekstra çap ölçümleri ile tesadüfi etkilerin tahmini sonucunda, özellikle gövdenin ilk yarısındaki çap tahminlerinin oldukça başarılı olduğunu göstermiştir. Çalışmanın sonuçları, kalibrasyon için tek ve iki çap ölçümü arasında önemli farklılıkların olmadığını da ortaya koymuştur. Bu çalışmada kullanılan yöntem, doğal Toros göknarı meşcerelerinde uygulanacak farklı yönetim stratejileri ve farklı yetiştirme ortamlarındaki ağaçlar için gövde formundaki değişimin ortaya konması amacıyla kullanılabilir. Diğer yandan, bu çalışmanın sonuçları, karışık etkili modelleme tekniğinin, çap tahminleri için gövde çapı modellerinin etkinliğini ve esnekliğini artırdığı yönündeki bulguları destekler niteliktedir.

Anahtar kelimeler: Gövde çapı modeli, Tesadüfi parametre, Hata varyansı, Kalibrasyon

Developent of stem taper equation using nonlinear mixed-effects modeling approach for Taurus fir

Abstract: The Max and Burkhart segmented taper equation was fitted using nonlinear mixed-effects modeling techniques to account for within- and between-individual variation in Taurus fir (*Abies cilicica* Carr.) stem profiles. Totally 327 sample trees measured and about 60% (203 trees) of the trees were randomly selected for model development and the reminder 40% (124 trees) of the trees used for model validation. Based on goodness-of-fit criteria, the model including three random-effects parameters β_1 , β_3 , and β_4 was the best. An error variance function and a continuous auto correlation structure incorporated in model to within and between-tree residual variances and spatial autocorrelation between residuals. However, most of the residual autocorrelation was accounted for by including random effects. Upper stem diameter measurements were used to estimate random effects parameters using an approximate Bayesian estimator, which localized stem profile curves for individual trees. The procedure was tested with a validation data set. The goodness-of-fit statistics (Bias, precision, and RMSE) showed that upper stem diameter measurements and subsequent estimates of random effects improved the predictive capability of the taper equation mainly in the lower portion of the bole. Accordingly results of this research, there is no big differences between one and two additional upper stem diameter measurements for predictive capability of model. The method can localize stem curves for trees growing under different site and management conditions in natural Taurus fir stands. The results of this study support previous findings that mixed-effect modeling approach increases flexibility and efficiency of taper equations for upper stem diameter prediction.

Keywords: Stem diameter model, Random parameter, Residual variance, Calibration

1. Giriş

Ağaç ve meşcere hacim tahminleri, büyüme ve hasılat modellerinin en önemli yapı taşlarından birisidir. Bu nedenle, değişik yararlanma alternatifleri ve yönetim uygulamaları için tek ağaç hacminin en doğru şekilde belirlenmesine imkân sağlayan esnek ve güvenilir hacim tahmin metodlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Ağaç

hacimlerinin doğru tahmini için var olan yöntemler arasında en etkin ve çok yönlü yaklaşım tarzının gövde çapı modelleri olduğu ifade edilmektedir (Jiang vd., 2005; Scolforo vd., 2018).

Gövde çapı modelleri, hem gövde formunun tanımlanmasında, hem de gövdenin herhangi bir noktasındaki çapın, toplam ağaç hacminin, ticari hacmin ya da herhangi bir sınır çap değeri için ticari boyun ve herhangi

✉ ^a Isparta Uygulamalı Bilimler Üniversitesi, Orman Fakültesi, Orman Mühendisliği Bölümü, 32260, Isparta

^b Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Orman Mühendisliği Anabilim Dalı 32260, Isparta

@ * **Corresponding author** (İletişim yazarı): ramazanozcelik@orman.sdu.edu.tr

✓ **Received** (Geliş tarihi): 16.02.2018, **Accepted** (Kabul tarihi): 12.03.2018



Citation (Atıf): Özçelik, R., Yiğit, E., 2018. Toros göknarında gövde çapı modelinin doğrusal olmayan karışık etkili modelleme yaklaşımı ile geliştirilmesi. Turkish Journal of Forestry, 19(2): 138-148. DOI: [10.18182/tjf.395649](https://doi.org/10.18182/tjf.395649)

iki nokta arasındaki tomruk hacimlerinin tahmininde kullanılmaktadır (Yang vd., 2009a; Arias-Rodil vd., 2015a; Tang vd., 2016). Gövde çapı modellerinin ormancılık uygulamaları için diğer bir önemi de, büyüme ve hasılat modellerine entegre edilebilmesi, farklı yetiştirme ortamları ve farklı planlama alternatiflerinden elde edilecek ürün sınıflarının ve miktarlarının tahminine imkan sağlamasıdır (de-Miguel vd., 2012).

Yüzyılı aşkın bir süredir bir ağacın gövde formunun tanımlanması ve dolayısıyla gövde üzerindeki herhangi bir noktadaki çap değerinin tahmin edilmesi amacıyla çok farklı matematiksel formlarda gövde çapı modelleri geliştirilmiştir (Clark vd., 1991; Fang vd., 2000; Bi, 2000; Kozak 1988; Kozak 2004; Sharma ve Oderwald, 2001; Sharma ve Burkhart, 2003; Lee vd., 2003; Trincado ve Burkhart, 2006; Yang vd., 2009a; Yang vd., 2009b; Gomez-Garcia vd., 2013; Arias-Rodil vd., 2015b; Sabatia ve Burkhart, 2015; Arias-Rodil vd., 2017; Özçelik ve Cao, 2017). Newnham (1988)'e göre gövde çapı modelleri üzerindeki çalışmaların halen sürmesinin iki önemli nedeni vardır. Bunlardan birincisi; tüm ağaç türleri için gövde formundaki değişimi açıklamaya yetecek bir teorinin bulunmaması; ikincisi de sürekli değişen pazar koşullarına bağlı olarak değişen odun çeşidi standartlarını dikkate alan bir yöntemin elde edilememesidir.

Ormancılık çalışmalarında iki grup gövde çapı modelinin başarı ile kullanıldığı belirtilmektedir (Li vd., 2012). Bunlardan ilki değişken şekil çap modelleridir. Bu modellerde, bir ağaç gövdesinin, dipten tepeye doğru nayloid, paraboloid ve konik gövde şekline sahip parçalardan oluştuğu düşünülmektedir (Newnham, 1988; Kozak, 1988). Ancak bu model formunun bazı dezavantajları da bulunmaktadır. Bunlar; gövde üzerindeki farklı şekillerin hacim hesaplamaları için birleştirilememesi ve en yüksekteki çap değeri için ticari boyun doğrudan hesaplanamayıp, bir iterasyon ile hesaplanmasının gerekli olmasıdır (Dieguez-Aranda vd., 2006). İkinci grup ise; parçalı-gövde çapı (Segmented-polynomial) modelleridir. Bu modeller farklı ağaç bölümlerinin çap düşüşlerini farklı denklem formları kullanılarak tanımlamaktadır (Max ve Burkhart, 1976; Parresol vd., 1987; Clark vd., 1991; Fang vd., 2000; Jiang vd., 2005). Bu gövde çapı modellerinin diğer gövde çapı modellerine göre en önemli üstünlüğü, gövde çapı modellerinin hacim hesaplamaları için kolaylıkla hacim denklemlerine dönüştürülebilir olmasıdır (Fang vd., 2000; Dieguez-Aranda vd., 2006; Özçelik ve Crecente-Campo, 2016).

Gövde çapı modellerinin geliştirilmesi amacıyla genellikle doğrusal olmayan en küçük kareler (OLS) yöntemi kullanılmıştır (Yang vd., 2009b). Ancak, bu modellerin geliştirilmesinde kullanılan veriler, aynı ağaç üzerinde düzenli ya da düzensiz aralıklarla ölçülen çap değerlerinden oluşmaktadır. Bunun sonucu olarak da, ölçüm değerleri birbiri ile ilişkili olmaktadır. Bu ilişki regresyondaki kovaryans matrisinin yansız tahmini için gerekli olan hataların bağımsız olma kuralını ortadan kaldırmaktadır. Bu nedenle, araştırma çalışmaları hem yeni model formlarının geliştirilmesine, hem de gövde formundaki ağaçlar arası değişkenliğin hesaplanmasına ilişkin yeni yaklaşımlara odaklanmıştır. Bu amaçla son yıllarda, gövde çapı modellerinin geliştirilmesinde doğrusal olmayan karışık etkili modelleme (NLME) yaklaşımı kullanılmaya başlanmıştır (Gregoire ve Schabenberger, 1996;

Fang ve Bailey, 2001; Trincado ve Burkhart, 2006; Yang vd., 2009a; Bueno-Lopez ve Bevilacqua, 2012; Gomez-Garcia vd., 2013; Arias-Rodil vd., 2015a; Gomez-Garcia vd., 2016; Scolforo vd., 2018). Bu yaklaşım ile çoklu hiyerarşik yapı gösteren veri seti içerisindeki bireylerin kendi içindeki ve aralarındaki ilişkili hatalar ve heterojen varyans modellenebilmektedir. Doğrusal olmayan karışık modellerin hem sabit etkili hem de tesadüfi etkili parametreleri içermesi nedeniyle, toplam varyasyon birey içi ve bireyler arası olmak üzere ikiye bölünmekte ve otokorelasyon probleminin en azından kısmen modellenmesi mümkün olabilmektedir (Trincado ve Burkhart, 2006). Yine bu modeller, kovaryans yapısı ve varyans fonksiyonu ile hata varyansı ve birey içi ve arası korelasyonu doğrudan modelleyebilmektedir (Yang vd., 2009b). Yine bu modelleme yaklaşımıyla, sabit (fixed) ve tesadüfi (random) etkili parametreler eş zamanlı tahmin edebilmektedir. Bu özellik, karışık etkili modellemeyi yeni bir birey için tahmin yapılması gerekli olduğunda ve bu bireye ilişkin bir ön bilginin bulunması durumunda diğer modellere göre daha etkili yapmaktadır. Bu durumda, ön bilgi, yeni birey için tesadüfi değişkenin tahmin edilmesi için kullanılmakta ve modelin kalibresini mümkün kılmaktadır (Garber ve Maguire, 2003). Burkhart ve Tome (2012) tarafından da belirtildiği gibi, karışık etkili modelleme tekniğinin geleneksel regresyon denklemlerine üstünlüğü; modelin yapısında sabit ve tesadüfi etkili parametreleri birlikte bulundurma ve ilişkili verilerin varyans-kovaryans matrislerinin modellenmesine izin vermesidir. Bu nedenle karışık etkili modelleme yaklaşımı, ağaçlar arası ve ağaçlar içi varyasyonu daha iyi açıklayabilmekte ve modelin sabit etkili parametrelerinin yansız ve doğru tahminine imkân sağlamaktadır.

Yapılan çalışmalar, NLME tekniği kullanılarak veri yapısında bulunan otokorelasyon probleminin tamamen ortadan kaldırılması ve hata varyansı dağılımının homojen olması ile ilgili sonuçların değişken olduğunu göstermektedir. Örneğin, Sharma ve Parton (2009) ve Lejeune vd (2009), otokorelasyon probleminin tamamen ya da kısmen ortadan kaldırılabilmesi için NLME tekniğinin yeterli olacağını ifade etmekte ise de; Garber ve Maguire (2003), Trincado ve Burkhart (2006), Yang vd., (2009b), Li ve Weiskittel, (2010) ve Özçelik vd. (2011) tarafından yapılan çalışmalarda ise bu sorunların tamamen ortadan kaldırılabilmesi için modele bir varyans fonksiyonu ya da otoregresif hata yapısı bileşeninin eklenmesini önermektedir. West (1984) tarafından da belirtildiği gibi, otokorelasyonun hesaplanması modelin tahmin kapasitesini düzeltmemekte, fakat uygun istatistiksel yöntemler yardımı ile parametrelerin kovaryans matrisinin tahmininde yapılabilecek hataları önlemektedir. Diğer yandan Yang vd. (2009a) ve Gomez-Garcia vd. (2013) tarafından da belirtildiği gibi, otokorelasyon parametreleri aynı ağaç üzerinde farklı boylardaki birkaç çap değeri kullanılarak yapılan kalibrasyon işlemi uygulanmadıkça pratik amaçlarla ya da uygulamada kullanılmamaktadır.

Bu çalışmada, Max ve Burkhart (1976)'ın parçalı gövde çapı modeli kullanılarak, doğal Toros göknarı (*Abies cilicica* Car.)'nın gövde formundaki birey içi ve bireyler arası değişkenliklerin ortaya koymak amacıyla doğrusal olmayan karışık etkili gövde çapı modeli geliştirilmiştir. Bu amaçla, sırasıyla 1) hangi parametrelerin tesadüfi etkiler ile genişletilmesi gerektiği araştırılmış, 2) tesadüfi etkili

parametrelerin eklenmesi ile otokorelasyon probleminin ortadan kalkıp kalkmadığı araştırılmış, eğer otokorelasyon problemi devam ediyor ise modele iki farklı varyans fonksiyonu ve birinci derece otoregresif kovaryans yapısı CAR(1) eklenerek durum değerlendirilmiş, 3) bir ve iki ekstra çap ölçümü için farklı kalibrasyon alternatifleri üç farklı ölçüt değerine göre test edilmiştir.

2. Materyal ve yöntem

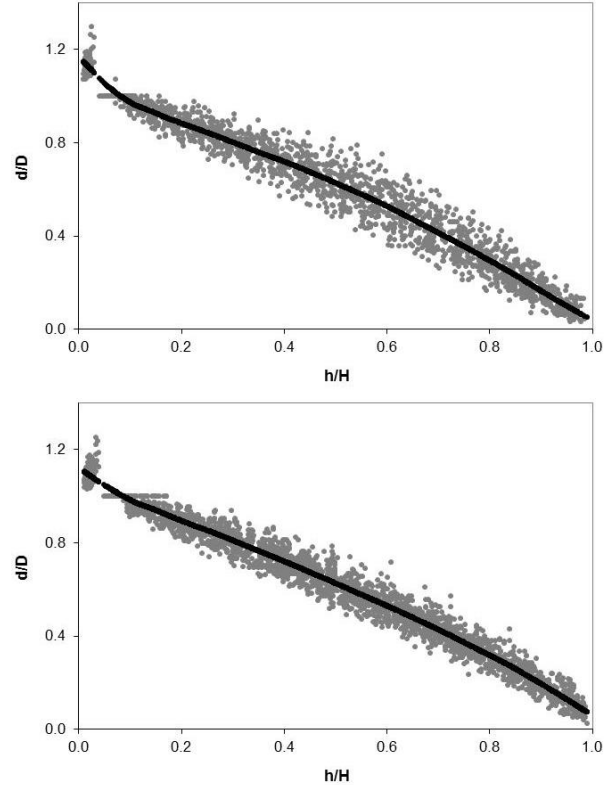
2.1. Materyal

Gövde çapı denklemi geliştirmek amacıyla gerekli örnek ağaç verileri, Akdeniz Bölgesinde Toros göknarının yayılış gösterdiği Akseki, Bucak ve Anamur Orman İşletme Müdürlüklerindeki doğal ve saf göknar meşcerelerinden toplanmıştır. Örnek ağaçlar, çalışma alanı içerisindeki mevcut tüm çap ve boy sınıflarını temsil edebilmesi amacıyla, galip ya da müşterek galip ağaçlar arasından seçilmiştir. Örnek ağaçlar seçilirken çatal gövdelerin, tepesi kırık ağaçların, azman yapmış ve gövde formu bozuk bireylerin seçilmemesine özen gösterilmiştir. Belirlenen örnek ağaçların, kesilmeden önce elektronik çap ölçer yardımı ile göğüs çapları ve kesildikten sonra her ağaç üzerinde şerit metre yardımı ile birer metre aralıkla ve 0.1 cm hassasiyetle çap değerleri ve 5 cm hassasiyetle ağaç boyları ölçülmüştür. Çalışma kapsamında 327 adet örnek ağaç ölçülmüş ve bu veri rastgele yöntemle iki gruba ayrılmıştır. Toplam verinin yaklaşık %60'ını oluşturan 203 örnek ağaç model geliştirmek, geri kalan yaklaşık %40'lık kısım (124 ağaç) ise geliştirilen modellerin test edilmesi amacıyla kullanılmıştır. Şekil 1'de model geliştirmek ve geliştirilen modellerin test edilmesi amacıyla kullanılan verilere ilişkin nispi çap-boy ilişkisi verilmiştir. Örnek ağaç hacimlerinin belirlenmesi amacıyla, Smalian Yöntemi kullanılmıştır. Uç parça hacminin bulunmasında ise koni hacmi esas alınmıştır. Çizelge 1'de, bu örnek ağaçlara ilişkin nitelendirici istatistikler verilmiştir.

Çizelge 1. Toros göknarı için gövde çap modelinin geliştirilmesi ve test edilmesi amacıyla ölçülen örnek ağaç değişkenlerine ilişkin nitelendirici istatistikler.

Data	Ortalama	S.D.	Minimum	Maksimum
Model geliştirme verisi (n = 203 ağaç)				
<i>D</i>	36.14	11.16	14.00	60.00
<i>H</i>	16.56	4.05	7.60	26.30
<i>d</i>	21.97	12.41	1.00	64.00
<i>h</i>	8.15	5.34	0.30	25.30
<i>V</i>	0.86	0.62	0.07	2.60
Test verisi (n = 124 ağaç)				
<i>D</i>	31.47	10.14	12.00	64.00
<i>H</i>	18.31	4.24	9.70	31.40
<i>d</i>	19.21	11.32	1.00	70.00
<i>h</i>	8.87	5.75	0.30	30.30
<i>V</i>	1.29	0.94	0.18	4.18

D: kabuklu göğüs çapı (cm); *H*: toplam ağaç boyu (m); *d*: *h* (m) yüksekliğindeki kabuklu gövde çapı (cm); *h*: ilgilenilen noktanın yerden yüksekliği; *V*: kabuklu gövde hacmi (m³); *S.D.*: Standart sapma



Şekil 1. Toros göknarı için model geliştirme ve test amacıyla kullanılan ağaçların nispi çap-nispi boy ilişkisi a) model geliştirme verileri, b) model test verileri (*d*: gövde çapları, *D*: göğüs çapı, *h*: çap ölçüm yüksekliği, *H*: ağaç boyu, *d/D*: nispi çap, *h/H*: nispi boy)

2.2. Yöntem

2.2.1. Model seçimi

Bu çalışmada, farklı ağaç türleri için pek çok çalışmada başarılı sonuçlar vermesi (Jiang vd., 2005; Trincado ve Burkhart, 2006; Dieguez-Aranda vd., 2006; Özçelik vd., 2011; Özçelik ve Crecente-Campo 2016) ve modelin hacim hesaplamaları için kolaylıkla hacim denklemlerine dönüştürülebilir olması nedeniyle Max ve Burkhart (1976) tarafından önerilen parçalı gövde çapı modelinin kullanılmasına karar verilmiştir. Bu model, bir ağaç gövde formunu tanımlamak için, gövdenin alt bölümünü nayloid, orta kısmını kesik paraboloid ve üst kısmını da koni olarak kabul etmekte ve gövdenin bu farklı şekillerdeki kısımlarını birleştirmek için de iki katılma noktası kullanılmaktadır.

Bu çalışmada daha önceki çalışmalarla (Fang ve Bailey, 2001) uyumu sürdürebilmek için Davidian ve Giltinan (1995) tarafından tanıtılana benzer bir yaklaşım ile gövde çapı modeli geliştirilmiştir. Bu kapsamda, birey içi ve bireyler arası değişkenliği tam olarak açıklayabilmek için doğrusal olmayan karışık etkili bir model iki aşamalı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

1. Aşama: Ağaç içi varyasyon

i. birey için gövde üzerinde ölçülen *j*. nispi çap ölçümü (y_{ij}) ile ilişkili tesadüfi ve sistematik varyasyonu temsil edecek şekilde Max ve Burkhart (1976) tarafından geliştirilen gövde çapı modeli, Lindstrom ve Bates (1990)

ve Pinheiro ve Bates (2000)'e göre aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Model 1).

$$y_{ij} = \beta_{1i}(x_{ij} - 1) + \beta_{2i}(x_{ij}^2 - 1) + \beta_{3i}(\alpha_{1i} - x_{ij})^2 I_1 + \beta_{4i}(\alpha_{2i} - x_{ij})^2 I_2 + e_{ij} \quad (1)$$

$I_m = 1$ if $(\alpha_{mi} - x) \geq 0$, aksi takdirde $(m = 1, 2)$,

$$\text{Burada, } y_{ij} = \frac{d_{ij}^2}{D_i^2}, \quad x_{ij} = \frac{h_{ij}}{H_i}, \quad D_i = \text{dbh (cm) } i.$$

ağaç için 1.30 m yüksekliğinden ölçülen göğüs çapını, $H_i = i$. ağaç için toplam ağaç boyunu; $d_i = i$. ağaç için h_{ij} yüksekliğindeki kabuklu çapı (cm), $h_{ij} = i$. ağaç için yerden yüksekliği, $\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}, \alpha_{1i}, \alpha_{2i} =$ tahmin edilen parametreleri; $e_{ij} = E(e_{ij} | \beta_i) = 0$ ile hata terimini ifade etmektedir. Son ifadedeki β_i ise; i . birey için $(r \times 1)$ boyutlarındaki parametre vektörünü ifade etmektedir.

Genel olarak gövde çapı modellerinin geliştirilmesi amacıyla bir ağaç gövdesi üzerinde toplanan veriler, hiyerarşik, dengesiz ve tekrarlı ölçüm niteliğindedir. Bu nedenle, i . ağaç için y_{ij} sonuçları $[y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in_i}]^T$ şeklindeki bir vektör içinde birleştirilebilir ve daha genel bir model aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Model 2):

$$y_i = \beta_{1i}(x_i - 1) + \beta_{2i}(x_i^2 - 1) + \beta_{3i}(\alpha_{1i} - x_i)^2 I_1 + \beta_{4i}(\alpha_{2i} - x_i)^2 I_2 + e_i \quad (2)$$

Burada verilen β_i e_i 'nin koşullu dağılımının $E(e_i | \beta_i) = 0$ ve $R_i(\beta_i, \xi)$ ile çok değişkenli normal dağıldığı kabul edilmektedir. Vektör ξ ise tüm bireyler için genel $[\sigma, \theta', \rho']^T$ bilinmeyen parametreler vektörünü temsil etmektedir. Bu özel model yapısı altında, birey içi sistematik varyasyon, hata terimi dağılımının tesadüfi dağıldığı varsayımı ile $f(\cdot)$ şeklindeki doğrusal olmayan bir fonksiyonla ifade edilebilir. Hata teriminin varyans-kovaryans matrisi birey içi korelasyon (otokorelasyon) ve birey içi varyansı hesaplamak için daha genel bir forma dönüştürülebilir (Trincado ve Burkhardt, 2006):

$$R_i(\beta_i, \xi) = \sigma^2 G_i^{1/2}(\beta_i, \theta) \Gamma_i(\rho) G_i^{1/2}(\beta_i, \theta), \quad (3)$$

Burada $G_i^{1/2}(\beta_i, \theta)$ birey içi varyansı karakterize eden $(n_i \times n_i)$ boyutlarındaki çapraz matrisi, $\Gamma_i(\rho)$, i . bireyin ölçümlerindeki korelasyon desenini tanımlayan $(n_i \times n_i)$ boyutlarındaki matrisi tanımlamaktadır. Eğer birey içi varyans homojen ve hataların ilişkisiz olduğu kabul edilirse, bu matris aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$R_i(\beta_i, \xi) = \sigma^2 I_{n_i} \quad (4)$$

Burada I_{n_i} , $(n_i \times n_i)$ boyutlarındaki tanım matrisidir. Bununla birlikte, bu çalışmada daha genel bir hata yapısı araştırılacağından, hatalar arası korelasyon ve birey içi ve arası heterojen varyansın etkisi birleştirilecektir. Bireyler arası ve bireyler içi heterojen hata varyansının varlığı farklı varyans fonksiyonları kullanılarak değerlendirilecektir. Bu amaçla yapılan bir ön değerlendirme sonucu, sonraki aşamalarda kullanmak ve bunların modele eklenmesinin ortaya koyacağı sonuçları görmek için iki varyans

fonksiyonu seçilmiştir. Bu iki varyans fonksiyonu denklem (5) ve (6)'daki gibi ifade edilebilir:

$$g(\theta, x_{ij}) = \exp(\theta_1 x_{ij}), \quad e_{ij} \sim N(0, \exp(\theta_1 x_{ij})) \quad (5)$$

$$g(\theta, x_{ij}) = D_i^{\theta_0} \exp(\theta_1 x_{ij}), \quad e_{ij} \sim N(0, D_i^{\theta_0} \exp(\theta_1 x_{ij})) \quad (6)$$

(5) nolu varyans fonksiyonu nisbi boyun bir fonksiyonu olarak ağaç içi ve ağaçlar arası varyansı heterojen kabul etmektedir. Diğer yandan (6) nolu varyans fonksiyonu ise, Valentine ve Gregoire (2001)'deki yaklaşıma benzer olarak göğüs çapı ve nisbi boyun bir fonksiyonu olarak ağaçlar arası ve ağaç içi varyansı heterojen kabul etmektedir. Çalışmada en uygun varyans fonksiyonuna karar verildikten sonra modele otoregresif hata yapısı (CAR(1)) eklenmiştir. Model varyans fonksiyonunun eklenmesinin istatistiksel önemi ve otokorelasyon yapısı olasılık oranı testi (LRT) ile değerlendirilmiştir (Pinheiro ve Bates, 2000).

II. Aşama: Ağaçlar arası varyasyon

Ağaçlar arası varyasyon için parametre vektörü β_i hesaplanmalıdır. Çünkü parametre vektörü β_i , bireyden bireye değişmektedir. Parametre vektöründeki sistematik ve tesadüfi değişim aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\beta_i = A_i \beta + \beta_i b_i \quad b_i \sim N(0, D) \quad (7)$$

Burada, A_i , sabit etkiler için $(r \times p)$ boyutlarında, β_i , tesadüfi etkiler için $(r \times q)$ boyutlarındaki dizayn matrislerini ve β , $(p \times 1)$ boyutunda sabit toplum parametreleri vektörünü ifade etmektedir. b_i , $E(b_i) = 0$ ve \mathbf{D} varyans-kovaryans yapısı ile çok değişkenli normal dağıldığı kabul edilen ve i . bireyle ilişkili $(q \times 1)$ boyutundaki tesadüfi etkiler vektörüdür. Bütün parametrelerin sabit ve tesadüfi etkilere sahip olması durumunda $(r = p = q = 6)$ dizayn matrisleri A_i ve β_i , tanım matrisi I_6 (6×6) 'ya eşit olmaktadır. Bu nedenle, i . birey için β_i parametreler vektörü aşağıdaki formu alır:

$$\beta_i = I_6 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + I_6 \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \\ b_{4i} \\ a_{1i} \\ a_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta_1 + b_{1i}) \\ (\beta_2 + b_{2i}) \\ (\beta_3 + b_{3i}) \\ (\beta_4 + b_{4i}) \\ (\alpha_1 + a_{1i}) \\ (\alpha_2 + a_{2i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1i} \\ \beta_{2i} \\ \beta_{3i} \\ \beta_{4i} \\ \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Karışık etkili bir modelin geliştirilmesinde en önemli soru: modeldeki hangi parametreler sabit etkili hangi parametreler karışık etkili (hem sabit hem de tesadüfi etkili) olmalıdır. Bu sorunun cevabı için farklı yaklaşımlar önerilmiştir. Bunlardan birincisi; modeli her birey için bağımsız olarak çözmektir (Fang ve Bailey, 2001). Bunun gerçekleştirilebilmesi için her birey üzerinde yeterli ölçümün bulunması gereklidir, ancak bu çoğunlukla mümkün değildir. İkincisi; gövde çapı modelinin bazı parametre değerlerindeki varyasyon ile gövde formundaki varyasyonun nasıl değiştiğinin araştırılmasıdır. Ancak bu yöntemde, ağaçlar arasındaki yüksek parametre değişkenliği ile ağaç gövde formundaki değişkenliğin ilişkili

olmayabileceği görüşü nedeniyle önerilmemektedir. Üçüncüsü ise; sabit ve tesadüfi etkili farklı parametre kombinasyonlarını deneyerek, en başarılı olan kombinasyonu seçmek şeklindedir (Arias-Rodil vd., 2015b). Bu çalışmada, farklı tesadüfi etkili parametre kombinasyonları denenmiş, Sharma ve Burkhart (2003), Leites ve Robinson (2004) ve Trincado ve Burkhart (2006)'ın sonuçları da dikkate alınarak (1) nolu denklemin üç parçasının eğimleri ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ve β_4)'nin tesadüfi etkili kombinasyonları test edilmiştir. Tesadüfi etkiler için **D** varyans-kovaryans matrisi yapılandırılmamış kabul edilmiştir (Schabenberger ve Pierce, 2001).

En başarılı kombinasyona karar vermek için Akaike'nin Bilgi Kriteri (AIC, Akaike, 1974) ve negatif iki kez logaritmik olabilirlik fonksiyonu ($-2\ln(L)$) kullanılmıştır.

$$AIC = -2\ln(L) + 2\lambda \quad (9)$$

$$-2LL = -2\ln(L) \quad (10)$$

Burada, L = Maksimum likelihood fonksiyonu ve λ = parametre sayısını ifade etmektedir. AIC ve $-2LL$ farklı modellerin güvenilirliğinin karşılaştırılmasında yaygın olarak kullanılan birer ölçüt değeridir. AIC ve $-2LL$ ölçütlerine göre, en küçük değerlere sahip kombinasyon en başarılı kombinasyon olarak kabul edilmiştir.

Çalışmada, parametre tahminleri ve hata varyans-kovaryans matrisinin ardışık analizleri *SAS NLINMIX* makrosu kullanılarak yapılmıştır. Varyans bileşenleri maksimum olasılık (*ML*) fonksiyonu ile tahmin edilmiştir. Tüm karışık etkili modeller için (4) nolu matrise benzer olarak, birey içi hataların sabit varyansa ve ilişkisiz hatalara sahip olduğunu kabul edilmiştir. En başarılı modele karar verdikten sonra, model hatalarındaki otokorelasyon ve varyans heterojenliğinin etkisi ilave analizlerle araştırılmıştır.

2.2.2. Model kalibrasyonu

2.2.2.1. Topluma özgü yanıtlar

Eğer k . yeni bireyden bir gözlem mevcut değil ise, topluma özgü yanıtlar ağaç gövde çapı tahminleri için kullanılabilir. Bu çalışmada var olan gözlemler, dikili bir ağaçta göğüs çapı dışındaki çap ölçümleridir. Böyle bir durumda denklem (7)'den gelen $\beta_k = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \alpha_1, \alpha_2]^T$ şeklindeki parametre vektörü tanımlanır. Burada, k . ağaç için b_k tesadüfi etkiler vektörünün beklenen $E(b_k) = 0$ değerine sahip olduğu kabul edilir.

2.2.2.2 Konu ağaca özgü yanıtlar

k . yeni bir ağaç için düzeltilmiş ya da kalibre edilmiş yanıtlar, o ağaç için diğer ekstra çap ölçümleri mevcut olduğu zaman mümkündür. Bu ilave bilgiler b_k random etkiler vektörünün tahmin edilmesi için kullanılmaktadır. Bu hesaplama b_k 'nın uygun Bayes tahmincisi kullanılarak yapılmaktadır. Detaylar için Vonesh ve Chinchilli (1997)'ye bakılabilir.

$$\hat{b}_k \cong D\hat{Z}_k' [\hat{Z}_k D\hat{Z}_k' + R_k]^{-1} \hat{e}_k \quad (11)$$

Burada **D** ve R_k sırasıyla tesadüfi etkiler ve hatalar için varyans-kovaryans matrisleridir. İlave olarak, tesadüfi etkiler vektörünün tahmini Z_k ve \hat{e}_k 'nin tahminlerini gerektirmektedir. Bu iki değer aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\hat{Z}_k = \frac{\partial f(A_k \beta, x_k)}{\partial \beta_k} \Big|_{\beta = \hat{\beta}} \cdot \beta_k \quad (12)$$

$$\hat{e}_k = y_k - f(A_k \beta, x_k) \quad (13)$$

Kısmi türev matrisi ise ($n_k \times 6$) boyutlarında bir matris ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\frac{\partial f(A_k \beta, x_k)}{\partial \beta_k} \Big|_{\beta = \hat{\beta}} \quad (14)$$

Burada, n_k kalibrasyon için k . ağaçtan alınan ekstra çap ölçümlerinin ve sütun sayısı ise modelin içerdiği sabit etkili parametre sayısını temsil etmektedir. Her sütun değeri her bir sabit etkili parametreye göre modelin kısmi türevine karşılık gelmektedir. Bu nedenle, kısmi türev matrisinin her i . satırının değerine, ekstra çapların kalibrasyonunun x_{kj} nisbi boyu ile karar verilmektedir.

Kalibre edilmiş yanıtlar, ekstra çap ölçümlerini gerektirmektedir. Bu çalışmada, tesadüfi etkiler vektörünün tahmini için ekstra çapların seçiminde aşağıdaki senaryo uygulanmıştır. Bu nedenle çalışmada, ekstra çap ölçümlerinin sayısı ve konumunun etkisi araştırılmıştır. Bu amaçla, kalibrasyon için iki farklı senaryo değerlendirilmiştir. Birinci senaryoda tek ekstra çap ölçümü; ikincisinde ise iki ekstra çap ölçümü kullanılmıştır.

Test edilen senaryolarının değerlendirilmesi için Arabatzis ve Burkhart (1992) tarafından önerilen yöntem kullanılmıştır. Bu amaçla öncelikli olarak model test veri seti her ağaç için 10 nisbi boy sınıfına ayrılmıştır. Her nispi boy sınıfı için tahmin edilen çap ve ölçülen çap değerlerinin farkları bulunmuş daha sonra ortalama hata \bar{e}_i ve hataların varyansı v_i hesaplanmıştır. Son olarak da hata kareler ortalamasının karekökü (RMSE) her nisbi boy sınıfı için hesaplanmıştır.

$$\bar{e}_i = \frac{\sum_{j=1}^{i=n} (y_i - \hat{y}_i)}{n} \quad (15)$$

$$MSE_i = \bar{e}_i^2 + v_i \quad (16)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{i=n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}} \quad (17)$$

Bu formüllerde y_i ve \hat{y}_i sırasıyla ölçülen ve tahmin edilen değerlerin ortalamasını ifade etmektedir. n model geliştirmek için kullanılan toplam gözlem sayısını, p geliştirilen modellerdeki parametre sayısını ifade etmektedir.

3. Bulgular

3.1. Karışık etkili parçalı gövde çapı modeli

Yukarıdaki açıklamalara uygun olarak, Max ve Burkhart (1976) modelinde, hangi parametrelerin ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ve β_4) sabit etkili, ya da tesadüfi etkili olması gerektiğine karar verebilmek için, bir, iki, üç ve dört parametrelili 15 adet kombinasyon test edilmiş, bunlarda 13 adedi için çözüm elde edilmiştir. Bu işlem sırasında, tüm kombinasyonların homojen hata varyansına ve ilişkisiz hata yapısına sahip olduğu kabul edilmiştir. Çizelge 2’deki sonuçlar incelendiğinde, tüm karışık etkili (hem sabit hem de tesadüfi etkili parametreye sahip modeller) tahmin sonuçlarının, tüm parametreleri sabit etkili modele göre daha başarılı olduğu görülmektedir. Çizelge 2’deki ölçüt değerleri dikkate alındığında, en başarılı sabit etkili ve tesadüfi etkili parametre kombinasyonuna sahip modelin, β_1, β_3 ve β_4 parametrelerinin tesadüfi etkiye sahip olması durumunda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu sonuçlara göre Toros göknarı için en başarılı karışık etkili gövde çapı modeli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y_i = \beta_{1i}(x_i - 1) + \beta_{2i}(x_i^2 - 1) + \beta_{3i}(\alpha_1 - x_i)^2 I_1 + \beta_{4i}(\alpha_2 - x_i)^2 I_2 + e_i \quad (18)$$

Burada,

$I_m = 1$ eğer $(\alpha_{mi} - x) \geq 0, 0$ aksi takdirde $(m = 1, 2)$ ’dir.

Şekil 2’nin incelenmesinde de görüleceği gibi, karışık etkili model (Şekil 2b-hem sabit hem de tesadüfi etkilere sahip model) tüm parametreleri sabit etkili modele (Şekil 2a) göre, daha homojen hata varyansına sahiptir. Bununla birlikte, karışık etkili modelin rölatif boy sınıfları için hata dağılımı incelendiğinde, rölatif boyun %70-100’lük kısmında dağılımın kısmen de olsa homojen olmadığı görülmektedir. Diğer taraftan, modelde birey içi hata varyansının heterojen olduğu kabul edilerek modele iki farklı varyans fonksiyonu eklendiğinde, elde edilen uyum istatistiklerinin her iki varyans fonksiyonu içinde sadece karışık etkili parametre içeren modele göre daha başarılı olduğu görülmektedir (Çizelge 3). Bu durum Toros göknarı için karışık etkili modelde ortaya çıkan varyans heterojenliğinin ortadan tamamen kaldırılabilmesinin ancak varyans fonksiyonu eklenmesi ile gerçekleşebileceği görülmüştür. Başarılı çözümün elde edildiği Model 3’de, ağaç içi ve ağaçlar arası hata değişkenliğinin eş zamanlı hesaplanması için modele bir varyans fonksiyonu eklenmiştir. x_{ij} (rölatif boy) terimi ağaç içi değişkenliğin ve D_i (ağaç boyutu) ağaçlar arası değişkenlik için hesaplanmıştır. Model 3’e ilişkin parametre tahminleri Çizelge 4’de verilmiştir. Şekil 2c’de açıkça görüldüğü gibi model varyans fonksiyonunun eklenmesi ile gövde boyunca çok daha homojen hata varyansı değerlerinin ortaya çıktığı görülmektedir. Formül 3’e göre ve $n_i = 3$ kabul edildiğinde, birey içi varyansı tanımlayan çapraz matris aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$G_i = \begin{bmatrix} D_i^{\theta_0} \exp(\theta_1 x_{i1}) & 0 & 0 \\ 0 & D_i^{\theta_0} \exp(\theta_1 x_{i2}) & 0 \\ 0 & 0 & D_i^{\theta_0} \exp(\theta_1 x_{i3}) \end{bmatrix} = \text{diag} [D_i^{\theta_0} \exp(\theta_1 x_{i1}), D_i^{\theta_0} \exp(\theta_1 x_{i2}), D_i^{\theta_0} \exp(\theta_1 x_{i3})].$$

Garber ve Maguire (2003) tarafından da ifade edildiği gibi, bir ağaç gövdesi boyunca eşit aralıklarla yapılan ölçümler arasında bir korelasyon vardır. Bu nedenle, ilişkili hatalar modele tesadüfi etkili parametrelerin eklenmesinden sonra da görülebilmektedir. Sonuç olarak, hata yapısının bağımlı olup olmadığını test etmek için daha kompleks bir modele ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle Model 3’e birde birinci derece otoregresif hata yapısı CAR (1) eklenerek çözülmüştür. Bu amaçla modelin (Model 4) çözümü için otokorelasyonlu hata yapısını içeren bir modelin hata varyansı için bir ağırlık faktörü, Model 3’ün varyans fonksiyonuna eklenerek *NLINMIX* çözüm yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemin kullanılması ile tahmin edilen parametre sayısı azaltılmış, denklem (3)’dekine benzer hata otokorelasyonunu ve heterojen hata varyansını hesaplamak için varyans-kovaryans yapısı oluşturulmuştur. Çizelge 4’de, Model 4 için elde edilen ölçüt değerleri incelendiğinde, otoregresif hata yapısının eklendiği bu modelin daha başarılı tahminler yapılmasına imkan verdiği görülmektedir. $n_i = 3$ olarak alındığında birey içi korelasyonun hesaplanması için matris aşağıdaki formu almaktadır.

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} 1 & \rho^{d_{12}} & \rho^{d_{13}} \\ \rho^{d_{12}} & 1 & \rho^{d_{23}} \\ \rho^{d_{13}} & \rho^{d_{23}} & 1 \end{bmatrix}$$

Burada, otoregresif hata yapısı, ölçümler arasındaki d_{jj} aralığının artmasına bağlı olarak birey içi korelasyonun azaldığını kabul etmektedir. $n_i = 3$ için hata teriminin varyans-kovaryans matrisi aşağıdaki gibi modellenebilir:

$$R_i = \sigma^2 \begin{bmatrix} D_i^{\theta_0} \exp(\theta_1 x_{i1}) & \rho^{d_{12}} & \rho^{d_{13}} \\ \rho^{d_{12}} & D_i^{\theta_0} \exp(\theta_1 x_{i2}) & \rho^{d_{23}} \\ \rho^{d_{13}} & \rho^{d_{23}} & D_i^{\theta_0} \exp(\theta_1 x_{i3}) \end{bmatrix}$$

Burada; $\sigma^2 = 1.6323$, $\theta = [-1.7128 \quad -4.3613]$ ve $\rho = 0.5595$ olarak bulunmuştur (Çizelge 4). Bu yapı, ağaç içi ve ağaçlar arası hata varyansının heterojen olduğunu kabul etmektedir.

Çizelge 2. Max ve Burkhart (1976)’ın parçalı gövde çapı modelinin farklı tesadüfi değişken kombinasyonları için istatistiki sonuçlar

Tesadüfi değişkenler	Tahmin edilen parametre sayısı	σ^2	-2LL (en küçük en iyi)	AIC (en küçük en iyi)
Yok	7	0.00314	-8825	-8811
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	13	0.00464	-12952	-12926
$\beta_1, \beta_2, \beta_4$	13	0.00046	-13014	-12988
$\beta_1, \beta_3, \beta_4$	13	0.00043	-13197	-13171
$\beta_2, \beta_3, \beta_4$	13	0.00044	-13119	-13093
β_1, β_3	10	0.00061	-12583	-12563
β_2, β_3	10	0.00052	-12479	-12459
β_2, β_4	10	0.00064	-12469	-12449
β_1, β_2	10	0.00063	-12493	-12473
β_3, β_4	10	0.00075	-12062	-12042
β_1	9	0.00094	-11737	-11721
β_2	9	0.00085	-12014	-11998
β_3	9	0.00094	-11749	-11733
β_4	9	0.00114	-11221	-11205

σ^2 , hata varyansı; -2LL, iki kez logaritmik olabirliklik fonksiyonunu ve AIC, Akaike’nin bilgi kriterini ifade etmektedir.

Çizelge 3. Farklı hata varyansı yapısına sahip modeller için olasılık oranı testi (LRT) ve uyum istatistikleri

Model	Varyans fonksiyonu $g(\theta, x_{ij})$	Parametreler (p)	AIC	Ln(L)	LRT	p
1	Yok ^a	13	-13171	6598.5		
2	$\exp(\theta_1 x_{ij})$	14	-14030	7015.0	833	<0.001
3	$D_i^{\theta_1} \exp(\theta_1 x_{ij})$	15	-14553	7291.5	1386	<0.001

Homojen hata yapısı, var(e_{ij})= σ^2

Çizelge 4. Hata terimi için iki farklı ağaç içi varyans-kovaryans yapısı ile karışık etkili doğrusal olmayan parçalı gövde çapı modelinin parametre tahminleri

Parametre	Model 3		Model 4	
	Tahmin	SE	Tahmin	SE
β_1	-2.4564	0.04398	-2.5283	0.07219
β_2	1.0662	0.02405	1.1102	0.4957
β_3	-0.4863	0.02815	-0.4957	0.04240
β_4	7.9956	3.4711	10.6653	1.4716
α_1	0.7117	0.01777	0.7453	0.01840
α_2	0.1254	0.02175	0.1115	0.00705
Varyans bileşenleri				
σ^2	1.1531	0.2783	1.6323	
Var(b_1)	0.01815	0.00196	0.01612	
Var(b_3)	0.05868	0.01101	0.02858	
Var(b_4)	21.5732	11.9734	14.1233	
Cov(b_1, b_3)	0.02859	0.00391	0.02113	
Cov(b_1, b_4)	-0.3591	0.1596	-0.4896	
Cov(b_3, b_4)	-0.9490	0.3060	-0.6641	
Varyans yapısı				
θ_0	-1.7128	0.06866	-1.7128	
θ_1	-4.3613	0.1346	-4.3613	
Kovaryans yapısı				
ρ	Yok ^a		0.5595	
Uyum istatistikleri				
-2Ln(L)	-14583.0		-15164.0	
AIC	-14553.0		-15148.0	

^abirey içi hataların ilişkisiz olduğu kabul edilmektedir Cov(e_{ij}, e_{ij}) = 0 için $j \neq j'$. Model 3; denklem (5)'deki varyans fonksiyonun eklendiği modeli, Model 4 ise, denklem (6)'deki varyans fonksiyonun eklendiği modeli ifade etmektedir.

Ağaçlar arası varyasyon için parametre vektörü β_i , i ağaç için aşağıdaki gibi yazılabilir:

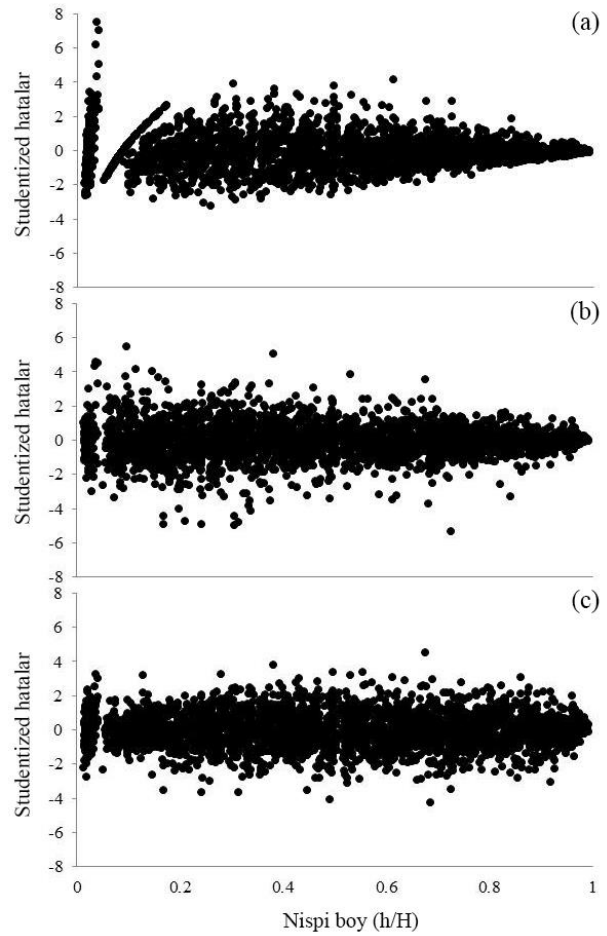
$$\beta_i = A_i \beta + B_i b_i = \begin{bmatrix} (\beta_1 + b_{1i}) \\ \beta_2 \\ (\beta_3 + b_{3i}) \\ (\beta_4 + b_{4i}) \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1i} \\ \beta_2 \\ \beta_{3i} \\ \beta_{4i} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad b_i \sim N(0, D)$$

Burada β , $[\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \alpha_1 \ \alpha_2]^T$ şeklindeki sabit etkiler vektörünü, b_i , $[b_{1i} \ b_{2i} \ b_{3i}]^T$ tesadüfi etkiler vektörünü, $A_i = I_6$ ise sabit etkiler için (6x6) boyutlarında bir tasarım ya da tanım matrisi ifade etmektedir.

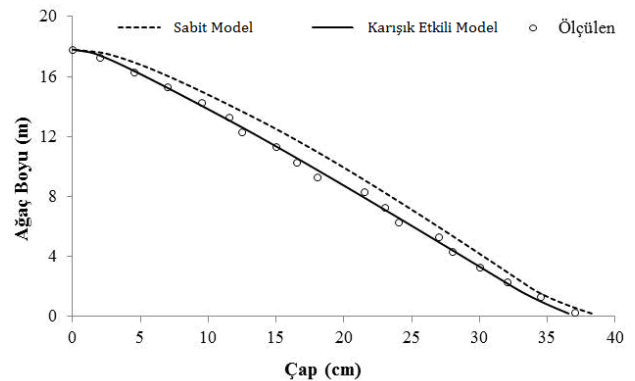
B_i , $[100 \ 000 \ 010 \ 001 \ 000 \ 0000]^T$ şeklindeki tesadüfi etkiler için tasarım matrisidir. Tesadüfi etkiler vektörü b_i 'nin yapısız varyans-kovaryans matrisi ile $E[b_i] = 0$ çok değişkenli normal dağıldığı kabul edilmektedir (Çizelge 4).

$$D = \begin{bmatrix} \text{Var}(b_1) & \text{Cov}(b_1, b_3) & \text{Cov}(b_1, b_4) \\ & \text{Var}(b_3) & \text{Cov}(b_3, b_4) \\ & & \text{Var}(b_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01612 & 0.02130 & -0.4896 \\ 0.02130 & 0.02858 & -0.6641 \\ -0.4896 & -0.6641 & 14.1233 \end{bmatrix}$$

Şekil 3 incelendiğinde, karışık etkili model ile sadece sabit etkili parametreleri içeren modele göre, gövde profilinin daha başarılı bir şekilde tahmin edilebildiği görülmektedir.



Şekil 2. a) Sabit etkili model için, b) homojen hata varyansına sahip karışık etkili model için ve c) hata varyans fonksiyonu eklenmiş karışık etkili model için normalleştirilmiş (studentized) hatalar.



Şekil 3. İki ekstra çap ölçümünü temel alan kalibre edilmiş karışık etkili model ve sabit etkili model için gövde profili eğrileri

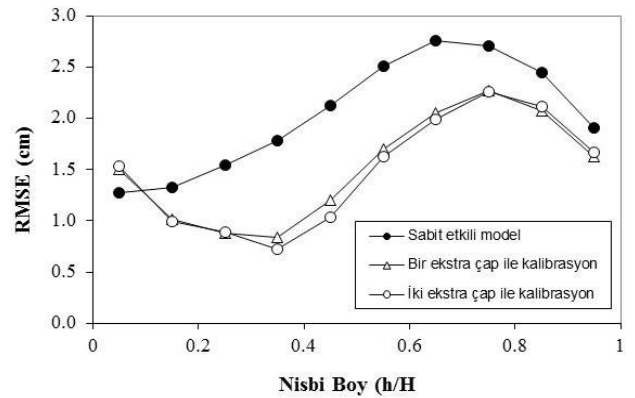
Bir gövde çapı modeline ilişkin kalibrasyon işleminin detayları Trincado ve Burkhart (2006)'da ayrıntılı bir şekilde verildiği için, bu çalışmada kalibrasyon aşamaları verilmemiştir. Ancak kalibrasyon işlemi için adımlar doğru bir şekilde yapılır ise, 43 cm göğüs çapına ve 22.8 m ağaç boyuna sahip bir ağaç ve bu ağaç üzerinde ölçülmüş iki ekstra çap değerine göre (ağaç gövdesi üzerinde 3.3 m ve 6.3 m yüksekliklerindeki çaplar sırasıyla 40 ve 36 cm) kalibre edilmiş denklem aşağıdaki şekilde ortaya çıkmaktadır.

$$\hat{\beta}_k = \left[\left(\hat{\beta}_1 + 0.00826 \right), \hat{\beta}_2, \left(\hat{\beta}_3 + 0.00737 \right), \left(\hat{\beta}_4 - 0.16348 \right), \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2 \right]^T$$

3.2. Farklı kalibrasyon sonuçlarının değerlendirilmesi

Çalışmada, en başarılı kalibrasyon alternatifinin bulunması amacıyla, göğüs çapı ve ağaç boyu dışında bir ve/veya iki ekstra çap ölçü kullanılarak 10 farklı (4 adet tek çap ve 6 adet çift çap) alternatif test edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 5 ve 6'da verilmiştir. Çizelge 5 ve 6'da verilen sonuçların incelenmesinde de görüleceği gibi, tüm kalibrasyon alternatifleri, sabit etkili model göre (ortalama yanıtlar), rölatif boyun %0-10'luk kısmı hariç daha başarılı sonuçlar vermiştir. Diğer yandan tek ve çift ekstra çap ölçüleri için elde edilen kalibrasyon sonuçları değerlendirildiğinde, çift çap ölçümü ile elde edilen kalibrasyon sonuçlarının, tek ekstra çap ölçü kullanılarak yapılan kalibrasyon sonuçlarından daha başarılı olduğu görülmektedir. RMSE değerleri kullanılarak elde edilen sonuçlar yardımı ile oluşturulan Şekil 4 incelendiğinde, bu durum daha net görülmektedir. Bununla birlikte gövdenin değişik bölümleri için elde edilen sonuçlar, kalibrasyon alternatifleri arasında özellikle ağaç gövdesinin %30-60'lık kısmında 4.3-7.3 alternatifinin daha başarılı olduğunu göstermiştir.

Yapılan çalışmalar, ağaç gövdesi üzerinde bir ya da iki farklı noktadaki ekstra çap ölçümü kullanılarak yapılan kalibrasyon sonuçları arasında büyük ve anlamlı farklılıkların olmadığını göstermiştir (Trincado ve Burkhart, 2006; Lejeune vd. 2009; Özçelik ve Yaşar, 2015). Orman envanteri çalışmalarında, ekstra çap ölçümlerinin hem envanter maliyetlerini arttırması, hem de ağaç gövdesinin üst kısımlarındaki çap ölçümlerinde hata yapılabilme olasılıklarının bulunması nedeniyle, yapılacak ekstra çap ölçümü sayısının optimal bir düzeyde olması gerekmektedir. Arias-Rodil vd. (2017) tarafından yapılan çalışmada; doğru hacim tahminleri için ekstra çap ölçümü kullanılacaksa, mutlaka bu çap değerinin doğru tahmin edilmesi gerektiği aksi takdirde hacim tahminlerinde negatif hataya neden olabileceği ifade edilmektedir.



Şekil 4. Max ve Burkhart (1976) için bir ve iki karışık etkili parametre kombinasyonları kullanılarak çap (d) ve hacim (v) tahminleri için elde edilen MSE değerlerinin nisbi kalibrasyon boyları için değişimi.

Çizelge 5. Farklı ekstra çap ölçümlerinin gövde çapı tahminleri için ortalama ve kalibre edilmiş sonuçların hata ve tutarlılık sonuçları*

Nisbi boylar	n	Ortalama yanıtlar (cm)	Kalibre edilmiş yanıtlar (cm)									
			3.3	4.3	5.3	6.3	2.3-4.3	2.3-5.3	2.3-6.3	3.3-5.3	3.3-6.3	4.3-7.3
			Ortalama hata (\bar{e}_i)									
0.0<h/H≤0.1	217	-0.114	-0.567	-0.572	-0.508	-0.429	-0.595	-0.559	-0.490	-0.573	-0.517	-0.430
0.1<h/H≤0.2	193	0.644	0.212	0.219	0.294	0.379	0.192	0.245	0.310	0.225	0.286	0.374
0.2<h/H≤0.3	192	0.528	0.002	-0.015	0.062	0.159	-0.039	0.013	0.088	-0.010	0.059	0.162
0.3<h/H≤0.4	191	0.422	-0.198	-0.189	-0.094	0.026	-0.220	-0.153	-0.056	-0.188	-0.098	0.005
0.4<h/H≤0.5	192	0.289	-0.372	-0.372	-0.270	-0.152	-0.410	-0.337	-0.241	-0.367	-0.278	-0.132
0.5<h/H≤0.6	191	0.458	-0.222	-0.233	-0.118	0.008	-0.264	-0.180	-0.078	-0.216	-0.120	-0.004
0.6<h/H≤0.7	204	0.951	0.171	0.133	0.221	0.351	0.111	0.169	0.273	0.124	0.222	0.353
0.7<h/H≤0.8	191	1.157	0.474	0.473	0.557	0.687	0.439	0.498	0.604	0.464	0.564	0.668
0.8<h/H≤0.9	183	1.349	0.723	0.700	0.799	0.868	0.685	0.756	0.811	0.711	0.764	0.850
0.9<h/H≤1.0	158	1.287	0.850	0.816	0.857	0.971	0.800	0.829	0.925	0.807	0.897	0.969
Tüm Veri	1912	0.675	0.083	0.072	0.156	0.263	0.046	0.104	0.191	0.074	0.154	0.258
			Tutarlılık (v_i)									
0.0<h/H≤0.1	217	1.565	1.908	2.249	2.189	2.377	2.080	2.050	2.157	2.182	2.292	2.572
0.1<h/H≤0.2	193	1.762	0.453	0.557	0.749	1.024	0.462	0.580	0.755	0.547	0.703	1.043
0.2<h/H≤0.3	192	2.367	0.944	0.757	0.626	0.778	0.889	0.729	0.774	0.578	0.616	0.779
0.3<h/H≤0.4	191	3.193	2.133	1.590	1.165	0.708	1.783	1.385	0.908	1.332	0.863	0.506
0.4<h/H≤0.5	192	4.537	3.595	3.047	2.239	1.432	3.235	2.504	1.688	2.516	1.745	1.124
0.5<h/H≤0.6	191	6.270	5.228	4.515	3.761	2.888	4.555	3.878	3.005	4.056	3.202	2.655
0.6<h/H≤0.7	204	7.589	5.805	5.443	4.853	4.222	5.363	4.811	4.148	4.980	4.323	4.095
0.7<h/H≤0.8	191	7.338	5.848	5.869	5.523	5.152	5.678	5.358	4.934	5.546	5.128	5.263
0.8<h/H≤0.9	183	5.978	4.547	4.609	4.469	4.290	4.437	4.277	4.054	4.425	4.195	4.592
0.9<h/H≤1.0	158	3.636	2.362	2.313	2.412	2.654	2.229	2.275	2.425	2.306	2.442	2.790
Tüm veri	1912	4.305	3.163	2.906	2.695	2.453	2.962	2.682	2.389	2.744	2.455	2.441

*Altı çizili değerler ilgili çap sınıfı için en başarılı sonucu ifade etmektedir.

Çizelge 6. Farklı ekstra çap ölçümlerinin gövde çapı tahminleri için ortalama ve kalibre edilmiş sonuçlarının RMSE^a değerleri*

Nisbi boylar	n	Ortalama yanıtlar (cm)	Kalibre edilmiş yanıtlar (cm)									
			3.3	4.3	5.3	6.3	2.3-4.3	2.3-5.3	2.3-6.3	3.3-5.3	3.3-6.3	4.3-7.3
0.0<h/H≤0.1	217	1.251	1.381	1.500	1.479	1.542	1.442	1.432	1.469	1.477	1.514	1.604
0.1<h/H≤0.2	193	1.328	0.673	0.746	0.866	1.012	0.680	0.762	0.869	0.739	0.839	1.021
0.2<h/H≤0.3	192	1.538	0.972	0.870	0.791	0.882	0.943	0.854	0.880	0.760	0.785	0.882
0.3<h/H≤0.4	191	1.787	1.461	1.261	1.080	0.841	1.335	1.177	0.953	1.154	0.929	0.711
0.4<h/H≤0.5	192	2.130	1.896	1.746	1.496	1.197	1.799	1.583	1.299	1.586	1.321	1.060
0.5<h/H≤0.6	191	2.504	2.286	2.125	1.939	1.700	2.134	1.969	1.734	2.014	1.790	1.629
0.6<h/H≤0.7	204	2.755	2.409	2.333	2.203	2.055	2.316	2.193	2.037	2.232	2.079	2.024
0.7<h/H≤0.8	191	2.709	2.418	2.423	2.350	2.270	2.383	2.315	2.221	2.355	2.265	2.294
0.8<h/H≤0.9	183	2.445	2.132	2.147	2.114	2.071	2.106	2.068	2.013	2.104	2.048	2.143
0.9<h/H≤1.0	158	1.907	1.537	1.521	1.553	1.629	1.493	1.508	1.557	1.518	1.563	1.670
Tüm veri	1912	2.075	1.779	1.728	1.642	1.566	1.721	1.638	1.546	1.656	1.567	1.562

^aHata kareler ortalamasının karekökü. *Altı çizili değerler ilgili çap sınıfı için en başarılı sonucu ifade etmektedir.

Kalibrasyon işlemi için, ister tek çap, ister çift ekstra çap değeri kullanılırsa kullanılсын en başarılı tahminlerin, ağaç boyunun %35-50'si arasında alınacak ekstra çap değerleri ile yapılabileceği görülmüştür. Değişik araştırmacılar tarafından yapılan çalışmalarda da, kalibrasyon için en uygun çap ölçüm yerinin ağaç boyunun yaklaşık yarısında olduğu bulunmuştur. Örneğin Kozak (1988), western red cedar (*Thuja plicata* Donn ex D. Don) ve Douglas fir (*Pseudotsuga menziesii* (Mirb.) Franco) için ve Cao (2009) loblolly pine (*Pinus taeda* L.) plantasyonları için ekstra çapı ağaç boyunun %50 sinde ölçülmesi gerektiğini bulmuştur. Sabatia ve Burkhart (2014) ise bu çapın ağaç boyunun %60'lık kısmından ölçülmesini önermiştir. Arias-Rodil vd. (2015a) ise bu çap değerinin ağaç boyunun %50'sinden ölçülmesinin daha doğru kalibrasyon sonucu elde edilmesine yardımcı olacağını ifade etmiştir. Arias-Rodil vd., (2015b) ise, Kuzeybatı İspanya'daki maritime pine için bu ölçüm değerinin ağaç boyunun %40-60 arasında olmasını önermiştir.

Şekil 4 incelendiğinde, özellikle dip kısma ve uç kısma yakın kısımlarda, kalibrasyon alternatiflerinin başarılı sonuçlar üretmediği görülmektedir. Bu nedenle, Arias-Rodil vd. (2015b) tarafından da belirtildiği gibi, ağaç gövdesinin bu bölümleri, ağaç gövdesindeki varyasyonun açıklanması için uygun değildir. Ancak envanter maliyetleri ve zaman düşünüldüğünde, tek çap ölçümü ile kalibrasyon işleminin yapılması daha yararlı olacaktır.

4. Sonuçlar ve öneriler

Bu çalışmada, Toros göknarı için Max ve Burkhart (1976) tarafından geliştirilen model temel alınarak, gövde formundaki birey içi ve bireyler arası değişkenlikler, karışık etkili doğrusal olmayan gövde çapı modeli ile ortaya konmuştur. Bu amaçla, her birey için bireye özel ve topluma özel sonuçlar elde edilmiştir. Toplumaya özel yanıtlar sabit etkili parametreler yardımıyla, bireye özel yanıtlar ise bazı sabit etkili parametrelere tesadüfi etkili parametreler eklenerek elde edilmiştir. Toros göknarı ağaçlarının gövde formunun modellenmesi sırasında, veri yapısında bulunan otokorelasyon probleminin ve hata varyansı dağılımının heterojen olması durumlarının ortadan kaldırılabilmesi için karışık etkili modelin kendi başına yeterli olmadığı, bu sorunların aşılabilmesi için modele bir varyans fonksiyonu ile birinci derece otoregresif hata yapısının eklenmesinin gerekli olduğu ortaya konulmuştur.

Yeni bir birey için tahmin yapılması gerektiğinde, kalibre edilmiş yanıtları elde edebilmek amacıyla uygun

Bayesian tahmincisi kullanılarak tesadüfi etkili parametreler tahmin edilmiştir. Bu çalışmanın sonuçlarına göre, tek ya da iki ekstra çap ölçümü kullanılarak gerçekleştirilen kalibrasyon işlemi sonucunda, model tahminlerinin düzeldiği görülmüştür. Çalışmada, kalibrasyon işlemi için ekstra tek ya da çift çap ölçümü yapılması arasında önemli farklılıklar bulunmadığı, bu nedenle envanter maliyetleri de düşünülerek kalibrasyon işlemi için ekstra tek çap ölçümünün kullanılmasının yeterli olacağı görülmüştür. Kalibrasyon işlemi için alınacak ekstra tek çap değerinin de toplam ağaç boyunun %35-50'lik kısmı arasından seçilmesi durumunda diğer rölatif boy sınıflarına göre, gövde çapı ve buna bağlı hacim tahminlerinin çok daha başarılı bir şekilde yapılabileceği görülmüştür. Yine bu çalışma sonuçlarına göre, kalibrasyon için ekstra çap ölçümlerinin gövdenin dibe ve uca yakın kısımlarından alınmaması da önerilebilir.

Bu çalışmanın sonuçları dikkate alındığında, pratik ormancılık çalışmalarında kalibre edilmiş karışık etkili modellerin kullanılması önerilebilir. Araştırma sonuçlarına göre (Gomez-Garcia vd., 2013), karışık etkili gövde çapı modellerinin geliştirilmesinde, dikkat edilmesi gereken diğer bir önemli konulardan birisi de, en iyi tesadüfi etkili parametre kombinasyonu her zaman en iyi kalibrasyon alternatifini olmayabilmektedir.

Bu çalışmada kullanılan yöntem, doğal Toros göknarı meşcerelerinde uygulanacak farklı yönetim stratejileri ve farklı yetişme ortamlarındaki ağaçlar için gövde formundaki değişimin ortaya konması amacıyla kullanılabilir niteliktedir.

Açıklama

Bu çalışmada kullanılan veriler, SDÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmekte olan BAP-4748-YL1-16 no'lu "Toros Göknarı (*Abies cilicica* Carr.) için gövde çapı modelinin karışık etkili modelleme tekniği kullanılarak geliştirilmesi" isimli proje çalışmasında elde edilmiştir. Diğer yandan, model geliştirme sırasındaki katkılarından dolayı Dr. Guillermo TRINCADO'ya teşekkür ederiz.

Kaynaklar

Arabatiz, A.A., Burkhart, H.E., 1992. An evaluation of sampling methods and model forms for estimating height-diameter relationships in loblolly pine plantations. *Forest Science*, 38(1): 192-198.

- Arias-Rodil, M., Diéguez-Aranda, U., Rodríguez Puerta, F., López-Sánchez, C.A., Canga Libano, E., Cámara Obregón, A., Castedo-Dorado, F., 2015a. Modelling and localizing a stem taper function for *Pinus radiata* in Spain. *Canadian Journal of Forest Research*, 45(6): 647-658.
- Arias-Rodil, M., Castedo-Dorado, F., Cámara-Obregon, A., Diéguez-Aranda, U., 2015b. Fitting and calibrating a multilevel mixed-effects stem taper model for Maritime Pine in NW Spain. *PLoS One*, 10(12): e0143521.
- Arias-Rodil, M., Diéguez-Aranda, U., Burkhart, H.E., 2017. Effects of measurement error in total tree height and upper-stem diameter on stem volume prediction. *Forest Science*, 63(3): 250-260.
- Bates, D.M., Pinheiro, J.C., 1998. *Computational Methods for Multilevel Modelling*. University of Wisconsin, Madison, WI, pp. 1-29.
- Bi, H., 2000. Trigonometric variable-form taper equations for Australian Eucalyptus. *Forest Science*, 46(3): 397-407.
- Bueno-López, S.W., Bevilacqua, E., 2012. Nonlinear mixed model approaches to estimating merchantable bole volume for *Pinus occidentalis*. *Biogeosciences and Forestry*, 5: 247-254.
- Burkhart, H.E., Tomé, M., 2012. *Modeling Forest Trees and Stands*. Springer Science & Business Media.
- Cao, Q.V., 2009. Calibrating a segmented taper equation with two diameter measurements. *Southern Journal of Applied Forestry*, 33(2): 58-61.
- Clark, III A., Souter, R.A., Schlaegel, B.E., 1991. Stem profile equations for southern tree species. United States Department of Agriculture Forest Service Research Paper, SE-282.
- Davidian, M., Giltinan, D.M., 1995. *Nonlinear Models for Repeated Measurement Data*. New York, Chapman and Hall.
- De-Miguel, S., Mehtätalo, L., Shater, Z., Kraid, B., Pukkala, T., 2012. Evaluating marginal and conditional predictions of taper models in the absence of calibration data. *Canadian Journal of Forest Research*, 42: 1383-1394.
- Diéguez-Aranda, U., Dorado, F.C., González, J.G.Á., Alboreca, A.R., 2006. Dynamic growth model for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) plantations in Galicia (north-western Spain). *Ecological Modelling*, 191(2): 225-242.
- Fang, Z., Borders, B.E., Bailey, R.L., 2000. Compatible volume taper models for loblolly and slash pine based on system with segmented-stem form factors. *Forest Science*, 46: 1-12.
- Fang, Z., Bailey, R.L., 2001. Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. *Forest Science*, 47: 287-300.
- Garber, S.M., Maguire, D.A., 2003. Modeling stem taper of three central Oregon species using nonlinear mixed effects models and autoregressive error structures. *Forest Ecology and Management*, 179: 507-507.
- Gómez-García, E., Crecente-Campo, F., Diéguez-Aranda, U., 2013. Selection of mixed effects parameters in a variable exponent taper equation for birch trees in northwestern Spain. *Annals of Forest Science*, doi: 10.1007/s13595-103-0313-9.
- Gómez-García, E., Diéguez-Aranda, U., Özcelik, R., Sal-Cando, M., Castedo-Dorado, F., Crecente-Campo, F., Corral-Rivas, J.J., Arias-Rodil, M., 2016. Desarrollo de una función de perfil mediante modelos mixtos para *Pinus sylvestris* en Turquía: selección de parámetros fijos a expandir. *Bosque*, 37(1): 159-167.
- Gregoire, T.G., Schabenberger, O., 1996. A non-linear mixed-effects model to predict cumulative bole volume of standing trees. *Journal of Applied Statistics*, 23: 257-271.
- Jiang, L., Brooks, J.R., Wang, J., 2005. Compatible taper and volume equations for yellow-poplar in West Virginia. *Forest Ecology and Management*, 213: 399-409.
- Kozak, A., 1988. A variable exponent taper equation. *Canadian Journal of Forest Research*, 18: 1363-1368.
- Kozak, A., 2004. My last words on taper equations. *Forestry Chronicle*, 80: 507-515.
- Lee, W.K., Seo, J.H., Son, Y.M., Lee, K.H., Von Gadow, K., 2003. Modeling stem profiles for *Pinus densiflora* in Korea. *Forest Ecology and Management*, 172:69-77.
- Leites, L., Robinson, A., 2004. Improving taper equations of loblolly pine with crown dimensions in a mixed-effects modeling framework. *Forest Science*, 50(2): 204-212.
- Lejeune, G., Ung, C.H., Fortin, M., Guo, X.J., Lambert, M.C., Ruel, J.C., 2009. A simple stem taper model with mixed effects for boreal black spruce. *European Journal of Forest Research*, 128: 505-513.
- Li, R., Weiskittel, A., Dick, A.R., Kershaw, J.A., Seymour, R.S., 2012. Regional stem taper equations for eleven conifer species in the Acadian region of North America: development and assessment. *Northern Journal of Applied Forestry*, 29: 5-14.
- Li, R., Weiskittel, A.R., 2010. Estimating and predicting bark thickness for seven conifer species in the Acadian Region of North America using a mixed-effects modeling approach: comparison of model forms and subsampling strategies. *European Journal of Forest Research*, 130: 219-233.
- Lindstrom, M.J., Bates, D.M., 1990. Nonlinear mixed effects models for repeated measures data. *Biometrics*, 46: 673-687.
- Max, T.A., Burkhart, H.E., 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science*, 22: 283-289.
- Newnham, R.M., 1988. *A Variable form Taper Function*. Information Report PI-X-83. Forestry, 33p. Canada.
- Özcelik, R., Brooks, J.R., Jiang, L., 2011. Modeling stem profile of Lebanon cedar, Brutian pine and Cilicica fir in Southern Turkey using nonlinear mixed-effects models. *European Journal of Forest Research*, 130: 613-621.
- Özcelik, R., Yaşar, Ü., 2015. Development of stem diameter model for Bornmullerian fir (*Abies nordmanniana* (Stev.) subsp. *bornmulleriana* (Mattf.)) stands in Ayancık District using mixed effects modeling approach. *Turkish Journal of Forestry*, 16(2): 86-95.
- Özcelik, R., Crecente-Campo, F., 2016. Stem taper equations for estimating merchantable volume of Lebanon cedar trees in the Taurus Mountains, Southern Turkey. *Forest Science*, 62: 78-91.
- Özcelik, R., Cao, Q., 2017. Evaluation of fitting and adjustment methods for taper and volume prediction of black pine in Turkey. *Forest Science*, 63(4): 349-355.

- Parresol, B.R., Hotvedt, J. E., Cao, Q. V., 1987. A volume and taper prediction system for bald cypress. *Canadian Journal of Forest Research*, 17: 250-259.
- Pinheiro, J.C., Bates, D.M., 2000. *Mixed Effects Models in S and S-plus*. Springer, Heidelberg.
- Sabatia, C.O., Burkhart, H.E., 2014. Predicting site index of plantation loblolly pine from biophysical variables. *Forest ecology and management*, 326: 142-156.
- Sabatia, C.O., Burkhart, H.E., 2015. On the use of upper stem diameters to localize a segmented taper equation to new trees. *Forest Science*, 61(3): 411-423.
- Schabenberger, O., Pierce, F.J., 2001. *Contemporary Statistical Models for the Plant and Soil Sciences*. CRC press, New York.
- Scolforo, H.F., McTague, J.P., Raimundo, M.R., Weiskittel, A.R., Carrero, O., Soares Scolforo, J.R.S., 2018. Comparison of taper functions applied to eucalypts of varying genetics in Brazil: Application and evaluation of the penalized mixed spline approach. *Canadian Journal of Forest Research*, 48(3):(568-580).
- Sharma, M., Burkhart, H.E., 2003. Selecting a level of conditioning for the segmented polynomial taper equation. *Forest Science*, 49: 324-330.
- Sharma, M., Oderwald, R.G., 2001. Dimensionally compatible volume and taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 31: 797-803.
- Sharma, M., Parton, J., 2009. Modeling Stand Density Effects on Taper for Jack pine Black spruce plantations Using Dimensional Analysis, *Forest Science*, 55(3): 268-282.
- Tang, X., Pérez-Cruzado, C., Fehrmann, L., Álvarez-González, J.G., Lu, Y., Kleinn, C., 2016. Development of a compatible taper function and stand-level merchantable volume model for Chinese fir plantations. *PLoS one*, 11(1): e0147610.
- Trincado, G., Burkhart, H.E., 2006. A generalized approach for modeling and localizing stem profile curve. *Forest Science*, 52: 670-682.
- Valentine, H.T., Gregorie, T.G., 2001. A switching model of bole taper. *Canadian Journal of Forest Research*, 31(8): 1400-1409.
- Vonesh, E.F., Chinchilli, V.M., 1997. *Linear and Nonlinear Models for the Analysis of Repeated Measurements*, Marcel Dekker, New York.
- West, P.W., Ratkowsky, D.A., Davis, A.W., 1984. Problems of Hypothesis testing of regression with multiple measurements from individual sampling units. *Forest Ecology and Management*, 7(3): 207-224.
- Yang, Y., Huang, S., Trincado, G., Meng, S.X., 2009a. Nonlinear mixed effects modelling of variable exponent taper equations for Lodgepole pine in Alberta, Canada. *European Journal of Forest Research*, 128: 415-429.
- Yang, Y., Huang, S., Meng, S.X., 2009b. Development of a tree-specific stem profile model for white spruce: a nonlinear mixed model approach with a generalized covariance structure. *Forestry*, 82(5): 541-555.