GÜFBED/*GUSTIJ* (2018) 8 (2): 348-357
DOI: 10.17714/gumusfenbil.398292 Araştırma Makalesi / *Research Article*

Eğri Ailelerinin $GL(n, \mathbb{R})$ deki Denklikleri ve Diferansiyel İnvaryantlar

Equivalence of Curve Families in $GL(n, \mathbb{R})$ and Differential Invariants

Yasemin SAĞIROĞLU[a], Uğur GÖZÜTOK*[b]
Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 61080, Trabzon

• Geliş tarihi / *Received*: 24.02.2018 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 09.04.2018 • Kabul tarihi / *Accepted*: 17.04.2018

Öz
Bu çalışmada $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ parametrik eğrileriyle oluşturulan $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_m >^{GL(n,\mathbb{R})}$ kümesinin üreteç kümesi bulunmuştur. Herhangi iki eğri ailesinin $GL(n, \mathbb{R})$-denklik koşulları, diferansiyel invaryantlar kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca üreteç sisteminin minimal olduğu gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Denklik problemi, Diferansiyel invaryantlar, Eğriler

Abstract
In this study, the generating system of the set $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_m >^{GL(n,\mathbb{R})}$ formed by the parametric curves $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ is obtained. The conditions of $GL(n, \mathbb{R})$-equivalence of two curve families are given by means of the differential invariants. It is also shown that the generating system is minimal.

Keywords*: Curves, Differential invariants, Equivalence problem*

*[b] Uğur GÖZÜTOK; ugurgozutok@ktu.edu.tr; Tel: (0462) 377 37 06; orcid.org/0000-0002-6072-3134
[a] orcid.org/0000-0003-0660-211X

1. Giriş

Öklid geometrisindeki problemlerin ilk olarak araştırılmasından sonra, Öklid'den daha geniş olan centro-affine, centro-equi-affine ve projektif gibi geometrilerde, geometrik objelerin özellikleri tartışılmıştır. Sonra Öklid'den farklı olan temel gruplara göre

$$(SL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{R}), SAff(n,\mathbb{R}), Aff(n,\mathbb{R}))$$

diferansiyel geometrinin çalışılması fikri doğmuştur. Böylece Felix Klein'ın Erlangen programından sonra farklı geometrilerde diferansiyel geometri çalışmalarına başlanmıştır.

Eğrilerin denklik problemi çokça bilinen ve uzun yıllar araştırılan bir konudur. Eğrilerin denklik probleminin diferansiyel invaryantlar kullanılarak araştırılması son yıllarda önem kazanmıştır (Izumiya ve Sano, 2000; Nadjafikhah, 2002). Öklid uzayında iki eğrinin denkliğinin, bu eğrilerin eğrilik ve burulmalarına bağlı olduğu bilinmektedir. Öklid geometrisi dışındaki geometrilerde de eğrilerin denklik probleminin araştırılması yapılmaktadır. Afin geometride ve alt gruplarının bazılarında bu problem araştırılmıştır (Giblin ve Sano, 2012; Khadjiev ve Pekşen, 2004; Sağıroğlu ve Pekşen, 2010; İncesu ve Gürsoy, 2017; Pekşen ve Khadjiev, 2004).

$GL(n,\mathbb{R})$ grubunda da literatürde diferansiyel invaryantlarla ilgili çalışmalar mevcuttur (Olver, 2010; Gardner ve Wilkens, 1997; Sağıroğlu ve Yapar, 2016; Pekşen ve Khadjiev, 2004). Afin grubun farklı alt gruplarında ve farklı boyutlarda eğri ailelerinin denklik problemi araştırılmıştır (Sağıroğlu, 2015; Sağıroğlu, 2016). $GL(n,\mathbb{R})$ grubunda eğrilerin denklik problemi, iki eğri için (Pekşen ve Khadjiev, 2004) çalışmasında araştırılmıştır. Ayrıca (Sağıroğlu ve Yapar, 2016) da ikili eğri aileleri için aynı problem araştırılmıştır.

Bu çalışmada $GL(n,\mathbb{R})$ grubunda keyfi, sonlu sayıda eğri ailelerinin denklik problemi araştırılmış, bunlar için bir genelleştirme elde edilmiştir. İkinci bölümde çalışmanın tabanını oluşturan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise $GL(n,\mathbb{R})$ grubuna göre m tane eğrinin diferansiyel invaryantlarının üreteç kümesi elde edilmiştir. Ayrıca bu diferansiyel invaryantlar kullanılarak keyfi m eğrinin, bir başka m eğriye denklik koşulları oluşturulmuştur. Son olarak, burada elde edilen diferansiyel invaryantların cebirsel bağımsız yani minimal olduğu gösterilmiştir.

2. Ön Bilgiler

$\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve $I=(a,b)$, $\mathbb{R}$ de bir açık aralık olsun. Bir $x: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞-dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ de bir parametrik eğri denir. $x_1, x_2, \dots, x_m$ $\mathbb{R}^n$ de m tane parametrik eğri olsun. Bunları ve sonlu türevlerini içeren reel katsayılı bir polinom, bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$P\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = P(x_1, x_2, \dots, x_m, x_1', x_2', \dots, x_m', \dots, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_m^{(k)})$$

olarak verilir. Bu polinoma bir diferansiyel polinom denir.

$$f < x_1, x_2, \dots, x_m > = \frac{P_1\{x_1, x_2, \dots, x_m\}}{P_2\{x_1, x_2, \dots, x_m\}}, \quad P_2\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \neq 0$$

fonksiyonuna da bir diferansiyel rasyonel fonksiyon denir. Bütün diferansiyel rasyonel fonksiyonların kümesi $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_m >$ ile gösterilir. Bu bir diferansiyel cisimdir.

$n \times n$ tipli bütün kare matrislerin kümesini $M_{n\times n}$ ile ifade edelim. $M_{n\times n}$ matrislerin çarpma işlemine göre bir grup yapısına sahiptir.

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{g \in M_{n\times n} : detg \neq 0\}$$

kümesi matrislerin çarpma işlemine göre $M_{n\times n}$ nin bir alt grubudur.

$f < x_1, x_2, \dots, x_m > \in R < x_1, x_2, \dots, x_m >$ verilsin.

Eğer keyfi $g \in GL(n,\mathbb{R})$ için

$$f < gx_1, gx_2, \dots, gx_m > = f < x_1, x_2, \dots, x_m >$$

oluyorsa $f < x_1, x_2, \dots, x_m >$ diferansiyel rasyonel fonksiyonuna $GL(n,\mathbb{R})$-invaryanttır denir. Bütün $GL(n,\mathbb{R})$-invaryant diferansiyel rasyonel fonksiyonların kümesi $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_m >^{GL(n,\mathbb{R})}$ ile ifade edilir. $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_m >^{GL(n,\mathbb{R})}$ kümesi $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_m >$ kümesinin bir diferansiyel alt cismidir.

Tanım 2.1. (Sağıroğlu, 2012) $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_m >^{GL(n,\mathbb{R})}$ nin boştan farklı bir S alt kümesi verilsin. Eğer S yi içeren en küçük diferansiyel alt cisim $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_m >^{GL(n,\mathbb{R})}$ ye eşitse, S kümesine $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_m >^{GL(n,\mathbb{R})}$ nin üreteç kümesi denir.

Lemma 2.2. (Sağıroğlu, 2012) $\mathbb{R}^n$ deki keyfi $x_0, x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_n$ vektörleri için

$$[x_1 x_2 \dots x_n][x_0 y_2 \dots y_n] - [x_0 x_2 \dots x_n][x_1 y_2 \dots y_n] - \dots - [x_1 x_2 \dots x_0][x_n y_2 \dots y_n] = 0.$$

Tanım 2.3. (Sağıroğlu, 2012) x, $\mathbb{R}^n$ de bir parametrik eğri olsun. Eğer her $t \in I$ için $\left[x(t) x'(t) \dots x^{(n-1)}(t)\right] \neq 0$ ise x parametrik eğrisine $GL(n,\mathbb{R})$-regülerdir denir.

Tanım 2.4. (Sibirskii, 1976) G-invaryant fonksiyonlardan oluşan bir $P = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ tam sistemi için eğer keyfi bir $i \in \{1,2,\dots m\}$ için $P \backslash \{f_i\}$ tam değil ise P ye minimal sistem denir.

3. Ana Teorem ve Sonuçlar

Teorem 3.1. $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ $\mathbb{R}^n$ de m tane parametrik eğri olsun öyle ki x_1 parametrik eğrisi $GL(n,\mathbb{R})$-regülerdir. Bu durumda $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_m >^{GL(n,\mathbb{R})}$ kümesinin üreteç sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(n)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_2 x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \dots, \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_m x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} \quad (1)$$

$i = 0,1, \dots n-1.$

İspat. $\{x_j, j \in T\}$, $T \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^n$ de keyfi, sayılabilir sayıda vektör ailesi olsun. $G = GL(n,\mathbb{R})$ grubuna göre $\mathbb{R}(x_j, j \in T)^G$ kümesinin üreteç kümesi

$$\frac{\left[x_0 \dots x_{i-1} x_j x_{i+1} \dots x_{n-1}\right]}{\left[x_0 \dots x_{n-1}\right]}, \quad i = 0,1,\dots,n-1, j \in T \backslash \{0,1,\dots,n-1\}$$

biçimindedir (Sağıroğlu ve Yapar, 2016). Yukarıdaki x_j vektörleri yerine

$$x_1, x_2, \dots, x_m, x_1', x_2', \dots, x_m', \dots, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}, \dots$$

vektörlerini alacak olursak, $\mathbb{R}\left(x_1, x_2, \dots, x_m, x_1', x_2', \dots, x_m', \dots, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}, \dots\right)^G$ kümesinin üreteç kümesi

$$\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \quad i = 0,1,\dots,n-1, j \in T \backslash \{0,1,\dots,n-1\}$$

$$\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_2^{(j)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \quad j \geq 0, \dots, \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_m^{(j)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \quad j \geq 0$$

biçimindedir.

Aradığımız üreteç kümesinin (1) olduğunu göstermek için, öncelikle

$$\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \quad j \geq n$$

fonksiyonlarının

$$\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(n)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \quad i = 0,1,\dots,n-1$$

ifadeleri ile üretilebildiğini indüksiyon ile gösterelim. $j = n$ için elde edilen fonksiyonlar (1) içerisindedir. $j > n$ olsun. $j-1$ için doğru olsun. Yani,

$$\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \quad i = 0,1,\dots,n-1$$

fonksiyonları (1) ile üretilebilsin.

$$\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]'$$

türevi ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right] &= \left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]' \\ &- \left[x_1 \dots x_1^{(i-2)} x_1^{(i)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right] \\ &- \left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-2)} x_1^{(n)}\right].\end{aligned}$$

x_1 regüler olduğundan $\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right] \neq 0$ dır. Her iki tarafın bu fonksiyona bölünmesiyle

$$\begin{aligned}\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} &= \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]'}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} - \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-2)} x_1^{(i)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} \\ &- \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-2)} x_1^{(n)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}\end{aligned} \tag{2}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}\left(\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}\right)' &= \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]' \left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]^2} \\ &- \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right] \left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]'}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]^2}\end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned}\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]'}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} &= \left(\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}\right)' \\ &+ \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(j-1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-2)} x_1^{(n)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}\end{aligned}$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki terimlerin her biri üreteç kümesi ile üretilebileceğinden sol taraf da (1) ile üretilebilir. (2) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci fonksiyon da üreteç kümesindedir. Üçüncü terimin de (1) ile üretilebildiğini göstermek için

$$x_1 = x_1, x_2 = x_1', \dots, x_n = x_1^{(n-1)}, x_0 = x_1^{(n)}, y_2 = x_1, y_3 = x_1', \dots, y_n = x_1^{(n-2)}$$

olarak alalım.

Lemma 2.2. ‘den

$$\frac{\left[x_1^{(n)}x_1 \dots x_1^{(j-1)} \dots x_1^{(n-2)}\right]}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} = \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)}x_1^{(n)}x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-2)}\right]}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}\frac{\left[x_1^{(i)}x_1 \dots x_1^{(j-1)} \dots x_1^{(n-2)}\right]}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} + \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(j-1)} \dots x_1^{(n-2)}x_1^{(n)}\right]}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}\frac{\left[x_1^{(n-1)}x_1 \dots x_1^{(j-1)} \dots x_1^{(n-2)}\right]}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(j-1)} \dots x_1^{(n-2)}x_1^{(n)}\right]}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}$$

ifadesi de (1) ile üretilebilir.

Sonuç olarak j üzerinden indüksiyon ile

$$\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)}x_1^{(j)}x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \qquad j \geq n$$

ifadeleri (1) ile üretilebilir.

Şimdi

$$\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)}x_k^{(j)}x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \qquad j \geq 0, k = 2, \dots, m$$

fonksiyonlarının j üzerinden indüksiyonla (1) ile üretilebildiğini gösterelim. $j = 0$ için

$$\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)}x_kx_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \qquad i = 0,1, \dots, n-1, k = 2, \dots, m$$

ifadesi (1) dedir. $j = r$ için

$$\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)}x_k^{(r)}x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \qquad i = 0,1, \dots, n-1, k = 2, \dots, m$$

fonksiyonlarının (1) ile üretilebildiğini kabul edelim ve $j = r + 1$ için üretilebildiğini gösterelim.

$$\left(\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)}x_k^{(r)}x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}\right)' = \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)}x_k^{(r)}x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]'}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} - \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)}x_k^{(r)}x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}\frac{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-2)}x_1^{(n)}\right]}{\left[x_1x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}$$

olacağından

$$\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_k^{(r)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]'}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}$$

fonksiyonu (1) ile üretilebilir. Burada $\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_k^{(r)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]'$ türevi alınırsa ve sıfırlanan terimler atılırsa;

$$\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_k^{(r)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]' = \left[x_1 \dots x_1^{(i)} x_k^{(r)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right] + \left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_k^{(r+1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right] + \left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_k^{(r)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-2)} x_1^{(n)}\right]$$

elde edilir. Bu eşitliğin her tarafı $\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]$ fonksiyonuyla bölünüp, istenilen determinant çekilirse;

$$\begin{aligned} \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_k^{(r+1)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} &= \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_k^{(r)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]'}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} - \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i)} x_k^{(r)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} \\ &- \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_k^{(r)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-2)} x_1^{(n)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} \end{aligned} \tag{3}$$

elde edilir. (3) eşitliğinin sağındaki terimlerden birincisinin (1) ile üretilebildiğini gösterdik. İkinci terim hipotez gereği (1) ile üretilebilir. Üçüncü terimin ise $x_1 = x_1, x_2 = x_1', \dots, x_n = x_1^{(n-1)}, x_0 = x_1^{(n)}, y_2 = x_1, y_3 = x_1', y_{i+1} = x_1^{(i-1)}, y_{i+2} = x_k^{(r)}, y_{i+3} = x_1^{(i+1)}, y_n = x_1^{(n-2)}$ seçimi ile Lemma 2.2. kullanılarak (1) ile üretilebildiği bir önceki gösterime benzer şekilde gösterilebilir. Dolayısıyla (3) eşitliğinden, tümevarım gereği

$$\frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i)} x_k^{(r)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \quad i = 0,1,\dots,n-1, k = 2,\dots,m$$

fonksiyonlarının hepsi (1) ile üretilebilir. Dolayısıyla (1), $\mathbb{R} < x_1, x_2, \dots, x_m >^{GL(n,\mathbb{R})}$ için üreteç kümesidir.

Tanım 3.2. $\{x_k, k = 1,2,\dots,m\}$ ve $\{y_k, k = 1,2,\dots,m\}$ $\mathbb{R}^n$ de iki parametrik eğri ailesi olsun. Eğer her $t \in I$ için

$$y_k(t) = g x_k(t), \qquad k = 1,2,\dots,m$$

olacak şekilde bir $g \in GL(n,\mathbb{R})$ mevcutsa, bu iki eğri ailesine $GL(n,\mathbb{R})$-denktir denir ve

$$\{x_k, k = 1,2,\dots,m\} \underset{\sim}{{}^{GL(n,\mathbb{R})}} \{y_k, k = 1,2,\dots,m\}$$

ile gösterilir.

Teorem 3.3. $\{x_k, k = 1,2,\dots,m\}$ ve $\{y_k, k = 1,2,\dots,m\}$ $\mathbb{R}^n$ de, x_1 ve y_1 $GL(n,\mathbb{R})$-regüler olmak üzere, iki eğri ailesi olsun. Eğer $i = 0,1,\dots,n-1$ için

$$\begin{aligned} \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_1^{(n)} x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} &= \frac{\left[y_1 \dots y_1^{(i-1)} y_1^{(n)} y_1^{(i+1)} \dots y_1^{(n-1)}\right]}{\left[y_1 y_1' \dots y_1^{(n-1)}\right]}, \\ \frac{\left[x_1 \dots x_1^{(i-1)} x_k x_1^{(i+1)} \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]} &= \frac{\left[y_1 \dots y_1^{(i-1)} y_k y_1^{(i+1)} \dots y_1^{(n-1)}\right]}{\left[y_1 y_1' \dots y_1^{(n-1)}\right]} \end{aligned} \tag{4}$$

oluyor ise bu durumda

$$\{x_k, k = 1,2,\dots,m\} \overset{GL(n,\mathbb{R})}{\sim} \{y_k, k = 1,2,\dots,m\}$$

dir.

İspat. Aşağıdaki matrisleri göz önüne alalım:

$$H(x_1) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{11}^{(n-1)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & \cdots & x_{1n}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

$$H'(x_1) = \begin{pmatrix} x'_{11}(t) & \cdots & x_{11}^{(n)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{1n}(t) & \cdots & x_{1n}^{(n)}(t) \end{pmatrix}.$$

x_1 parametrik eğrisi $GL(n,\mathbb{R})$-regüler olduğundan $H(x_1)$ matrisinin tersi mevcuttur. $H^{-1}(x_1)H'(x_1) = A$ olsun. Buradan $H'(x_1) = H(x_1)A$ dır. Bu eşitlik ile

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 1 & \cdots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

burada,

$$a_{1n} = \frac{\left[x_1^{(n)} x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, a_{2n} = \frac{\left[x_1 x_1^{(n)} x_1'' \dots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}, \dots, a_{nn} = \frac{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-2)} x_1^{(n)}\right]}{\left[x_1 x_1' \dots x_1^{(n-1)}\right]}$$

şeklindedir. Benzer şekilde H matrisindeki x_1 eğrisi yerine y_1 regüler eğrisi alınırsa $H'(y_1) = H(y_1)B$ olup $A = B$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$H^{-1}(x_1)H'(x_1) = H^{-1}(y_1)H'(y_1)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \left(H(y_1)H^{-1}(x_1)\right)' &= H'(y_1)H^{-1}(x_1) + H(y_1)\left(H^{-1}(x_1)\right)' \\ &= H'(y_1)H^{-1}(x_1) + H(y_1)\left(-H^{-1}(x_1)H'(x_1)H^{-1}(x_1)\right) \\ &= H(y_1)[H^{-1}(y_1)H'(y_1) - H^{-1}(x_1)H'(x_1)]H^{-1}(x_1) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $H(y_1)H^{-1}(x_1) = g$, g sabit matristir.

$$detg = \det\left(H(y_1)\right)\det\left(H^{-1}(x_1)\right) \neq 0$$

olduğundan $g \in GL(n,\mathbb{R})$ dir. Dolayısıyla

$$H(y_1) = gH(x_1) \tag{5}$$

olup,

$$y_1(t) = gx_1(t), \qquad \forall t \in I \tag{6}$$

elde edilir.

$$K(x_j) = \begin{bmatrix} x_{j1}(t) \\ x_{j2}(t) \\ \vdots \\ x_{jn}(t) \end{bmatrix}, \qquad j = 2,\dots,m$$

matrislerini göz önüne alalım.

$H^{-1}(x_1)K(x_j) = C$ olsun. Buradan $K(x_j) = H(x_1)C$ dir. Bu eşitliği açık olarak yazarsak:

$$\begin{bmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ \vdots \\ x_{jn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x'_{11} & \cdots & x_{11}^{(n-1)} \\ x_{12} & x'_{12} & \cdots & x_{12}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x'_{1n} & \cdots & x_{1n}^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{bmatrix}$$

olur. Buradan aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{gathered} c_{11}x_{11} + c_{12}x'_{11} + \cdots + c_{1n}x_{11}^{(n-1)} = x_{j1} \\ c_{11}x_{12} + c_{12}x'_{12} + \cdots + c_{1n}x_{12}^{(n-1)} = x_{j2} \\ \vdots \\ c_{11}x_{1n} + c_{12}x'_{1n} + \cdots + c_{1n}x_{1n}^{(n-1)} = x_{jn}. \end{gathered}$$

Katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğundan, bu diferansiyel denklem sisteminin çözümü vardır ve bu çözüm:

$$c_{11} = \frac{\left[x_j x'_1 \ldots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x'_1 \ldots x_1^{(n-1)}\right]}, c_{12} = \frac{\left[x_1 x_j x''_1 \ldots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x'_1 \ldots x_1^{(n-1)}\right]}, \ldots, c_{1n} = \frac{\left[x_1 \ldots x_1^{(n-2)} x_j\right]}{\left[x_1 x'_1 \ldots x_1^{(n-1)}\right]}$$

biçimindedir. Benzer biçimde, $H^{-1}(y_1)K(y_j) = D$ dersek (4) denklemlerinden $C = D$ bulunur. Dolayısıyla

$$H^{-1}(y_1)K(y_j) = H^{-1}(x_1)K(x_j), \qquad j = 2, \ldots, m$$

olur. Buradan (5) eşitliğinden

$$H^{-1}(x_1)K(x_j) = H^{-1}(y_1)K(y_j) = \left(gH(x_1)\right)^{-1}K(y_j) = H^{-1}(x_1)g^{-1}K(y_j)$$

ve buradan da

$$K(x_j) = g^{-1}K(y_j)$$

elde edilir. Öyleyse bir $g \in GL(n, \mathbb{R})$ için,

$$K(y_j) = gK(x_j), \qquad j = 2, \ldots, m$$

olur. Buradan her $t \in I$ için,

$$y_j(t) = gx_j(t), \qquad j = 2, \ldots, m \tag{7}$$

elde edilir. (6) ve (7) denklemlerinden $\{x_k, k = 1,2, \ldots, m\} \overset{GL(n,\mathbb{R})}{\sim} \{y_k, k = 1,2, \ldots, m\}$ bulunur.

□

Teorem 3.4. $f_i(t), f_{2i}(t), \ldots, f_{mi}(t),\ t \in I,\ i = 0,1, \ldots, n-1$ fonksiyonları C^∞-fonksiyonları olsunlar. Bu durumda, x_1 eğrisi $GL(n, \mathbb{R})$-regüler olmak üzere, bir $\{x_k, k = 1,2, \ldots m\}$ eğri ailesi

$$\frac{\left[x_1 \ldots x_1^{(i-1)} x_1^{(n)} x_1^{(i+1)} \ldots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x'_1 \ldots x_1^{(n-1)}\right]} = f_i(t),$$

$$\frac{\left[x_1 \ldots x_1^{(i-1)} x_2 x_1^{(i+1)} \ldots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x'_1 \ldots x_1^{(n-1)}\right]} = f_{2i}(t),$$

$$\vdots$$
$$\frac{\left[x_1 \ldots x_1^{(i-1)} x_m x_1^{(i+1)} \ldots x_1^{(n-1)}\right]}{\left[x_1 x_1' \ldots x_1^{(n-1)}\right]} = f_{mi}(t), \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

olacak şekilde mevcuttur.

İspat. $H(x_1)$ matrisini göz önüne alalım ve $H^{-1}(x_1)H'(x_1) = A$ olsun. Buradan $H'(x_1) = H(x_1)A$ dır. Burada A matrisi aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & f_0(t) \\ 1 & \cdots & 0 & f_1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & f_{n-1}(t) \end{bmatrix}.$$

$H'(x_1) = H(x_1)A$ olduğundan, bu matris eşitliğinden aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{gathered} x_{11}(t)f_0(t) + x_{11}'(t)f_1(t) + \cdots + x_{11}^{(n-1)}(t)f_{n-1}(t) = x_{11}^{(n)}(t) \\ x_{12}(t)f_0(t) + x_{12}'(t)f_1(t) + \cdots + x_{12}^{(n-1)}(t)f_{n-1}(t) = x_{12}^{(n)}(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t)f_0(t) + x_{1n}'(t)f_1(t) + \cdots + x_{1n}^{(n-1)}(t)f_{n-1}(t) = x_{1n}^{(n)}(t) \end{gathered} \tag{8}$$

$y(t) = \left(x_{11}(t), x_{12}(t), \ldots, x_{1n}(t)\right)$ denilirse (8) diferansiyel denklem sistemi

$$f_0(t)y(t) + f_1(t)y'(t) + \cdots + f_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) - y^{(n)}(t) = 0 \tag{9}$$

biçiminde yazılabilir. $f_i(t)$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, $t \in I$ fonksiyonları C^∞-fonksiyonlar olduğundan (9) diferansiyel denkleminin en az bir çözümü vardır ve bu çözüme $x_1(t) = y(t)$ dersek, $x_1(t)$ istenen koşulları sağlar.

Diğer yandan

$$N(x_k) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{11}' & \cdots & x_{11}^{(n-2)} & x_{k1} \\ x_{12} & x_{12}' & \cdots & x_{12}^{(n-2)} & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{1n}' & \cdots & x_{1n}^{(n-2)} & x_{kn} \end{bmatrix}, \qquad k = 2,\ldots,m$$

matrislerini göz önüne alalım. Ayrıca $H^{-1}(x_1)N(x_k) = E$ olsun. Buradan $N(x_k) = H(x_1)E$ olup, burada

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & f_{k0}(t) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & f_{k1}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & f_{k(n-2)}(t) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f_{k(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \qquad k = 2,\ldots,m$$

biçimindedir. $N(x_k) = H(x_1)E$ matris eşitliğinden aşağıdaki diferansiyel denklem sistemleri elde edilir:

$$\begin{gathered} x_{11}(t)f_{k0}(t) + x_{11}'(t)f_{k1}(t) + \cdots + x_{11}^{(n-1)}(t)f_{k(n-1)}(t) = x_{k1}^{(n)}(t) \\ x_{12}(t)f_{k0}(t) + x_{12}'(t)f_{k1}(t) + \cdots + x_{12}^{(n-1)}(t)f_{k(n-1)}(t) = x_{k2}^{(n)}(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t)f_{k0}(t) + x_{1n}'(t)f_{k1}(t) + \cdots + x_{1n}^{(n-1)}(t)f_{k(n-1)}(t) = x_{kn}^{(n)}(t) \end{gathered} \tag{10}$$

$f_{ki}(t), t \in I, k = 2, \dots, m, i = 0, \dots, n-1$ fonksiyonlarının tümü C^{∞}-fonksiyonlar olduğundan (10) diferansiyel denklem sistemlerinin en az bir çözümü vardır. Bu çözümlere $x_k(t), k = 2, \dots, m$ dersek, bu $x_k(t)$ eğrileri teoremdeki koşulları sağlayan parametrik eğrilerdir. Bu ise ispatı tamamlar.

4. Sonuçlar ve Değerlendirme

Bu çalışmada $GL(n, \mathbb{R})$ grubuna göre sonlu sayıda parametrik eğrinin diferansiyel invaryantlarının üreteç kümesi elde edilmiştir. Bu diferansiyel invaryantlar kullanılarak $GL(n, \mathbb{R})$ grubunda, sonlu sayıda parametrik eğriden oluşan eğri ailelerinin denklik problemine biz çözüm verilmiştir ve yine bu yolla bir genelleştirme elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen diferansiyel invaryantların minimalliği belirlenmiştir.

Kaynaklar

Gardner, R.B. ve Wilkens, G.R., 1997. The fundamental theorems of curves and hypersurfaces in centro-affine geometry. Bull. Belg. Math. Soc., 4, 379-401.

Giblin, P.J. ve Sano, T., 2012. Generic equi-centro-affine differential geometry of plane curves. Topology Appl., 159, 476-483.

Izumiya, S. ve Sano, T., 2000. Generic affine differential geometry of space curves. Proceedings of the Royal Soc. of Edinburgh, 128A, 301-314.

İncesu, M. ve Gürsoy, O., 2017. $LS(2)$-Equivalence conditions of control points and application to planar Bezier curves. NTMSCI, 5(3), 70-84.

Khadjiev, Dj. ve Pekşen, Ö., 2004. The complete system of global differential and integral invariants for equi-affine curves. Diff. Geom. Appl., 20, 167-175.

Nadjafikhah, M., 2002. Affine differential invariants for planar curves. Balk. J. Geom. Appl., 7, 69-78.

Olver, P.J., 2010. Moving frames and differential invariants in centro-affine geometry. Lobachevskii J. Math., 31, 77-89.

Pekşen, Ö. ve Khadjiev, D., 2004. On invariants of curves in centro-affine geometry. J. Math. Kyoto Univ., 44(3), 603-613.

Sağıroğlu, Y., 2012. Affine Differential Invariants of Curves. LAP, Saarbrücken, 128p.

Sağıroğlu, Y., 2016. Centro-equiaffine differential invariants of curve families. IEJG, 9, 23-29.

Sağıroğlu, Y., 2015. Equi-affine differential invariants of a pair of curves. TWMS J. Pure. Appl. Math., 6, 238-245.

Sağıroğlu, Y. ve Pekşen, Ö., 2010. The equivalence of equi-affine curves. Turk. J. Math., 34, 95-104.

Sağıroğlu, Y. ve Yapar, Z. 2016. $GL(n, \mathbb{R})$-Equivalence of a pair of curves in terms of invariants. Journal of Mathematics and System Science, 6, 16-22.

Sibirskii, K.S., 1976. Algebraic invariants of differential equations and matrices, Kishinev, Stiintsa, 268p.