GÜFBED/*GUSTIJ* (2018) 8 (2): 309-317
DOI: 10.17714/gumusfenbil.365920 Araştırma Makalesi / *Research Article*

2-Uninormlar Üzerinde Denklik Bağıntısı ve Kıyaslanamayan Elemanların Kümesi

Equivalence Relation on 2-Uninorms and the Set of Incomparable Elements

Ümit ERTUĞRUL*
Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 61080, Trabzon

• Geliş tarihi / *Received*: 14.12.2017 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 02.04.2018 • Kabul tarihi / *Accepted*: 04.04.2018

Öz
Uninormlar, üçgensel normları, üçgensel konormları kapsayan birleştirme fonksiyonlarının bir sınıfıdır. 2-Uninormlar ise uninormları ve nullnormları kapsayan çok daha genel bir sınıftır. Uninormlardan elde edilen kısmen sıralama bağıntısı ve özellikleri üzerine yapılan çalışmalar, onların daha genel bir sınıfı olan 2-uninormlar için de bu tip özelliklerin araştırılmasını oldukça doğal kılar. Bu çalışmada, 2-uninormlardan elde edilen sıralama bağıntısı göz önüne alınarak, 2-uninormların sınıfı üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlanmış ve bazı özellikleri araştırılmıştır. İlaveten, 2-uninormlardan elde edilen sıralama bağıntısına göre kıyaslanamayan elemanların kümesi karakterize edilmiştir.

Anahtar kelimeler: 2-Uninorm, Uninorm, Kısmen Sıralama Bağıntısı, Sınırlı Kafes

Abstract
Uninorms are a class of aggregation functions involving triangular norms and triangular conorms. 2-Uninorms are a much more general class that includes uninorms and nullnorms. Studies on partial order obtained from uninorms and their properties make it very natural to investigate such properties for their more general class 2-uninorms. In this study, an equivalence relation is defined on the class of 2-uninorms and some properties are investigated, taking into account the order relation obtained from 2-uninorms. In addition, the set of incomparable elements according to the ordering relation obtained from 2-uninorms is characterized.

***Keywords**: 2-Uninorm, Uninorm, Partial Order, Bounded Lattice*

* Ümit ERTUĞRUL; uertugrul@ktu.edu.tr; Tel: (0462) 377 25 76; orcid.org/0000-0003-0672-8134

1. Giriş

Uninormlar ilk olarak [0,1] birim reel aralık üzerinde tanımlanmıştır (Yager vd., 2008). Uninorların, üçgensel normları ve üçgensel konormların daha genel bir sınıfı olması nedeniyle, araştırmacılar tarafından çok çalışılan bir konu olmuştur (Karaçal vd., 2017; Karaçal vd. 2015).

Üçgensel normlardan elde edilen kısmen sıralama bağıntısının tanımının verilmesinin (Karaçal vd., 2011) ve ardından bu konuyu detaylı inceleyen bir çok çalışmanın yapılmasının ardından (Kesicioğlu vd. 2015; Kesicioğlu vd. 2014), bu tip bir sıralama bağıntısına dair ilk girişim Hliněná, Kalina ve Král tarafından yapılmıştır (Hliněná vd., 2014), fakat bu bağıntı bir kısmen sıralama bağıntısı değildir. Bu çalışmanın ardından, uninormlar üzerinde kısmen sıralama bağıntısı Ertuğrul, Kesicioğlu ve Karaçal tarafından tanımlanmıştır (Ertuğrul vd., 2016) ve çalışılmıştır (Kesicioğlu vd., 2017).

2-Uninormlar ilk olarak Akella tarafından tanımlanmıştır (Akella, 2007) ve ardından bazı araştırmacılar tarafından çalışılmıştır (Ertuğrul, 2017b). 2-Uninormların, uninormları dolayısıyla üçgensel normları ve üçgensel konormları kapsayan bir sınıf olması yapılan sıra çalışmalarının 2-uninormlar için de araştırılmasını doğal ve gerekli kılmıştır, bu bağlamda sınırlı kafesler üzerinde 2-uninormlardan elde edilen kısmen sıralama bağıntısı tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir (Ertuğrul vd., 2017; Ertuğrul, 2017a).

Bu çalışma da ise, 2-uninormlardan elde edilen sıralama bağıntısı göz önüne alınarak, bir denklik bağıntısı tanımlanmıştır ve bu bağıntının bazı özellikleri incelenmiştir. İlaveten, 2-uninormlardan elde edilen kısmen sıralama bağıntısına göre kıyaslanamayan elemanların kümesi K_{U^2} karakterize edilmiş ve yine 2-uninormlardan elde edilen kısmen sıralama bağıntısına göre bir x elemanı ile kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi $I_{U^2}^{(x)}$ ile ilişkisi ortaya konulmuştur.

Bu çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümde kullanılacak veya buradaki çalışmalara temel teşkil edecek tanım, teorem ve önermelere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, 2-uninormlardan elde edilen sıralama bağıntısı göz önüne alınarak bir bağıntı tanımlanmış, bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu gösterilmiş, 2-uninormun belirlediği üçgensel normlar ve konormlardan elde edilen sıralama ile 2-uninormlardan elde edilen sıralama arasındanki ilişki araştırılmıştır. Dördüncü bölümde, 2-uninormlardan elde edilen sıralama bağıntısına göre kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi K_{U^2} nin karakterize edilmesinin yanı sıra, x elemanı ile kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi $I_{U^2}^{(x)}$ ile ilişkisi de ortaya konmuştur.

2. İlgili Tanım ve Teoremler

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak ilgili tanım, teorem ve önermelere yer verilmiştir.

2.1. Tanım (Birkhoff, 1967) P bir küme ve $\leq$, P üzerinde bir bağıntı olsun. Her $x, y, z \in P$ için

P1. Her $x \in P$ için $x \leq x$ (Yansıma)

P2. $x, y \in P$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (Ters Simetri)

P3. $x, y, z \in P$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (Geçişme)

şartları sağlanırsa, $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir sıralama (veya kısmen sıralama) denir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan P kümesine sıralı küme (veya kısmen sıralı küme) denir ve bu küme $(P, \leq)$ ikilisi ile gösterilir. □

2.2 Tanım (Karaçal vd., 2011) $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. $a, b \in P$ için $a \nleq b$ ve $b \nleq a$ ise yani a ve b elemanları kıyaslanmıyorsa a ve b elemanlarına kıyaslanamayan elemanlar denir ve bu $a \parallel b$ ile gösterilir. $c \in P$ için c elemanı ile kıyaslanamayan elemanların kümesi

$$I_c := \{x \in P : x \parallel c\} \tag{1}$$

ile gösterilir.

2.3. Tanım (Birkhoff, 1967) $(L, \leq)$ bir kısmen sıralı kümesi olsun. Her $x, y \in L$ için $sup\{x, y\}$ ve $inf\{x, y\}$ mevcut ise L ye kafes denir. □

2.4. Tanım (Birkhoff, 1967) Bir L kafesine sınırlı kafes denir:$\Leftrightarrow$ L, en küçük eleman 0 ve en büyük eleman 1 e sahiptir. Bu durum, kısaca $(L, \leq, 0, 1)$ ile gösterilir. □

2.5. Tanım (Karaçal vd., 2011) L sınırlı bir kafes olsun. Bir üçgensel norm T (kısaca t-norm) L üzerinde komütatiflik, birleşme, monotonluk özelliklerini sağlayan 1- birim elemanlı bir ikili işlemdir. □

2.6. Tanım (Karaçal vd., 2011) L sınırlı bir kafes olsun. Bir üçgensel konorm S (kısaca t-konorm) L üzerinde komütatif, birleşme, monoton özelliklerini sağlayan 0- birim elemanlı bir ikili işlemdir. □

2.7. Tanım (Karaçal vd., 2011) Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t-norm T ye bölünebilirdir denir $:\Leftrightarrow$ $x \leq y$ olan her $x, y \in L$ için $x = T(y, z)$ olacak şekilde bir $z \in L$ mevcuttur. □

2.8. Önerme (Karaçal vd., 2011) T, $L = [0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. T bölünebilirdir $\Leftrightarrow$ T süreklidir. □

2.9. Tanım (Ertuğrul, 2018) Bir nullnorm $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur; yani $V: L^2 \longrightarrow L$ fonksiyonuna bir nullnorm denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için

V1. $V(x, y) = V(y, x)$ (Komütatiflik)

V2. $V(x, V(y, z)) = V(V(x, y), z)$ (Birleşme)

V3. $y \leq z$ ise $V(x, y) \leq V(x, z)$ (Monotonluk)

V4. $x \leq a$ ise $V(x, 0) = x$ ve $x \geq a$ ise $V(x, 1) = x$ olacak şekilde bir $a \in L$ mevcuttur. □

2.10. Tanım (Grabish vd., 2009) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. Bir uninorm $U: L^2 \longrightarrow L$, komütatiflik, birleşme ve monotonluk özelliklerini sağlayan, $e \in L$ birim elemanlı (L nin her x elemanı için $U(e, x) = x$) bir ikili işlemdir. □

2.11. Önerme (Grabish vd., 2009) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve U, L üzerinde $e \in L$ birimli bir uninorm olsun. O halde,

(i) $T_U = U \downarrow [0, e]^2 : [0, e]^2 \rightarrow [0, e]$, $[0, e]$ üzerinde bir t-normdur.

(ii) $S_U = U \downarrow [e, 1]^2 : [e, 1]^2 \rightarrow [e, 1]$, $[e, 1]$ üzerinde bir t-konormdur. □

2.12. Tanım (Grabish vd., 2009) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve U, L üzerinde bir uninorm olsun. $U(0,1) = 0$ ise U uninormuna konjanktif uninorm, $U(0,1) = 1$ ise U uninormuna disjanktif uninorm denir. □

2.13. Tanım (Akella, 2007) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. Bir 2-uninorm $U^2: L^2 \longrightarrow L$ komütatiflik, birleşme, monotonluk özelliklerini sağlayan ve $0 \leq e \leq k \leq f \leq 1$ şartını sağlayan $e, k, f \in L$ için

$x \leq k$ olan her $x \in L$ için $U^2(e, x) = x$ ve $x \geq k$ olan her $x \in L$ için $U^2(f, x) = x$

özelliklerini sağlayan bir ikili işlemdir. Tüm 2-uninormların sınıfı $U_{k(e,f)}$ ile gösterilecektir. □

2.14. Önerme (Ertuğrul, 2017b) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $U^2 \in U_{k(e,f)}$ olsun. Bu takdirde, $U^2 \downarrow_{[0,k]^2} = U_1^2$ ve $U^2 \downarrow_{[k,1]^2} = U_2^2$ olarak gösterilirse, U_1^2 $[0, k]$ üzerinde e birim elemanlı bir uninorm ve U_2^2 $[k, 1]$ üzerinde f birim elemanlı bir uninormdur. □

2.15. Önerme (Ertuğrul, 2017b) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $U^2 \in U_{k(e,f)}$ ve $U^2 \downarrow_{[0,k]^2} = U_1^2$ ve $U^2 \downarrow_{[k,1]^2} = U_2^2$ ile gösterilsin. Bu takdirde $U_1^2 \downarrow_{[0,e]^2} = T_{U_1^2}$ $[0, e]$ üzerinde e birim elemanlı bir t-norm, $U_1^2 \downarrow_{[e,k]^2} = S_{U_1^2}$ $[e, k]$ üzerinde e birim elemanlı bir t-konorm, $U_2^2 \downarrow_{[k,f]^2} = T_{U_2^2}$ $[k, f]$ üzerinde f birim elemanlı bir t-norm ve $U_2^2 \downarrow_{[f,1]^2} = S_{U_2^2}$ $[f, 1]$ üzerinde f birim elemanlı bir t-konormdur. □

2.16. Teorem (Ertuğrul, 2017b) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, U_1 $[0, k]$ üzerinde e birim elemanlı disjanktif uninorm ve U_2 $[k, 1]$ üzerinde f birim elemanlı konjanktif uninorm olsun. Bu takdirde,

$$U^2(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y), & (x, y) \in [0, k]^2, \\ U_2(x, y), & (x, y) \in [k, 1]^2, \\ k, & \textit{aksi halde} \end{cases} \quad (2)$$

ile tanımlı operatör $U_{k(e,f)}$ nin bir elemanıdır, yani bir 2-uninormdur. □

2.17. Tanım (Karaçal vd., 2011) L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. T-norm T için T-kısmen sıra (üçgensel sıra) aşağıdaki gibi tanımlanır ve $\leq_T$ ile gösterilir: $x \leq_T y :\Leftrightarrow$ $T(\ell, y) = x$ olacak şekilde bir $\ell \in L$ elemanı mevcuttur. Dual olarak S-kısmen tanımlanır. □

2.18. Tanım (Ertuğrul vd., 2016) $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve U, e birim elemanlı bir uninorm olsun. $x, y \in L$ için aşağıdaki bağıntıyı tanımlayalım:

$$x \leq_U y :\Leftrightarrow \begin{cases} x,y \in [0,e] \text{ iken } U(k,y) = x \text{ olacak şekilde } k \in [0,e] \text{ mevcut ise,} \\ \text{veya} \\ x,y \in [e,1] \text{ iken } U(x,l) = y \text{ olacak şekilde } l \in [e,1] \text{ mevcut ise,} \\ \text{veya} \\ (x,y) \in L^* \text{ iken } x \leq y \text{ ise,} \end{cases} \quad (3)$$

burada $L^* = [0,e] \times [e,1] \cup [0,e] \times I_e \cup [e,1] \times [0,e] \cup [e,1] \times I_e \cup I_e \times [0,e] \cup I_e \times [e,1] \cup I_e \times I_e$ dir. □

2.19. Önerme (Ertuğrul vd., 2016) (3) ile tanımlanan bağıntı L üzerinde bir kısmen sıralama bağıntısıdır. □

2.20. Önerme (Ertuğrul vd., 2016) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve U, L üzerinde e birim elemanlı bir uninorm olsun. T_U ve S_U bölünebilirdir ancak ve ancak $\leq_U = \leq$. □

2.21. Tanım (Ertuğrul vd., 2017) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes üzere $U^2 \in U_{k(e,f)}$ olsun. $x, y \in L$ için

$$x \leq_{U^2} y :\Leftrightarrow \begin{cases} x,y \in [0,e] \text{ iken } U^2(l,y) = x \text{ olacak şekilde } l \in [0,e] \text{ mevcut ise,} \\ \text{veya} \\ x,y \in [e,k] \text{ iken } U^2(x,m) = y \text{ olacak şekilde } m \in [e,k] \text{ mevcut ise,} \\ \text{veya} \\ x,y \in [k,f] \text{ iken } U^2(y,n) = x \text{ olacak şekilde } n \in [k,f] \text{ mevcut ise,} \\ \text{veya} \\ x,y \in [f,1] \text{ iken } U^2(x,p) = y \text{ olacak şekilde } p \in [f,1] \text{ mevcut ise,} \\ \text{veya} \\ \text{Aksi takdirde } x \leq y \text{ ise.} \square \end{cases} \quad (4)$$

2.22. Önerme (Ertuğrul vd., 2017) (4) ile tanımlanan bağıntı L üzerinde bir kısmen sıralama bağıntısıdır. □

2.23. Önerme (Ertuğrul vd., 2017) $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $U^2 \in U_{k(e,f)}$ olsun. $x, y \in L$ için $x \leq_{U^2}$ y ise, $x \leq y$ dir. □

2-uninormlar uninormları kapsayan daha genel sınıflardır, bu sebeple uninormlar için yapılan çalışmaların 2-uninormlar ve dahası n-uninormlar için araştırılması araştırmacıların ilgilendiği çalışma konularıdır. Bu çalışmanın bundan sonraki kısmında uninormlar için yapılan araştırmalar 2-uninormlar için de araştırılacaktır. Elde edilecek sonuçlar, uninormlar için elde edilen sonuçların daha geneli olmak üzere $U^2 \in U_{k(e,f)}$ için e ve f birim elemanları $e = f$ koşulunu sağladığında bu sonuçlar uninormlar için elde edilen sonuçlarla çakışacaktır.

3. 2-Uninormlar Üzerinde ~ Denklik Bağıntısı

Üçgensel normlar (konormlar), uninormlar ve nullnormlar için denklik sınıflarının araştırılmış olduğu göz önüne alınınca bu sınıfları kapsayan 2-uninormlar için de bu tip bir araştırmanın yapılıyor olması oldukça anlamlıdır. Bu bölümde, 2-uninormlar için bir tip denklik bağıntısı tanımlanacak, bu denklik bağıntısının bazı özellikleri araştırılacaktır.

3.1. Tanım $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. $U_{k(e,f)}$ sınıfı üzerinde $U^{2(1)}, U^{2(2)} \in U_{k(e,f)}$ olmak üzere ~ bağıntısı şu şekilde tanımlansın:

$U^{2(1)} \sim U^{2(2)}$
$\Leftrightarrow$ $U^{2(1)}$ den elde edilen kısmen sıra ile $U^{2(2)}$ den elde edilen kısmen sıra çakışır. □

3.2. Önerme 3.1. Tanım'da verilen ~ bağıntısı, $U_{k(e,f)}$ sınıfı üzerinde bir denklik bağıntısıdır. □

İspat. $U^2, U^{2(1)}, U^{2(2)}, U^{2(3)} \in U_{k(e,f)}$ keyfi alınsın.

i. Her $U^2 \in U_{k(e,f)}$ keyfi 2-uninormu için $U^2 \sim U^2$ olduğu açıktır.

ii. $U^{2(1)}, U^{2(2)} \in U_{k(e,f)}$ ve $U^{2(1)} \sim U^{2(2)}$ olsun. Buradan $U^{2(1)}$ den elde edilen kısmen sıra ve $U^{2(2)}$ den elde edilen kısmen sıra çakışır. Böylece açıkça, $U^{2(2)} \sim U^{2(1)}$ olduğu elde edilir.

iii. $U^{2(1)}, U^{2(2)}, U^{2(3)} \in U_{k(e,f)}$, $U^{2(1)} \sim U^{2(2)}$ ve $U^{2(2)} \sim U^{2(3)}$ olsun. Buradan, $U^{2(1)}$ den elde edilen kısmen sıra ile $U^{2(2)}$ den elde edilen kısmen sıra ve $U^{2(2)}$ den elde edilen kısmen sıra ile $U^{2(3)}$ den elde edilen kısmen sıra çakışırlar. Böylece, $U^{2(1)}$ den elde edilen kısmen sıra ile $U^{2(3)}$ den elde edilen kısmen sıra çakışır ve buradan da $U^{2(1)} \sim U^{2(3)}$ olduğu elde edilir.

Böylece, ~ bağıntısının, $U_{k(e,f)}$ sınıfı üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu elde edilir. □

3.3. Tanım $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $U^2 \in U_{k(e,f)}$ olsun. $U^2 \in U_{k(e,f)}$ nin ~ denklik bağıntısına göre denklik sınıfı

$$\overline{U^2} = \{U^{2(*)} : U^{2(*)} \sim U^2\} \quad (5)$$

ile verilir. □

3.4 Önerme $(L,\leq,0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U^{2(1)},U^{2(2)}\in U_{k(e,f)}$ olsun. Eğer $T_{U_1^{2(1)}},S_{U_1^{2(1)}},T_{U_2^{2(1)}},S_{U_2^{2(1)}}$, $T_{U_1^{2(2)}},S_{U_1^{2(2)}},T_{U_2^{2(2)}}$ ve $S_{U_2^{2(2)}}$ bölünebilir ise $U^{2(1)}\sim U^{2(2)}$ dir.

İspat. $T_{U_1^{2(1)}},S_{U_1^{2(1)}},T_{U_2^{2(1)}},S_{U_2^{2(1)}}$, $T_{U_1^{2(2)}},S_{U_1^{2(2)}},T_{U_2^{2(2)}}$ ve $S_{U_2^{2(2)}}$ bölünebilir ise $\leq_{T_{U_1^{2(1)}}}=\leq_{S_{U_1^{2(1)}}}=\leq_{T_{U_2^{2(1)}}}=\leq_{S_{U_2^{2(1)}}}=\leq_{T_{U_1^{2(2)}}}=\leq_{S_{U_1^{2(2)}}}=\leq_{T_{U_2^{2(2)}}}=\leq_{S_{U_2^{2(2)}}}=\leq$ olduğunu verir. Buradan da, $\leq_{U^{2(1)}}=\leq_{U^{2(2)}}=\leq$ olduğu elde edilir. Böylece, $U^{2(1)}\sim U^{2(2)}$ olur. □

3.5. Uyarı

i) 3.4 Önerme'deki L kafesi $[0,1]$ birim reel aralık alınır ve $T_{U_1^{2(1)}},S_{U_1^{2(1)}},T_{U_2^{2(1)}},S_{U_2^{2(1)}}$, $T_{U_1^{2(2)}},S_{U_1^{2(2)}},T_{U_2^{2(2)}}$ ve $S_{U_2^{2(2)}}$ sürekli olacak şekilde $U^{2(1)},U^{2(2)},\in U_{k(e,f)}$ seçilirse 2.8. Önerme ve 2.20 Önerme'lerden $\leq_{U^{2(1)}}=\leq_{U^{2(2)}}=\leq$ olup $U^{2(1)}\sim U^{2(2)}$ elde edilir.

ii) 3.4. Önerme'nin tersi doğru olmak zorunda değildir. Örnek 3.6 buna bir örnek teşkil eder. □

3.6. Örnek $T^{nM}(x,y)$, $[0,e]$ üzerinde aşağıdaki gibi

$$T^{nM}(x,y)=\begin{cases}0, & x+y\leq e\\ min(x,y), & \text{aksi halde}\end{cases}\tag{6}$$

T^{nM}, $[k,f]$ üzerinde aşağıdaki gibi

$$T^{nM}(x,y)=\begin{cases}0, & x+y\leq f\\ min(x,y), & \text{aksi halde}\end{cases}\tag{7}$$

S_D t-konormu $[e,k]$ üzerinde aşağıdaki gibi

$$S_D(x,y)=\begin{cases}k, & (x,y)\in(e,k)^2\\ mak(x,y), & \text{aksi halde}\end{cases}\tag{8}$$

ve S_D t-konormu, $[f,1]$ üzerinde aşağıdaki gibi

$$S_D(x,y)=\begin{cases}f, & (x,y)\in(f,1)^2\\ mak(x,y), & \text{aksi halde}\end{cases}\tag{9}$$

seçilirse $U_1=U_{min}(T^{nM},S_D,e)$ $[0,k]$ üzerinde bir disjanktif uninorm ve $U_2=U_{min}(T^{nM},S_D,f)$ $[k,1]$ üzerinde bir konjanktif uninormdur (Beliakov vd., 2007). (2) ile

$$U^{2(1)}(x,y)=\begin{cases}U_1(x,y), & (x,y)\in[0,k]^2,\\ U_2(x,y), & (x,y)\in[k,1]^2,\\ k, & \textit{aksi halde}\end{cases}\tag{10}$$

$[0,1]$ üzerinde bir 2-uninormdur.

Benzer düşünceyle, $T^*(x,y)$, $[0,e]$ üzerinde aşağıdaki gibi

$$T^*(x,y)=\begin{cases}\frac{e}{2}, & x,y=\frac{e}{2}\\ T^{nM}, & \text{aksi halde}\end{cases}\tag{11}$$

T^{nM}, $[k,f]$ üzerinde aşağıdaki gibi

$$T^{nM}(x,y)=\begin{cases}0, & x+y\leq f\\ min(x,y), & \text{aksi halde}\end{cases}\tag{12}$$

S_D t-konormu $[e,k]$ üzerinde aşağıdaki gibi

$$S_D(x,y)=\begin{cases}k, & (x,y)\in(e,k)^2\\ mak(x,y), & \text{aksi halde}\end{cases}\tag{13}$$

ve S_D t-konormu, $[f,1]$ üzerinde aşağıdaki gibi

$$S_D(x,y)=\begin{cases}f, & (x,y)\in(f,1)^2\\ mak(x,y), & \text{aksi halde}\end{cases}\tag{14}$$

seçilirse $U_3=U_{min}(T^*,S_D,e)$ $[0,k]$ üzerinde bir disjanktif uninorm ve $U_2=U_{min}(T^{nM},S_D,f)$ $[k,1]$ üzerinde bir konjanktif uninormdur (Beliakov vd., 2007). (2) ile

$$U^{2(2)}(x,y)=\begin{cases}U_3(x,y), & (x,y)\in[0,k]^2\\ U_2(x,y), & (x,y)\in[k,1]^2\\ k, & \textit{aksi halde}\end{cases}\tag{15}$$

$[0,1]$ üzerinde bir 2-uninormdur. $U^{2(1)}$ ve $U^{2(2)}$ 2-uninormları sadece $[0,e]^2$ üzerinde farklılık gösterir. $U^{2(1)}\downarrow_{[0,e]^2}=T^{nM}$ ve $U^{2(2)}\downarrow_{[0,e]^2}=T^*$ olup $[0,e]^2$ üzerinde $\leq_{T^{nM}}=\leq_{T^*}$ olduğundan $\leq_{U^{2(1)}}=\leq_{U^{2(2)}}$ olduğu elde edilir. Fakat açıkça, $U^{2(1)}\left(\frac{e}{2},\frac{e}{2}\right)=T^{nM}\left(\frac{e}{2},\frac{e}{2}\right)=0\neq\frac{e}{2}=T^*\left(\frac{e}{2},\frac{e}{2}\right)=U^{2(2)}\left(\frac{e}{2},\frac{e}{2}\right)$ olduğundan $U^{2(1)}\neq U^{2(2)}$ dir. □

3.7.Teorem $(L,\leq,0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U^{2(1)},U^{2(2)}\in U_{k(e,f)}$ olsun. $T_{U_1^{2(1)}}\sim T_{U_1^{2(2)}}$, $S_{U_1^{2(1)}}\sim S_{U_1^{2(2)}}$, $T_{U_2^{2(1)}}\sim T_{U_2^{2(2)}}$ ve $S_{U_2^{2(1)}}\sim S_{U_2^{2(2)}}$ dir ancak ve ancak $U^{2(1)}\sim U^{2(2)}$ dir. □

İspat. $x,y\in L$ için $x\leq_{U^{2(1)}}y$ olsun.

- $x,y\in[0,e]$ ise $U^{2(1)}\downarrow_{[0,e]^2}=T_{U_1^{2(1)}}$ olduğundan $x\leq_{U^{2(1)}}y$ olması $x\leq_{T_{U_1^{2(1)}}}y$ olduğunu verir. Buradan, $T_{U_1^{2(1)}}\sim T_{U_1^{2(2)}}$ olduğu için $x\leq_{T_{U_1^{2(2)}}}y$ olduğu elde edilir.

$U^{2(2)} \downarrow_{[0,e]^2} = T_{U_1^{2(2)}}$ olduğundan, $x \leq_{T_{U_1^{2(2)}}} y$ olması $x \leq_{U^{2(2)}} y$ olmasını gerektirir.

- $x, y \in [e,k]$ ise $U^{2(1)} \downarrow_{[e,k]^2} = S_{U_1^{2(1)}}$ olduğundan $x \leq_{U^{2(1)}} y$ olması $x \leq_{S_{U_1^{2(1)}}} y$ olduğunu verir. Buradan, $S_{U_1^{2(1)}} \sim S_{U_1^{2(2)}}$ olduğu için $x \leq_{S_{U_1^{2(2)}}} y$ olduğu elde edilir. $U^{2(2)} \downarrow_{[e,k]^2} = S_{U_1^{2(2)}}$ olduğundan, $x \leq_{S_{U_1^{2(2)}}} y$ olması $x \leq_{U^{2(2)}} y$ olmasını gerektirir.
- $x, y \in [k,f]$ ise $U^{2(1)} \downarrow_{[k,f]^2} = T_{U_2^{2(1)}}$ olduğundan $x \leq_{U^{2(1)}} y$ olması $x \leq_{T_{U_2^{2(1)}}} y$ olduğunu verir. Buradan, $T_{U_2^{2(1)}} \sim T_{U_2^{2(2)}}$ olduğu için $x \leq_{T_{U_2^{2(2)}}} y$ olduğu elde edilir. $U^{2(2)} \downarrow_{[k,f]^2} = T_{U_2^{2(2)}}$ olduğundan, $x \leq_{T_{U_2^{2(2)}}} y$ olması $x \leq_{U^{2(2)}} y$ olmasını gerektirir.
- $x, y \in [f,1]$ ise $U^{2(1)} \downarrow_{[f,1]^2} = S_{U_2^{2(1)}}$ olduğundan $x \leq_{U^{2(1)}} y$ olması $x \leq_{S_{U_2^{2(1)}}} y$ olduğunu verir. Buradan, $S_{U_2^{2(1)}} \sim S_{U_2^{2(2)}}$olduğu için $x \leq_{S_{U_2^{2(2)}}} y$ olduğu elde edilir. $U^{2(2)} \downarrow_{[f,1]^2} = S_{U_2^{2(2)}}$ olduğundan, $x \leq_{S_{U_2^{2(2)}}} y$ olması $x \leq_{U^{2(2)}} y$ olmasını gerektirir.
- Aksi takdirde, $x \leq_{U^{2(1)}} y$ olması $x \leq y$ olmasını, bu ise $x \leq_{U^{2(2)}} y$ olduğunu verir.

Benzer şekilde, $T_{U_1^{2(1)}} \sim T_{U_1^{2(2)}}, S_{U_1^{2(1)}} \sim S_{U_1^{2(2)}}, T_{U_2^{2(1)}} \sim T_{U_2^{2(2)}}$ ve $S_{U_2^{2(1)}} \sim S_{U_2^{2(2)}}$ varsayımları altında $x \leq_{U^{2(2)}} y$ olması $x \leq_V y$ olduğunu verir. Böylece, $T_{U_1^{2(1)}} \sim T_{U_1^{2(2)}}, S_{U_1^{2(1)}} \sim S_{U_1^{2(2)}}, T_{U_2^{2(1)}} \sim T_{U_2^{2(2)}}$ ve $S_{U_2^{2(1)}} \sim S_{U_2^{2(2)}}$ ise $U^{2(1)} \sim U^{2(2)}$ olduğu elde edilir.

Tersine, $U_1^2 \sim U_2^2$ olsun. O halde, $\leq_{U^{2(1)}} = \leq_{U^{2(2)}}$ dir. Böylece, $\leq_{U^{2(1)}\downarrow_{[0,e]^2}} = \leq_{U^{2(2)}\downarrow_{[0,e]^2}}$, $\leq_{U^{2(1)}\downarrow_{[e,k]^2}} = \leq_{U^{2(2)}\downarrow_{[e,k]^2}}$, $\leq_{U^{2(1)}\downarrow_{[k,f]^2}} = \leq_{U^{2(2)}\downarrow_{[k,f]^2}}$ ve $\leq_{U^{2(1)}\downarrow_{[f,1]^2}} = \leq_{U^{2(2)}\downarrow_{[f,1]^2}}$ olduğu açıktır ve bu eşitliklerden sırasıyla $\leq_{T_{U_1^{2(1)}}} = \leq_{T_{U_1^{2(2)}}}$, $\leq_{S_{U_1^{2(1)}}} = \leq_{S_{U_1^{2(2)}}}$, $\leq_{T_{U_2^{2(1)}}} = \leq_{T_{U_2^{2(2)}}}$ ve $\leq_{S_{U_2^{2(1)}}} = \leq_{S_{U_2^{2(2)}}}$ olduğu elde edilir. Bu ise, $T_{U_1^{2(1)}} \sim T_{U_1^{2(2)}}, S_{U_1^{2(1)}} \sim S_{U_1^{2(2)}}, T_{U_2^{2(1)}} \sim T_{U_2^{2(2)}}$ ve $S_{U_2^{2(1)}} \sim S_{U_2^{2(2)}}$ olduğunu verir. □

4. $\leq_{U^2}$ Sıralamasına Göre Kıyaslanamayan Tüm Elemanların Kümesi K_{U^2}

Bu bölümde, $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde tanımlı $U^2 \in \mathcal{U}_{k(e,f)}$ uninormu için $\leq_{U^2}$ sıralamasına göre kıyaslanamayan elemanların kümesi K_{U^2} kümesinin bazı özellikleri araştırılmış ve $K_{U^2} = K_{T_{U_1^2}} \cup K_{S_{U_1^2}} \cup I_e \cup M_e \cup K_{T_{U_2^2}} \cup K_{S_{U_2^2}} \cup I_f \cup M_f \cup I_k$ eşitliği ve $\leq_{U^2}$ sıralamasına göre x elemanı ile kıyaslanamayan elemanların kümesi $I_{U^2}^{(x)}$ ile K_{U^2} nin ilişkisi ortaya koyulmuştur.

4.1. Tanım $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U^2 \in \mathcal{U}_{k(e,f)}$ olsun.

$$K_{U^2} = \{x \in L \setminus \{0,1\} : (x < y \text{ ve } x \nleq_{U^2} y)\ veya\ (y < x \text{ ve } y \nleq_{U^2} x)\ veya\ x \| y\ \ olacak\ şekilde\ y \in L \setminus \{0,1\}\ mevcuttur.\}$$

$$K_{T_{U_1^2}} = \{x \in [0,e] \setminus \{0,e\} : \left(x < y \text{ ve } x \nleq_{T_{U_1^2}} y\right)\ veya\ \left(y < x \text{ ve } y \nleq_{T_{U_1^2}} x\right)\ veya\ x \| y\ \ olacak\ şekilde\ y \in x \in [0,e] \setminus \{0,e\}\ mevcuttur.\}$$

$$K_{S_{U_1^2}} = \{x \in [e,k] \setminus \{e,k\} : \left(x < y \text{ ve } x \nleq_{S_{U_1^2}} y\right)\ veya\ \left(y < x \text{ ve } y \nleq_{S_{U_1^2}} x\right)\ veya\ x \| y\ \ olacak\ şekilde\ y \in x \in [e,k] \setminus \{e,k\}\ mevcuttur.\}$$

$$K_{T_{U_2^2}} = \{x \in [k,f] \setminus \{k,f\} : \left(x < y \text{ ve } x \nleq_{T_{U_2^2}} y\right)\ veya\ \left(y < x \text{ ve } y \nleq_{T_{U_2^2}} x\right)\ veya\ x \| y\ \ olacak\ şekilde\ y \in x \in [k,f] \setminus \{k,f\}\ mevcuttur.\}$$

$$K_{S_{U_2^2}} = \{x \in [f,1] \setminus \{f,1\} : \left(x < y \text{ ve } x \nleq_{S_{U_2^2}} y\right)\ veya\ \left(y < x \text{ ve } y \nleq_{S_{U_2^2}} x\right)\ veya\ x \| y\ \ olacak\ şekilde\ y \in x \in [f,1] \setminus \{f,1\}\ mevcuttur.\}$$

olarak tanımlanır.

4.2. Önerme $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U^2 \in \mathcal{U}_{k(e,f)}$ olsun. O halde

$M_e = \{x \in L \ : \ y \in I_e \ olan\ bazı\ y \in L\ ler\ için\ y \| x\ dir.\}$ (16)

ve

$M_f = \{x \in L \ : \ y \in I_f \ olan\ bazı\ y \in L\ ler\ için\ y \| x\ dir.\}$ (17)

olmak üzere

$K_{U^2} = \cup K_{S_{U_1^2}} \cup I_e \cup M_e \cup K_{T_{U_2^2}} \cup K_{S_{U_2^2}} \cup I_f \cup M_f \cup I_k$ (18)

dir. ▫

İspat. $K_{T_{U_1^2}}, K_{S_{U_1^2}}, I_e, M_e, K_{T_{U_2^2}}, K_{S_{U_2^2}}, I_f$, M_f ve I_k kümeleri tanımlanışı gereği K_{U^2} kümesinin alt kümeleridir. Buradan, $K_{T_{U_1^2}} \cup K_{S_{U_1^2}} \cup I_e \cup M_e \cup K_{T_{U_2^2}} \cup K_{S_{U_2^2}} \cup I_f \cup M_f \cup I_k \subseteq K_{U^2}$ olduğu elde edilir. Tersine, $x \in K_{U^2}$ keyfi alalım. O halde, $(x < y$ ve $x \npreceq_{U^2} y)$ veya $(y < x$ ve $y \npreceq_{U^2} x)$ olacak şekilde $y \in L \setminus \{0,1\}$ mevcuttur. Keyfi bir $x \in L$ için $x \le k, x \ge k$ veya $x \| k$ dir. İlaveten, $x \le k$ ise $x \le e, x \ge e$ veya $x \| e$, $x \ge k$ ise $x \le f, x \ge f$ veya $x \| f$ olmak zorundadır. Yani bir $x \in L$ için mümkün durumlar $x \in [0, e]$, $x \in [e, k]$, $x \| e$, $x \in [k, f]$, $x \in [f, 1]$, $x \| f$ veya $x \| k$ dır.

i) $x \in [0, e]$ olsun.

i-1) $y \in [e, 1]$ olsun. Buradan, $\preceq_{U^2}$ nin tanımı gereği $x \preceq_{U^2} y$ olur. Bu ise, $x \in K_{U^2}$ olması ile çelişir.

i-2) $y \in [0, e]$ olsun. Bu durumda, $x < y$, $y < x$ veya $x \| y$ olabilir.

- $x < y$ olsun. Varsayalım ki, $x \preceq_{T_{U_1^2}} y$ olsun. O halde, $U^2(l, y) = T_{U_1^2}(l, y) = x$ olacak şekilde $l \in [0, e]$ mevcuttur. Böylece, $x \preceq_{U^2} y$ olur ki, bu bir çelişkidir. O halde, $x \npreceq_{T_{U_1^2}} y$ olup $x \in K_{T_{U_1^2}}$ olur.
- $y < x$ olsun. Varsayalım ki, $y \preceq_{T_{U_1^2}} x$ olsun. O halde, $U^2(l, x) = T_{U_1^2}(l, x) = y$ olacak şekilde $l \in [0, e]$ mevcuttur. Böylece, $y \preceq_{U^2} x$ olur ki, bu bir çelişkidir. O halde, $y \npreceq_{T_{U_1^2}} x$ olup $x \in K_{T_{U_1^2}}$ olur.
- $x \| y$ olsun. $x, y \in [0, e]$ olduğundan, $K_{T_{U_1^2}}$ nin tanımından açıkça $x \in K_{T_{U_1^2}}$ olur.

i-3) $y \| e$ olsun. y, e ile kıyaslanamayan bir eleman olduğundan bu durum için $x \| y$ olmak zorundadır ($x \le y$ olursa $x \preceq_{U^2} y$ olacağından, $y \le x$ olursa $y \le x \le e$ olduğundan çelişki elde edilir). $y \| e$ ve $x \| y$ olduğundan $x \in M_e$ olur.

ii) $x \in [e, k]$ olsun.

ii-1) $y \in [0, e]$ $(y \in [k, 1])$ olsun. Buradan, $\preceq_{U^2}$ nin tanımı gereği $y \preceq_{U^2} x$ $(x \preceq_{U^2} y)$ olur. Bu ise, $x \in K_{U^2}$ olması ile çelişir.

ii-2) $y \in [e, k]$ olsun. Bu durumda, $x < y$, $y < x$ veya $x \| y$ olabilir.

- $x < y$ olsun. Varsayalım ki, $x \preceq_{S_{U_1^2}} y$ olsun. O halde, $U^2(l, x) = S_{U_1^2}(l, x) = y$ olacak şekilde $l \in [e, k]$ mevcuttur. Böylece, $x \preceq_{U^2} y$ olur ki, bu bir çelişkidir. O halde, $x \npreceq_{S_{U_1^2}} y$ olup $x \in K_{S_{U_1^2}}$ olur.
- $y < x$ olsun. Varsayalım ki, $y \preceq_{S_{U_1^2}} x$ olsun. O halde, $U^2(l, y) = S_{U_1^2}(l, y) = x$ olacak şekilde $l \in [e, k]$ mevcuttur. Böylece, $y \preceq_{U^2} x$ olur ki, bu bir çelişkidir. O halde, $y \npreceq_{S_{U_1^2}} x$ olup $x \in K_{S_{U_1^2}}$ olur.
- $x \| y$ olsun. $x, y \in [e, k]$ olduğundan, $K_{S_{U_1^2}}$ nin tanımından açıkça $x \in K_{S_{U_1^2}}$ olur.

ii-3) $y \| e$ olsun. y, e ile kıyaslanamayan bir eleman olduğundan bu durum için $x \| y$ olmak zorundadır ($x \le y$ olursa $e \le x \le y$ olduğundan, $y \le x$ olursa $y \preceq_{U^2} x$ olacağından çelişki elde edilir). $y \| e$ ve $x \| y$ olduğundan $x \in M_e$ olur.

iii) $x \in [k, f]$ olsun.

iii-1) $y \in [0, k]$ $(y \in [f, 1])$olsun. Buradan, $\preceq_{U^2}$ nin tanımı gereği $y \preceq_{U^2} x$ $(x \preceq_{U^2} y)$ olur. Bu ise, $x \in K_{U^2}$ olması ile çelişir.

iii-2) $y \in [k, f]$ olsun. Bu durumda, $x < y$, $y < x$ veya $x \| y$ olabilir.

- $x < y$ olsun. Varsayalım ki, $x \preceq_{T_{U_2^2}} y$ olsun. O halde, $U^2(l, y) = T_{U_2^2}(l, y) = x$ olacak şekilde $l \in [k, f]$ mevcuttur. Böylece, $x \preceq_{U^2} y$ olur ki, bu bir çelişkidir. O halde, $x \npreceq_{T_{U_2^2}} y$ olup $x \in K_{T_{U_2^2}}$ olur.
- $y < x$ olsun. Varsayalım ki, $y \preceq_{T_{U_2^2}} x$ olsun. O halde, $U^2(l, x) = T_{U_2^2}(l, x) = y$ olacak şekilde $l \in [k, f]$ mevcuttur. Böylece, $y \preceq_{U^2} x$ olur ki,

bu bir çelişkidir. O halde, $y \nleq_{T_{U_2^2}} x$ olup $x \in K_{T_{U_2^2}}$ olur.

– $x \| y$ olsun. $x, y \in [k, f]$ olduğundan, $K_{T_{U_2^2}}$ nin tanımından açıkça $x \in K_{T_{U_2^2}}$ olur.

iii-3) $y \| f$ olsun. y, f ile kıyaslanamayan bir eleman olduğundan bu durum için $x \| y$ olmak zorundadır ($x \leq y$ olursa $x \leq_{U^2} y$ olacağından, $y \leq x$ olursa $y \leq x \leq f$ olduğundan çelişki elde edilir). $y \| f$ ve $x \| y$ olduğundan $x \in M_f$ olur.

iv) $x \in [f, 1]$ olsun.

iv-1) $y \in [0, f]$ olsun. Buradan, $\leq_{U^2}$ nin tanımı gereği $y \leq_{U^2} x$ olur. Bu ise, $x \in K_{U^2}$ olması ile çelişir.

iv-2) $y \in [f, 1]$ olsun. Bu durumda, $x < y$, $y < x$ veya $x \| y$ olabilir.

– $x < y$ olsun. Varsayalım ki, $x \leq_{S_{U_2^2}} y$ olsun. O halde, $U^2(l, x) = S_{U_2^2}(l, x) = y$ olacak şekilde $l \in [k, 1]$ mevcuttur. Böylece, $x \leq_{U^2} y$ olur ki, bu bir çelişkidir. O halde, $x \nleq_{S_{U_2^2}} y$ olup $x \in K_{S_{U_2^2}}$ olur.

– $y < x$ olsun. Varsayalım ki, $y \leq_{S_{U_2^2}} x$ olsun. O halde, $U^2(l, y) = S_{U_2^2}(l, y) = x$ olacak şekilde $l \in [k, 1]$ mevcuttur. Böylece, $y \leq_{U^2} x$ olur ki, bu bir çelişkidir. O halde, $y \nleq_{S_{U_2^2}} x$ olup $x \in K_{S_{U_2^2}}$ olur.

– $x \| y$ olsun. $x, y \in [e, k]$ olduğundan, $K_{S_{U_2^2}}$ nin tanımından açıkça $x \in K_{S_{U_2^2}}$ olur.

iv-3) $y \| f$ olsun. y, f ile kıyaslanamayan bir eleman olduğundan bu durum için $x \| y$ olmak zorundadır ($x \leq y$ olursa $f \leq x \leq y$ olduğundan, $y \leq x$ olursa $y \leq_{U^2} x$ olacağından çelişki elde edilir). $y \| f$ ve $x \| y$ olduğundan $x \in M_f$ olur.

v) $x \| e$ olsun. Bu takdirde, $x \in I_e$ dir.
vi) $x \| f$ olsun. Bu takdirde, $x \in I_f$ dir.
vii) $x \| k$ olsun. Bu takdirde, $x \in I_k$ dır.

Böylece, $K_{U^2} \subseteq K_{T_{U_1^2}} \cup K_{S_{U_1^2}} \cup I_e \cup M_e \cup K_{T_{U_2^2}} \cup K_{S_{U_2^2}} \cup I_f \cup M_f \cup I_k$ olduğu elde edilir.
O halde, $K_{U^2} = K_{T_{U_1^2}} \cup K_{S_{U_1^2}} \cup I_e \cup M_e \cup K_{T_{U_2^2}} \cup K_{S_{U_2^2}} \cup I_f \cup M_f \cup I_k$ dir. □

2-uninormların uninormları kapsayan bir sınıf olduğu gerçeği göz önüne alındığında, 2-uninormlar için (18) ile verilen $K_{U^2} = \cup K_{S_{U_1^2}} \cup I_e \cup M_e \cup K_{T_{U_2^2}} \cup K_{S_{U_2^2}} \cup I_f \cup M_f \cup I_k$ eşitliğinin, (Kesicioğlu vd., 2017) çalışmasında uninormlar için elde edilen eşitliğin daha geneli olacağı açıktır. Dahası U^2 2-uninormu için e ve f birim elemanları $e = f$ koşulunu sağlarsa U^2 2-uninormu bir uninorm olur ve U^2 2-uninormu için elde edilen (18) eşitliği (Kesicioğlu vd., 2017) de verilen eşitlikle çakışır. Bu çalışmada elde edilen eşitliğe dikkat edilirse, I_k kümesinin varlığı da bu eşitliğin daha genel bir form olduğunu doğrular niteliktedir.

4.3. Sonuç $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U^2 \in U_{k(e,f)}$ olsun. $I_e = I_f = I_k = \emptyset$ ise

$$K_{U^2} = K_{T_{U_1^2}} \cup K_{S_{U_1^2}} \cup K_{T_{U_2^2}} \cup K_{S_{U_2^2}} \quad (19)$$

dir. □

İspat. $I_e = \emptyset$ ise $M_e = \emptyset$ ve $I_f = \emptyset$ ise $M_f = \emptyset$ olduğundan $I_e = I_f = I_k = \emptyset$ iken $K_{U^2} = K_{T_{U_1^2}} \cup K_{S_{U_1^2}} \cup K_{T_{U_2^2}} \cup K_{S_{U_2^2}}$ olduğu elde edilir.

4.4. Sonuç $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir zincir ve $U^2 \in U_{k(e,f)}$ olsun. Bu takdirde,

$$K_{U^2} = K_{T_{U_1^2}} \cup K_{S_{U_1^2}} \cup K_{T_{U_2^2}} \cup K_{S_{U_2^2}} \quad (20)$$

dir. □

4.5. Önerme $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U^2 \in U_{k(e,f)}$ olsun. $c \in L$ olmak üzere, $\leq_{U^2}$ sıralamasına göre c elemanı ile kıyaslanamayan elemanların kümesi

$$I_{U^2}^{(c)} = \{x \in L \setminus \{0,1\} : x, \leq_{U^2} \text{ sıralamasına göre c ile kıyaslanamazdır}\} \quad (21)$$

olmak üzere $K_{U^2} = \bigcup_{x \in L} I_{U^2}^{(x)}$ dir. □

İspat. $x \in L$ keyfi alındığında $I_{U^2}^{(x)}$ kümesinin tanımlanışı gereği $I_{U^2}^{(x)} \subseteq K_{U^2}$ dir. Böylece, $\bigcup_{x \in L} I_{U^2}^{(x)} \subseteq K_{U^2}$ olduğu elde edilir.

Tersine, $y \in K_{U^2}$ keyfi alınsın. Böylece [$y < z$ ve $y \nleq_{U^2} z$] veya [$z < y$ ve $z \nleq_{U^2} y$] veya $z \| y$ olacak şekilde $z \in L \setminus \{0,1\}$ mevcuttur.

- $y < z$ ve $y \nleq_{U^2} z$ olsun. $z \leq_{U^2} y$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $z \leq y$ elde edilir ki bu $y < z$ ile çelişir. Böylece, $z \nleq_{U^2} y$ olduğu elde edilir. $y \nleq_{U^2} z$ ve $z \nleq_{U^2} y$ olduğundan, y, $\leq_{U^2}$ sıralamasına göre z ile kıyaslanamazdır. Böylece, $y \in I_{U^2}^{(z)}$ olur.

- $z < y$ ve $z \nleq_{U^2} y$ olsun. $y \leq_{U^2} z$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $y \leq z$ elde edilir ki bu $z < y$ ile çelişir. Böylece, $y \nleq_{U^2} z$ olduğu elde edilir. $y \nleq_{U^2} z$ ve $z \nleq_{U^2} y$ olduğundan, y, $\leq_{U^2}$ sıralamasına göre z ile kıyaslanamazdır. Böylece, $y \in I_{U^2}^{(z)}$ olur.
- $z \| y$ olsun. Buradan açıkça, $y \nleq_{U^2} z$ ve $z \nleq_{U^2} y$ olduğu elde edilir. Böylece, $y \in I_{U^2}^{(z)}$ olur.

O halde, $y \in K_{U^2}$ keyfi elemanı için, $y \in I_{U^2}^{(z)}$ olacak şekilde $z \in L \setminus \{0,1\}$ mevcuttur. O halde, $y \in \bigcup_{x \in L} I_{U^2}^{(x)}$ olup $K_{U^2} \subseteq \bigcup_{x \in L} I_{U^2}^{(x)}$ olduğu elde edilir. $\square$

5. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada şu sonuçlar elde edilmiştir. 2-uninormlar üzerinde bir bağıntı tanımlanarak, bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu elde edilmiştir. 2-uninormun belirlediği üçgensel normlar ve konormlardan elde edilen sıralama ile 2-uninormlardan elde edilen sıralama arasındanki ilişki araştırılmış ve aralarındaki ilişki ortaya konulmuştur. 2-uninormlardan elde edilen sıralama bağıntısına göre kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi K_{U^2} nin karakterize edilmiştir. x elemanı ile kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi $I_{U^2}^{(x)}$ ile K_{U^2} ilişkisi ortaya konmuştur.

Kaynaklar

Akella, P., 2007. Structure of n-Uninorms, Fuzzy Sets and Systems, 158, 1631-1651.

Beliakov, G., Pradera, A. ve Calvo, T., 2007, Aggregation Functions: A Guide for Practitioners, in: Studies in Fuzziness and Soft Computing, 221, Springer, Berlin, Heidelberg, 361p.

Birkhoff G., 1967, Lattice Theory, 3 rd edition, Providence, Rhode Island, 418p.

Ertuğrul, Ü., 2017a. Some properties of orders generated by uninorm and 2-uninorm, New Trends in Mathematical Sciences, 1, 278-286.

Ertuğrul, Ü., 2017b. A Way to Obtain 2-Uninorm on Bounded Lattice from Uninorms Defined on Subintervals of Bounded Lattice, New Trends in Mathematical Sciences, 2, 1-9.

Ertuğrul, Ü., 2018. Construction of nullnorms on bounded lattices and an equivalence relation on nullnorms, Fuzzy Sets and Systems, https://doi.org/10.1016/j.fss.2017.07.020.

Ertuğrul, Ü., Kesicioğlu, M.N. ve Karaçal, F., 2016. Ordering Based on Uninorms, Information Sciences, 330, 315-327.

Ertuğrul, Ü., Kesicioğlu, M.N. ve Karaçal, F., 2017. Ordering Based on 2-Uninorms on Bounded Lattices, New Trends in Mathematical Sciences, 1, 287-293.

Grabish, M., Marichal, J.-L., Mesiar, R. ve Pap, E., 2009, Aggregation Functions, Cambridge University Press, 460p.

Hliněná, D., Kalina, M. ve Král P., 2014. Pre-orders and Orders Generated by Conjunctive Uninorms, Inf. Proc. Manage. Uncert. Knowl. Based Syst., 30, 807-817.

Karaçal, F., Ertuğrul, Ü. ve Mesiar, R., 2017. Characterization of Uninorms on Bounded Lattices, Fuzzy Sets and Systems, 308, 54-71.

Karaçal, F. ve Kesicioğlu, M.N., 2011. A T-partial Order Obtained From T-norms, Kybernetika, 47, 300-314.

Karaçal, F. ve Mesiar, R., 2015. Uninorms on Bounded Lattices, Fuzzy Sets and Systems, 261, 33-43.

Kesicioğlu, M.N., Ertuğrul, Ü. ve Karaçal, F., 2017. An Equivalence Relation Based On The U-Partial Order, Information Sciences, 411, 39-51.

Kesicioğlu, M.N., Karaçal, F. ve Mesiar, R., 2015. Order-equivalent Triangular Norms, Fuzzy Sets and Systems, 268, 59-71.

Kesicioğlu, M.N. ve Mesiar, R., 2014. Ordering Based on Implications, Information Sciences, 276, 377-386.

Yager, R.R. ve Rybalov, A., 1996. Uninorm Aggregation Operators, Fuzzy Sets and Systems, 80, 111-120.