

# Elastic Analysis of an Hollow Cylinder Made from Functionally Graded Material Exposed to Internal Pressure

Cem Boğa<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>Adana Bilim ve Teknoloji Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü, Adana, Türkiye

## Abstract

This study relates to the determination of radial and tangential stresses and radial displacements in a hollow cylinder made of functional graded material (FGM) subject to internal pressure both analytically and using ANSYS APDL and comparison of the results. The material properties of the FGM cylinder vary depending on a simple power function in the radial direction along the thickness. It is assumed that the Poisson's ratio is constant in the radial direction. Under infinitesimally small deformations, radial and tangential stress and radial displacements on the basis of the differential equation regulating the elastostatic behavior of an FGM cylinder using the plane strain and axial symmetric load assumptions state and field equations were obtained for the analytical solution. The FGM cylinder subjected to internal pressure effect is modeled using dummy thermal loads in ANSYS APDL. The results of radial and tangential stress and radial deformation along the thickness are obtained for four different FGM types and are shown graphically. Analytical and ANSYS results were compared and found to be in one accord. In this study, elastic analysis of the FGM cylinder was aimed to enable the results to be obtained without having to deal with complicated mathematical expressions.

**Keywords:** "Functionally graded material, Simple power function, Internal pressure, Cylinder, Elastic analysis"

## 1. Giriş

Kalın cidarlı kabuklar, gemi ve denizaltı gövdeleri, basınçlı kaplar, taşınabilir basınçlı tüpler, içinden basınçlı akışkan geçen borular, otoklavlar, hidrofor sistemleri, buhar ve kalorifer kazanları, uçak kanatları, nükleer santrallerin muhafaza yapıları, roketlerin dış kısımları, füzeler, otomobil lastikleri, beton çatılar, bacalar, soğutma kuleleri, tehlikeli sıvıların depolandığı tanklar ve depolar gibi birçok yapılar mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılan yapısal unsurlardır. İç veya dış basınca maruz bu tarz kalın çeperli küresel kabuklar, geçmişte birçok araştırmacı tarafından incelenen mühendislik mekanizmasının klasik problemlerden birisi olmuşlardır[1-11]. Tasarımı esnasında, karşılaşılabileceği basınçlara dayanabilecek uygun malzemelerin seçilmesi hem patlama felaketlerinin önüne geçilmesi hem de görevini hasara uğramadan yerine getirebilmesi açısından son derece önemlidir. İç basınca maruz kalın cidarlı silindirik basınçlı kaplar endüstride yaygın olarak kullanıldığı için elastik analizi de mühendislik uygulamalarında oldukça önemlidir. Silindir malzemesi homojen olduğu takdirde en tehlikeli gerilmeler elastik durum için literatürde Timoshenko ve Goodier [1] tarafından çözülen formüllerden kolayca elde edilebilmektedir. Ancak gelişen mühendislik uygulamaları, yeni ve gelişmiş farklı homojen olmayan malzeme ihtiyacını ortaya çıkarmış ve bu durum birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Özellikle yüksek ısı direnci, yüksek mukavemet ve termal şok dayanımı gerektiren uygulamalarda bütün bu özellikleri bir arada bulunduran FGM'lerin homojen malzemelere kıyasla daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Bu noktada bir FGM silindirin radyal ve teğetsel gerilmelerle radyal yer değiştirmelerini bulabilmek için bir takım matematiksel formüllerin geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Ve literatürde bu tip silindirlerin elastik analizi ile ilgili pek çok çalışma bulunmaktadır. Arslan [2], fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kalın cidarlı kap ile tabakalı basınçlı kaplara ait iki farklı analitik model geliştirmek için hem elastisite modülü hem de akma gerilmesi için radyal yönde bir güç fonksiyonuna bağlı olarak değiştiklerini kabul ederek, aynı fiziki şartlar altında her iki model için bulduğu sonuçlar ile küresel kabın homojen olma durumu için elde ettiği sonuçları karşılaştırmıştır. You ve diğerleri [3], iç basınca maruz kalın duvarlı küresel basınçlı kapların elastik analizini gerçekleştirmek için bir tanesi, kabın iç ve dış yüzeylerine yakın iki homojen tabakadan ve ortada fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir tabakadan oluşan diğeri sadece fonksiyonel dereceli malzemeden oluşan iki tür basınçlı kap düşünmüşlerdir. Ve elastik gerilme durumları dikkate alınarak kompakt tarzda çözümler sunmuşlardır. Tütüncü ve Temel [4], çalışmalarında fonksiyonel olarak derecelendirilmiş iç basınç etkisine maruz içi boş silindirlere, disklerde ve kürelerde yer değiştirmeleri ve gerilmeleri, düzlem elastisite teorisini ve tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemini kullanarak belirlemişlerdir. Chen ve Lin [5], fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış kalın duvarlı bir silindir ve küresel basınçlı kapların, radyal doğrultu boyunca Elastisite modülünün üssel fonksiyona bağlı olarak değiştiği varsayımı ile analitik çözümler elde etmiş ve radyal doğrultuda gerilme dağılımını incelemiştir. Kurşun ve diğerleri [6], FGM'den yapılmış uzun içi boş silindirlerin termal gerilme dağılımını termal, mekanik ve termo mekanik yükler altında analitik olarak tanımlamışlardır ve gradyan parametrelerinin

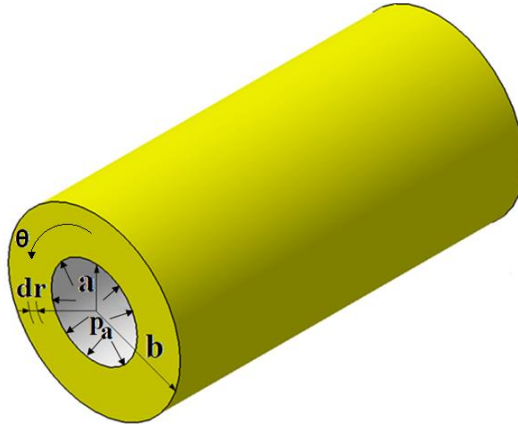
<sup>1</sup> Sorumlu Yazar. Tel.: +90-506-367-0759 ; fax: +0-000-000-0000 .  
E-mail address: cboga@adanabtu.edu.tr

FGM silindirlerinin gerilme dağılımları üzerine etkilerini incelemişlerdir. Nejat ve diğerleri [7], iç ve dış basınca maruz kalan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılan kalın duvarlı küresel kabuklardaki gerilmeler ve yer değiştirmeler için analitik bir yöntem geliştirmişlerdir ve elde ettikleri sonuçları sonlu elemanlar yöntemi ile buldukları sonuçlarla karşılaştırmışlardır. Rahimi ve Nejad [8], çalışmalarında, iç ve dış basınç altında fonksiyonel olarak derecelenmiş malzemeden yapılmış içi boş kalın duvarlı dönen silindirdeki termal gerilmeleri, malzeme özellikleri silindirin yarıçapının bir fonksiyonu ve Poisson oranının sabit olduğu kabulü ile elde etmişlerdir. Boğa [9], çalışmasında radyal doğrultuda fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış izotropik değişken kalınlıklı sabit ve dönen disklerin elastik analizini Taşıma Matrisi Yöntemi (TMM) ile sayısal olarak gerçekleştirmiş ve farklı sınır şartlarını da kapsayan analitik formülleri kompakt formlarda sunmuştur. Nejat ve diğerleri [10], malzeme özellikleri radyal yönde exponential değişen FGM'den yapılmış silindirik kapların kapalı analitik formüllerden elde ettiği yer değiştirme ve gerilme sonuçlarıyla sonlu elemanlar yöntemi kullanarak elde ettikleri sonuçları karşılaştırmışlardır. Hassan ve Keleş [11], dış basınç etkisi altındaki içi dolu FGM silindiri ANSYS'de dummy termal yükler kullanarak modelleyip elde ettikleri sonuçlarla analitik sonuçları karşılaştırmışlardır. Demirbaş ve Apalak [12], tek yönde fonksiyonel kademelenmiş dairesel plakaların termal gerilme analizini sonlu farklar metodunu kullanarak sunmuşlardır. Onlar kademelenirmeyi kalınlık yönünde değil düzlemde yapmışlar ve malzeme özelliklerini sıcaklığa bağlı değişiminin tesirini araştırmışlardır.

Bu çalışmada, iç basınç etkisine maruz içi boş, malzeme özelliği üssel fonksiyona bağlı olarak değişen, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış bir silindirde oluşan, radyal ve teğetsel gerilmelerle radyal yer değiştirmeler, analitik ve aynı zamanda sonlu elemanlar yöntemi ANSYS (V.18-1) APDL paket programı ile nümerik olarak dört farklı FGM tipi için çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Verilen yükleme koşullarında kalınlık boyunca oluşan gerilme ve yer değiştirme değerleri incelenmiş ve grafik olarak da sunulmuştur. Ayrıca inhomojenite katsayısının ( $\beta$ ) yer değiştirmeler ve gerilmeler üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

## 2. Teorik Formülasyon

Şekil 1'de görülen iç yarıçapı  $a$ , dış yarıçapı  $b$  ve iç basıncı  $p_a$  olan bir FGM silindir ele alınmıştır.



Şekil 1. İç basınca maruz FGM silindir

Radyal yönde ( $r$ ) elastisite modülü ( $E(r)$ ) bir üssel fonksiyona bağlı olarak değişirken (Denklem 1), Poisson oranının ( $\nu = 0.3$ ) sabit olduğu varsayılmaktadır.

$$E(r) = E_a \left(\frac{r}{a}\right)^\beta = a^{-\beta} E_a r^\beta = E_A r^\beta \quad (1)$$

$$E_A = \frac{E_a}{a^\beta} \quad (2)$$

$$\beta = \frac{\ln\left(\frac{E_a}{E_b}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \quad (3)$$

$E_a$  ve  $E_b$  sırasıyla FGM silindirin iç ve dış kısmındaki malzemelerin elastisite modülleri,  $\beta$  ise malzemelere bağlı olarak değişen inhomojenite parametresidir.  $\beta=0$  olması durumunda silindir homojen olmaktadır.

Formülasyon için silindirik koordinatlarda ( $r, \theta$ ), radyal ( $\varepsilon_r$ ) ve teğetsel ( $\varepsilon_\theta$ ) gerilmeler

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = u_r' \quad (4)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (5)$$

ve silindirik koordinatlarda denge denklemi

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (6)$$

alınmıştır. Eksenel simetrik durumda, gerilme-gerinim ifadeleri izotropik ve radyal yönde fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme için aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_r(r) = C_{11}\varepsilon_r(r) + C_{12}\varepsilon_\theta(r) \quad (7)$$

$$\sigma_\theta(r) = C_{12}\varepsilon_r(r) + C_{11}\varepsilon_\theta(r) \quad (8)$$

Silindir için;

$$C_{11} = \frac{E(r)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (9)$$

$$C_{12} = \frac{E(r)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (10)$$

alınmıştır ve Denklem 7,8,9 ve 10 Denklem 6'daki denge denkleminde yerine yazılırlarsa;

$$\frac{(-1 + \beta\lambda)u_r}{r^2} + \frac{(1 + \beta)u_r'}{r} + u_r'' = 0 \quad (11)$$

ikinci derece diferansiyel denklem elde edilir. Denklem 11'in  $\sigma_r(a) = -p_a$  ve  $\sigma_r(b) = 0$  sınır şartları için çözümlenmesinden sonra radyal yöndeki yer değiştirmeler  $u_r(r)$ , radyal ( $\sigma_r(r)$ ) ve teğetsel ( $\sigma_\theta(r)$ ) gerilmelerin analitik ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u_r(r) = \left\{ \frac{2a^{\frac{1}{2}(-\beta+\xi+2)}p_a r^{\frac{1}{2}(-\beta-\xi)}(2\nu^2 + \nu - 1) \left( b^\xi(-\beta + 2\lambda + \xi) + r^\xi(\beta - 2\lambda + \xi) \right)}{(a^\xi - b^\xi)E_A(\nu - 1)((\beta - 2\lambda)^2 - \xi^2)} \right\} \quad (12)$$

$$\sigma_r(r) = \left\{ \frac{a^{\frac{1}{2}(-\beta+\xi+2)}p_a r^{\frac{1}{2}(\beta-\xi-2)}(b^\xi - r^\xi)}{a^\xi - b^\xi} \right\} \quad (13)$$

$$\sigma_\theta(r) = \left\{ - \frac{a^{\frac{1}{2}(-\beta+\xi+2)}p_a r^{\frac{1}{2}(\beta-\xi-2)} \left( (\beta - 2\lambda - \xi)(\lambda(\beta + \xi) - 2)b^\xi + r^\xi(\beta - 2\lambda + \xi)(-\beta\lambda + \xi\lambda + 2) \right)}{(a^\xi - b^\xi)(\xi^2 - (\beta - 2\lambda)^2)} \right\} \quad (14)$$

$$\xi = \sqrt{4 + \beta^2 - 4\beta\lambda} \quad (15)$$

$$\lambda = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (16)$$

İç yarıçapı  $a=100 \text{ mm}$ , dış yarıçapı  $b=200 \text{ mm}$  olan ve  $p_a=1 \text{ GPa}$  iç basınca maruz kalan FGM silindir için kullanılan malzeme özellikleri Tablo 1'de gösterilmiştir

**Tablo 1. Bu çalışmada kullanılan bazı metal ve seramiklerin malzeme özellikleri**

METAL	$E$	$\rho$	$\nu$	SERAMİK	$E$	$\rho$	$\nu$
Ti-6Al-4V <sup>1</sup>	122.557	2370	0.29	Silikon Nitrit (Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> )	348.43	4429	0.24
ASTM-321 <sup>2</sup>	170	7850	0.33	Zirkonyum Oksit (ZrO <sub>2</sub> )	116.4	3657	0.3
Aluminyum (Al)	70	2700	0.3	Aluminyum Oksit (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	393	3970	0.3
SUS304 (Paslanmaz Çelik)	201.04	7800	0.3262				

1- Titanium Alaşımı

2- ASTM-321 (American Society for Testing and Materials)

İç kısmı metal, dış kısmı seramik olacak şekilde dışa doğru radyal yönde Denklem 1'deki fonksiyona bağlı olarak değişen dört farklı FGM tipi ve bunlara ait inhomojenite katsayıları ( $\beta$ ) Tablo 2'de verilmiştir.

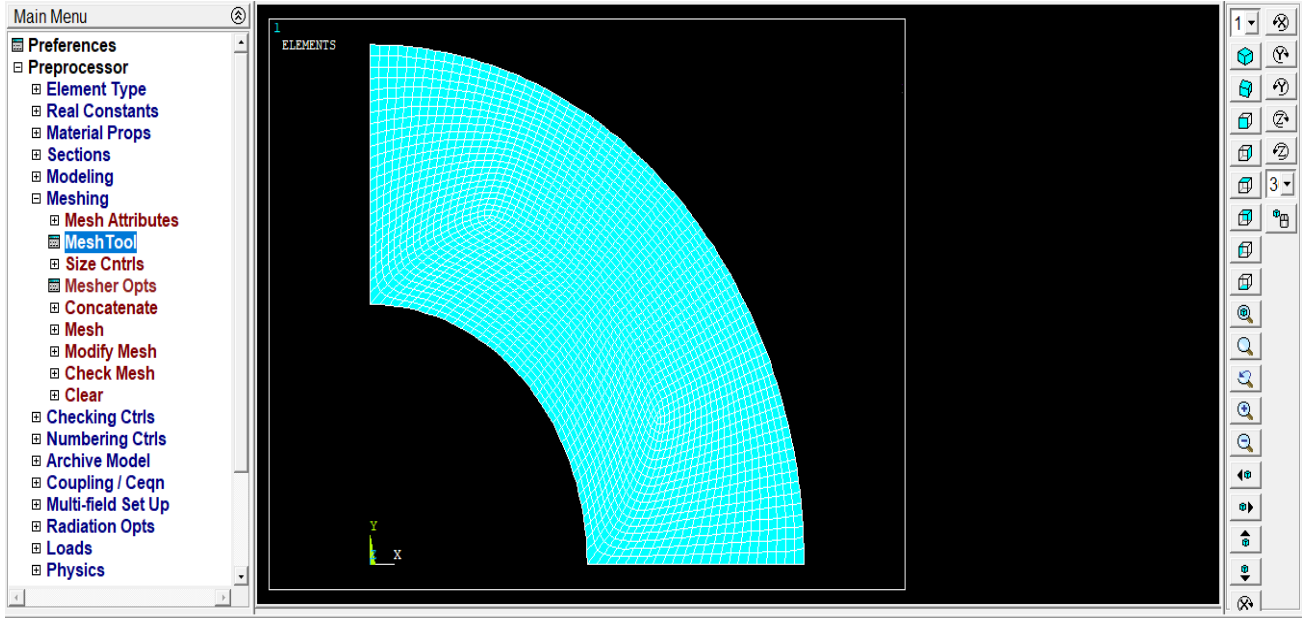
Buna göre;  $\beta_I > \beta_{IV} > \beta_{II} > \beta_{III}$  olduğu görülmektedir.

**Tablo 2. Farklı metal-seramik çiftleri için  $\beta$  katsayıları**

	Metal	Seramik	$\beta$
<b>FGM I</b>	Ti-6Al-4V	Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	1.507415958
<b>FGM II</b>	SUS304	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.9670467361
<b>FGM III</b>	Al	ZrO <sub>2</sub>	0.733664231
<b>FGM IV</b>	ASTM-321	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	1.208994566

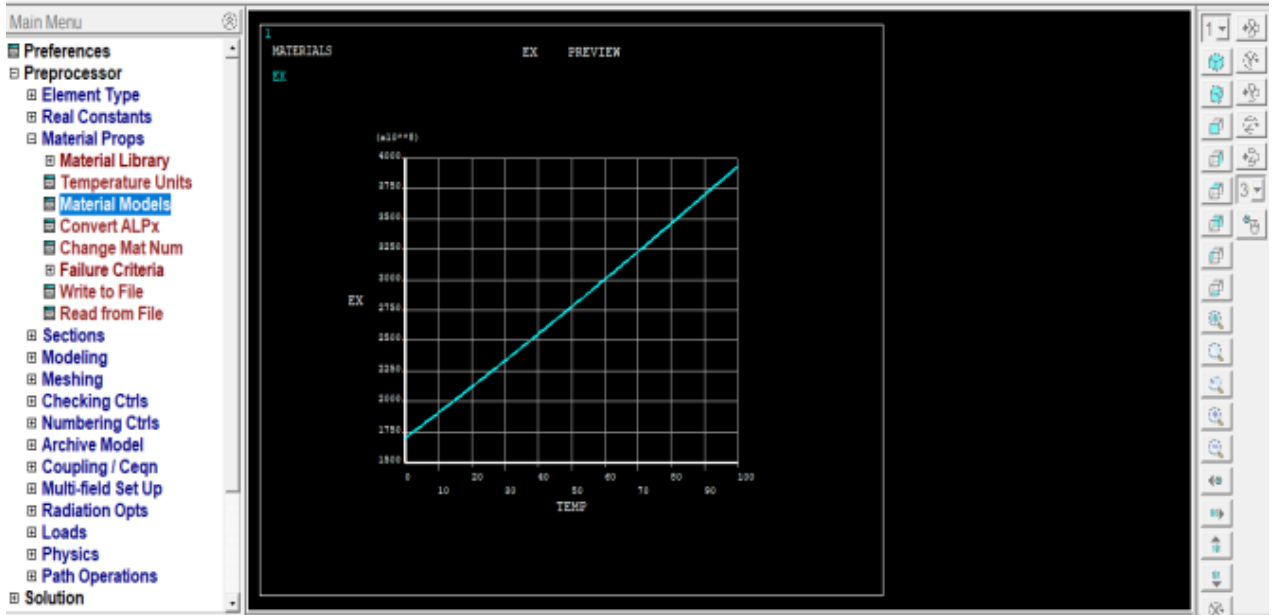
### 3. Nümerik Analiz

Bu çalışmada, problemin nümerik analizi için endüstrideki mühendislik problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılan sayısal yöntemlerden birisi olan sonlu elemanlar yöntemi (SEY) kullanılmıştır. SEY karmaşık malzeme özellikleri olan sistemlerde kolaylıkla uygulanabilir ve üretime geçmeden önce sonuçların bilgisayar ortamında seri bir şekilde incelenmesi mümkün olabilir. Bu çalışmada, SEY ile çözüm yapan pek çok paket programları arasında en yaygın olan ANSYS (V.18-1) kullanılmıştır. Eleman tipi için 8-nodlu quad eleman ve eleman davranışı için plane strain seçilmiştir. Sonlu elemanlar modeli için simetriden dolayı silindirik geometrisinin iç yarıçapı 100 mm, dış yarıçapı 200 mm olacak şekilde sadece bir çeyreklik kısmı katı model olarak çizilmiştir. Sonlu elemanlara bölme işleminde eleman yoğunluğu arttıkça çözüm gerçek çözüme daha çok yaklaşması gerçeğinden dolayı, gerilmeleri yüksek doğrulukta elde edebilmek için yüksek yoğunlukta eleman kullanılarak meshlenmiştir (Şekil 2).



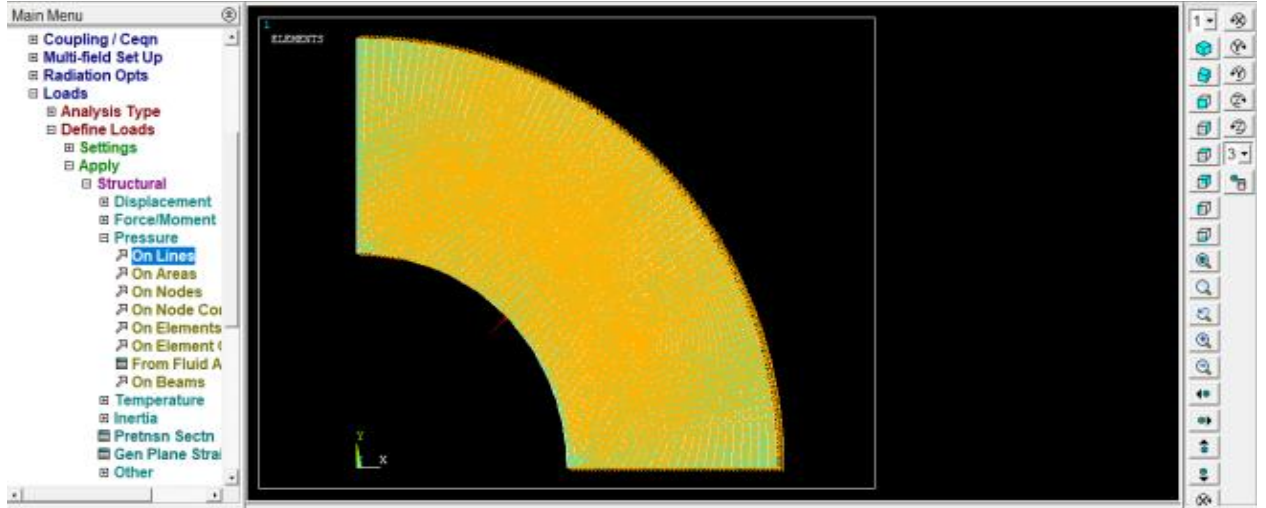
Şekil 2. Parça geometrisinin oluşturulması ve meshleme

FGM silindirin elastisite modülü radyal yönde bir fonksiyona bağlı olarak değiştiği için enine kesit boyunca düğümlerin sıcaklıklarının doğrusal dağılımını kullanarak yarıçapın bir fonksiyonu olarak dağıtmak gerekir. ANSYS, malzeme model penceresinde (Sıcaklık, Elastisite modülü) noktaları atayarak elastisite modülü sıcaklığın bir fonksiyonu olarak ifade edilmesi sağlanmıştır. Daha iyi bir dağılım eğrisi için nokta sayısı 100 olarak atanmıştır. Bu sıcaklık-elastisite modülü ilişkisinin atama sürecini otomatikleştiren ANSYS'de alt program olarak adlandırılan bir MACRO kullanılmıştır. Elastisite modülünün radyal yöndeki değişimi Şekil 3'te gösterilmiştir.



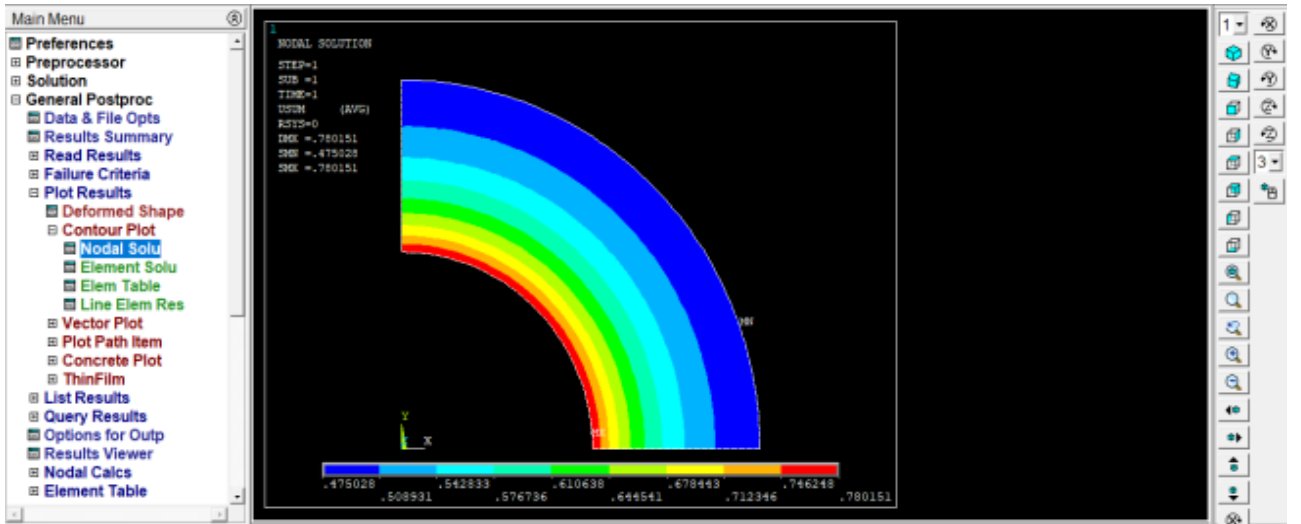
Şekil 3. Elastisite modülünün radyal yöndeki değişimi grafiği

Her bir düğüme termal yük uygulandıktan sonraki 1 GPa iç basınç uygulanmış ve Şekil 4'te gösterilmiştir.

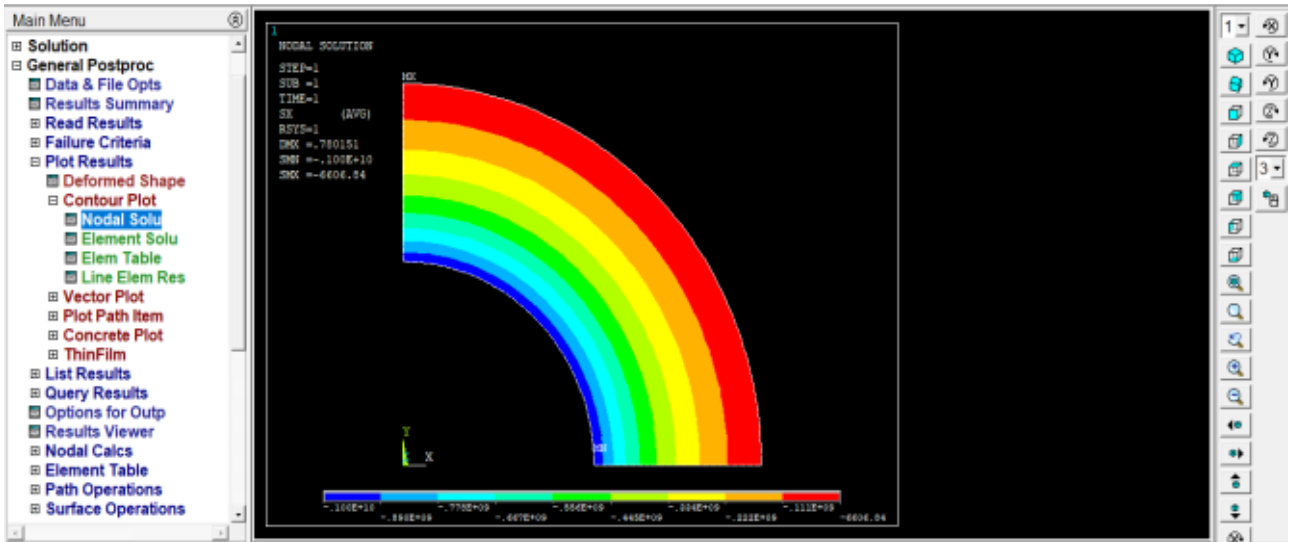


Şekil 4. Termal yüklerin ve iç basıncın uygulanması

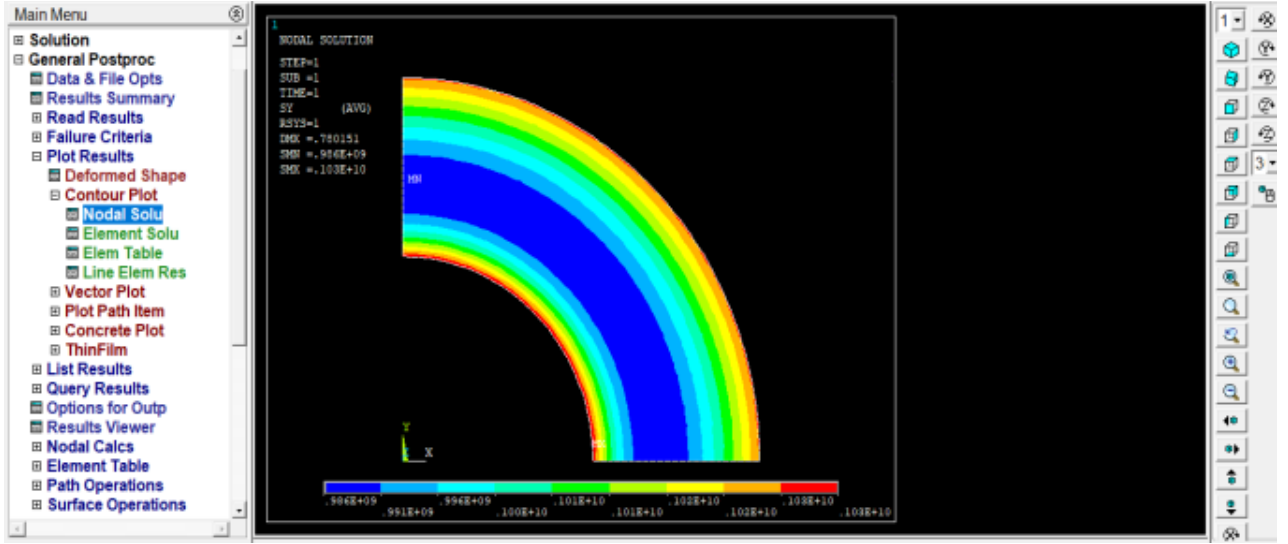
Analiz için çözümlendikten sonra radyal yerdeğişirme, radyal gerilme ve teğetsel gerilme ANSYS sayısal sonuçları görsel olarak kontur grafikler halinde Şekil 5-7'de gösterilmiştir.



Şekil 5. ANSYS'ten elde edilen radyal yerdeğişirme



Şekil 6. ANSYS'ten elde edilen radyal gerilme



Şekil 7. ANSYS'ten elde edilen teğetsel gerilme

### 3.1. Analitik ve SEY Sonuçlarının Karşılaştırılması ve Doğrulama

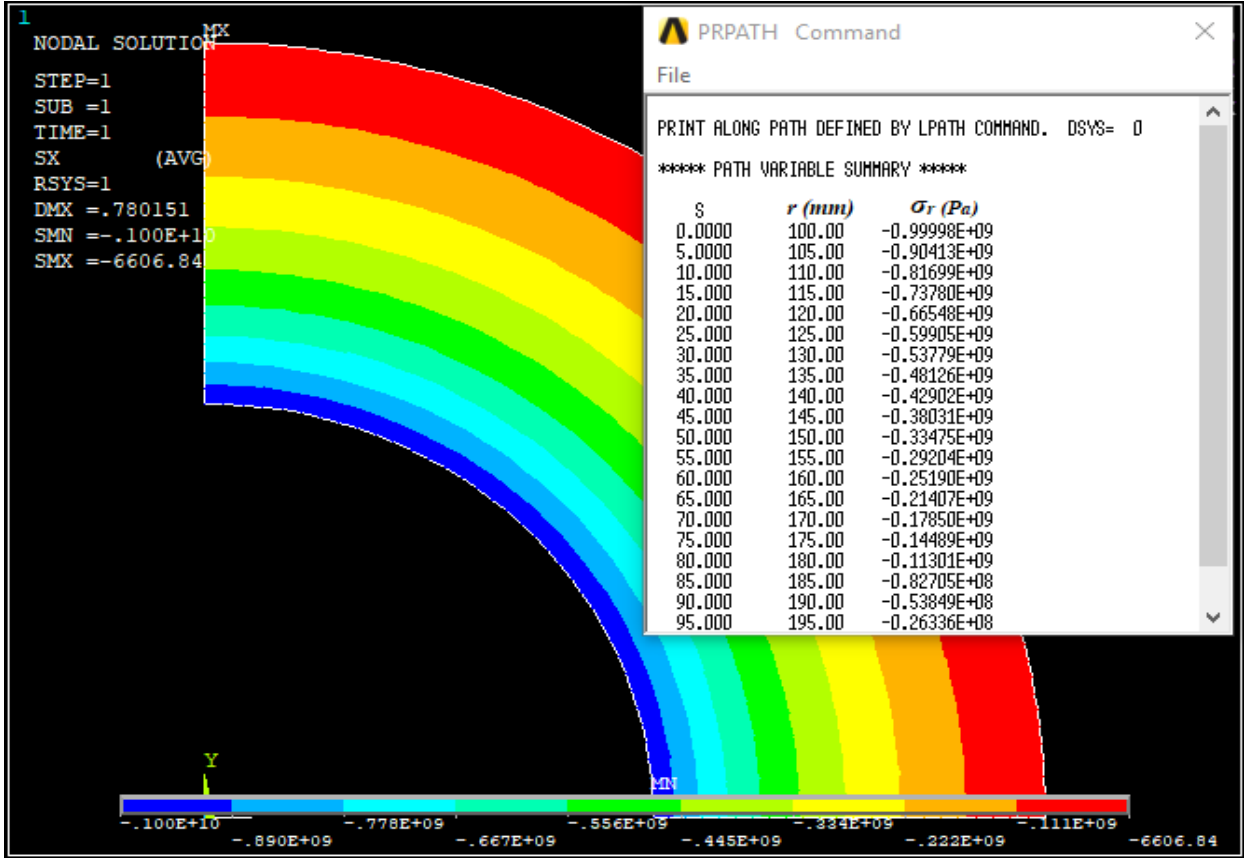
Bu çalışmada yapılan hesaplamalarda dört farklı FGM tipi içinde analitik ve SEY sonuçları birbirine benzer çıkmıştır. FGM IV'e ait kalınlık boyunca analitik ve SEY radyal gerilme değerlerinin karşılaştırması Tablo 3 gösterilmiştir. % Bağlı hata için Denklem 17 kullanılmıştır. Ve sonuçlarda çok küçük bağlı hatalar gözlemlenmiştir. Bu da analizin başarılı bir şekilde planlanıp yapıldığının göstergesidir.

$$\%Bağlı\ Hata = \left| \frac{Analitik - SEY}{Analitik} \right| * 100 \quad (17)$$

Ayrıca Şekil 8'de FGM IV'e ait kalınlık boyunca radyal gerilme ( $\sigma_r$ ) değerlerinin ANSYS sonuçlarının listesi gösterilmiştir.

**Tablo 3. FGM IV için kalınlık boyunca Analitik ve SEY radyal gerilme değerleri ve % Bağlı hata değerleri**

$r - mm$	$\sigma_r - Analitik (Pa)$	$\sigma_r - SEY (Pa)$	% Bağlı Hata
100	-1.000000E+09	-9.999800E+08	0.002
110	-8.166070E+08	-8.169900E+08	0.046906082
120	-6.651846E+08	-6.654800E+08	0.044406757
130	-5.377922E+08	-5.377900E+08	0.000413322
140	-4.288958E+08	-4.290200E+08	0.028950055
150	-3.345270E+08	-3.347500E+08	0.066673362
160	-2.517694E+08	-2.518900E+08	0.047910714
170	-1.784344E+08	-1.785000E+08	0.036774866
180	-1.128487E+08	-1.130100E+08	0.142915179
190	-5.371224E+07	-5.384900E+07	0.254613022
200	0.000000E+00	0.000000E+00	0

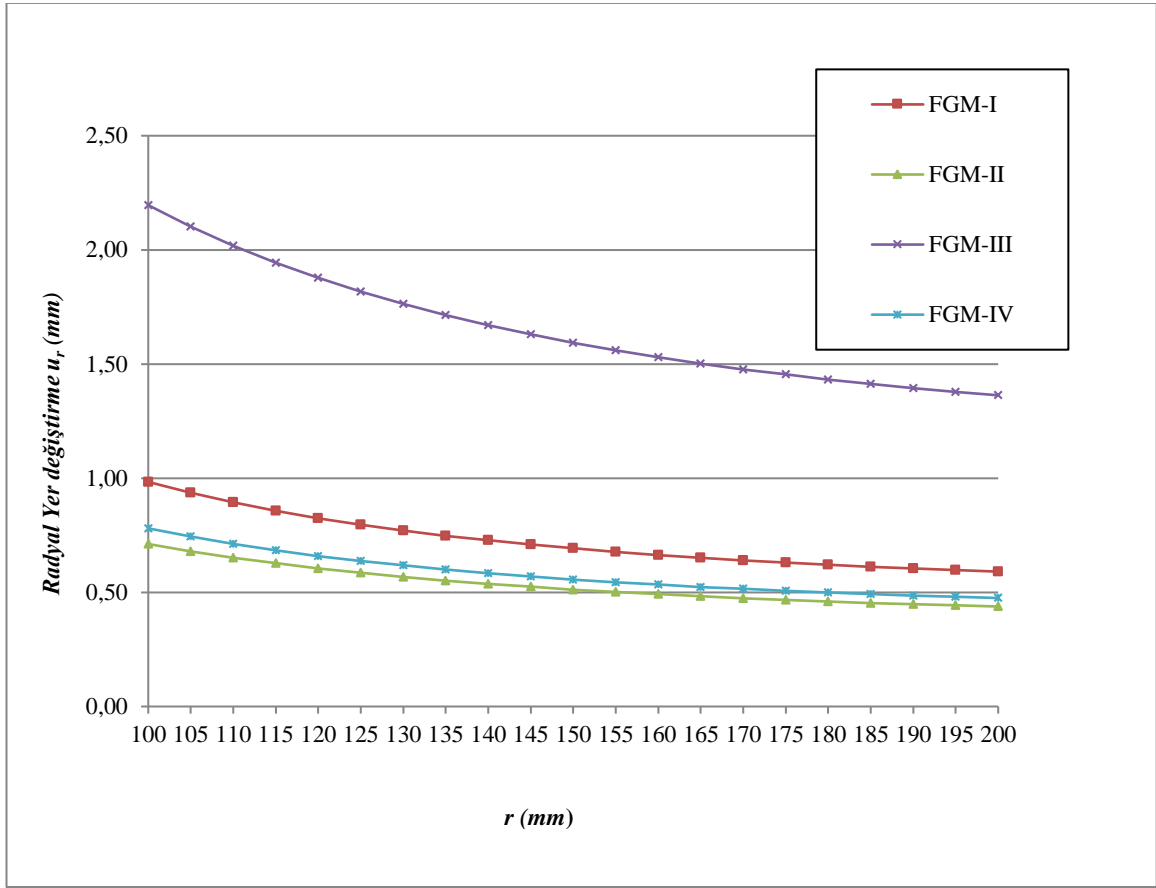


Şekil 8. FGM IV için kalınlık boyunca SEY radyal gerilme sonuçları listesi

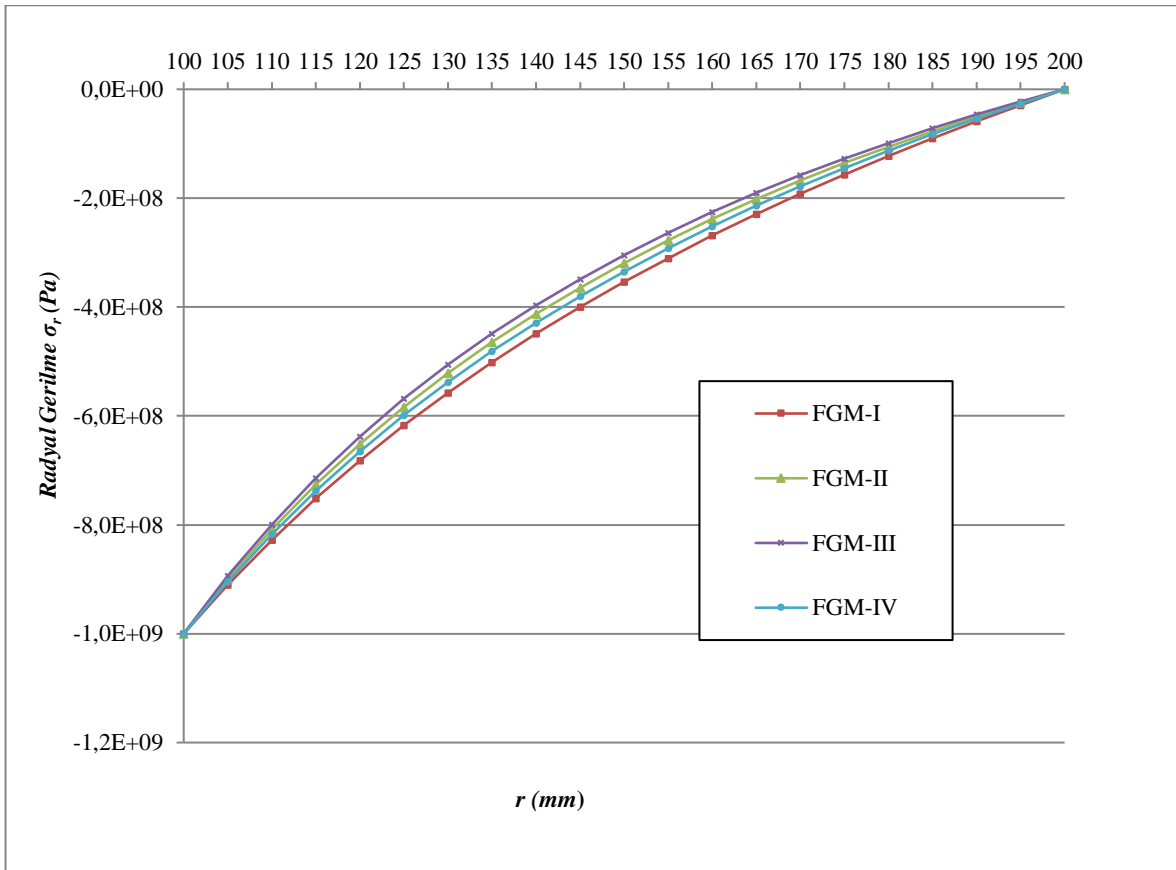
#### 4. Sonuçlar

Bu çalışmada, iç basınca maruz malzeme özellikleri üssel fonksiyona bağlı olarak değişen FGM'den yapılmış içi boş bir silindirin elastik analizi düzlem gerininin kabulü ile yapılmıştır. Farklı malzeme inhomojenite katsayılarına ( $\beta$ ) sahip dört farklı FGM tipi için radyal yer değiştirme, radyal gerilme ve teğetsel gerilme değerlerinin kolaylıkla tespiti için oldukça uygun kapalı formda analitik ifadeler sunulmuştur. Bu çalışmada ayrıca, sonlu elemanlar paket programlarından biri olan ANSYS ile nümerik sonuçlar elde edilmiş ve listelenmiştir. Analitik sonuçlarla SEY sonuçlarının bire bir uyum içerisinde oldukları tespit edilmiştir. Radyal yöndeki gerilme ve yer değiştirme değerlerine bakılarak, bu çalışmaya ait problemdeki gibi yüklemeye koşullarına sahip bir silindir için en uygun olan  $\beta$  katsayısına sahip FGM tipi belirlenebilir. Şekil 9 ve Şekil 10'da gösterildiği gibi her dört FGM tipi içinde kalınlık boyunca iç yarıçaptan dış yarıçapa doğru radyal yer değiştirme ve radyal gerilme değerleri düşmektedir. En yüksek yer değiştirme değerinin FGM III'te olduğu gözlemlenmiştir. FGM III'te iç kısım için seçilen metal malzemenin elastisite modülünün en düşük elastisite modülüne sahip olması bu sonucu doğurmuştur. Dolayısıyla iç basınca maruz malzeme özellikleri Denklem 1'deki gibi değişen FGM silindir için düşük yer değiştirmeler arzulanıyorsa iç kısımda yüksek elastisite modülüne sahip malzemeler tercih edilmelidir. Nitekim Şekil 9'da gösterildiği gibi FGM II böyle bir malzeme türüdür. En yüksek radyal gerilme değerlerine ise en yüksek  $\beta$  katsayısına sahip FGM I'de ulaşılmıştır. Dolayısıyla Denklem 1'deki gibi bir üssel fonksiyonun  $\beta$  katsayısının azalmasıyla radyal gerilme değeri düşmektedir.  $\beta$  katsayısının azalması için  $\frac{E_a(METAL)}{E_B(SERAMİK)}$  oranının düşük olduğu bir FGM tipi seçilmelidir. Şekil 10'da bu talebi karşılayan FGM III olduğu gözlemlenmektedir. Teğetsel gerilme değerleri kalınlık boyunca FGM I için artarken, FGM II ve FGM III'te azalmaktadır. FGM IV için teğetsel gerilme kalınlık boyunca hemen hemen sabit kalma eğilimindedir (Şekil 11). Silindirin radyal yönde kalınlığının ortalarına kadar (yaklaşık  $r=145$  mm'ye kadar) teğetsel gerilme ile  $\beta$  katsayısının ters orantılı yani en yüksek teğetsel gerilmelerin en düşük  $\beta$  katsayısında olduğu görülmektedir. Orta noktalara kadar Denklem 1'deki gibi bir üssel fonksiyonun  $\beta$  katsayısı azaldıkça teğetsel gerilme artmaktadır. Ancak bu durum kalınlığın ortalarından dış kısımlara doğru gidildikçe doğru orantılı olarak en yüksek teğetsel gerilmelerin en yüksek  $\beta$  katsayısında olduğu görülmektedir, yani  $\beta$  katsayısı arttıkça teğetsel gerilmeler artar (Şekil 11).

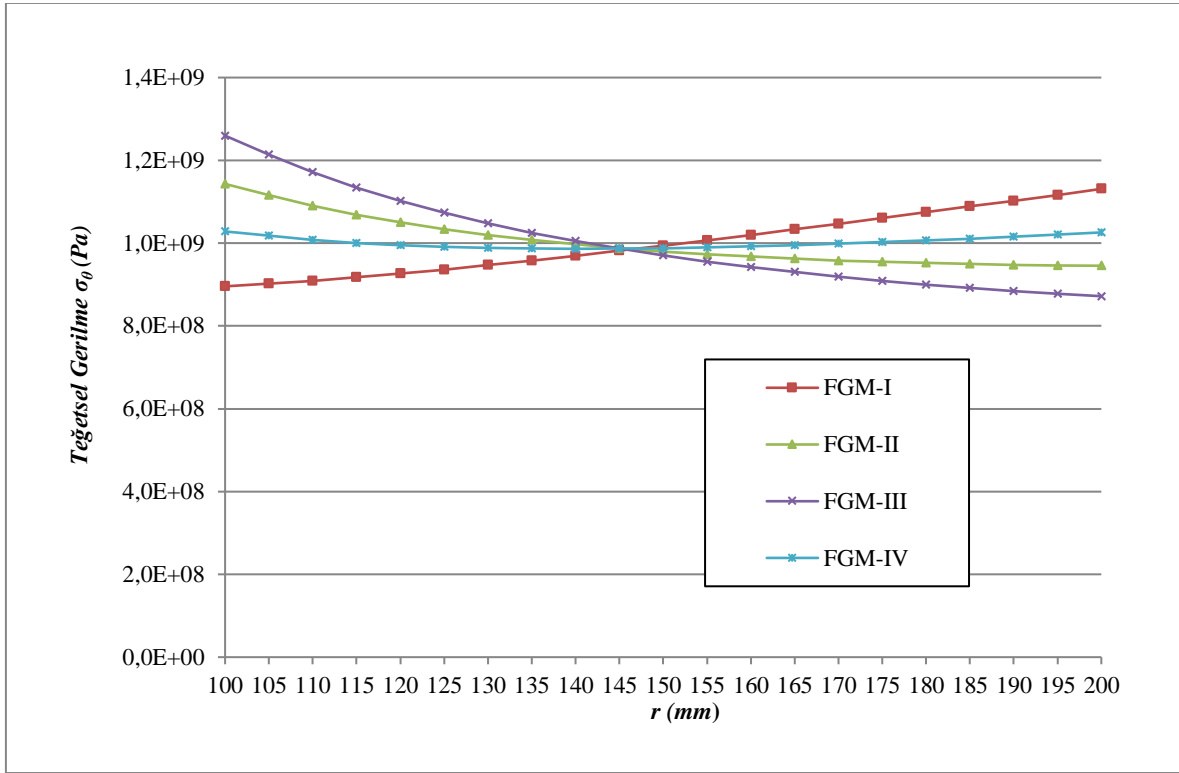




Şekil 9. Radyal yer değiştirmenin kalınlık boyunca değişimi



Şekil 10. Radyal gerilmenin kalınlık boyunca değişimi



Şekil 11. Teğetsel gerilmenin kalınlık boyunca değişimi

## Referanslar

- [1] Timoshenko, SP, Goodier, JN., Theory of Elasticity, 3rd ed, McGraw-Hill, New York, USA, 1970.
- [2] Arslan, E., “Tabakalı ve Fonksiyonel Olarak Kademelendirilmiş Küresel Basınç Kapları Üzerine Analiz”, Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, vol.23, no.1, pp. 24-35, 2017.
- [3] You, LH., Zhang, JJ. and You, XY., “Elastic Analysis of Internally Pressurized Thick-walled Spherical Pressure Vessels of Functionally Graded Materials”, International Journal of Pressure Vessels and Piping, vol.82, no.5, pp. 347-354, 2005.
- [4] Tütüncü, N. and Temel, B., “A Novel Approach to Stress Analysis of Pressurized FGM Cylinders, Disks and Spheres”, Composite Structures, vol. 91, pp. 385-390, 2009.
- [5] Chen, YZ. and Lin, XY., “Elastic Analysis for Thick Cylinders and Spherical Pressure Vessels Made of Functionally Graded Materials”, Computational Materials Science, vol.44, pp. 581-587, 2008.
- [6] Kurşun, A., Kara, E., Çetin, E., Aksoy, Ş. and Kesimli, A., “Mechanical and Thermal Stresses in Functionally Graded Cylinders”, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering, vol.8, no.2, pp. 303-308, 2014.
- [7] Nejad, MZ., Abedi, M., Lotfian, MH. and Ghannad, M., “An Exact Solution for Stresses and Displacements of Pressurized FGM Thick-Walled Spherical Shells with Exponential-Varying Properties”, Journal of Mechanical Science and Technology, vol.26, no.12, pp. 4081-4087, 2012.
- [8] Rahimi, GH., and Nejad, MZ., “Exact Solutions for Thermal Stresses in a Rotating Thick-Walled Cylinder of Functionally Graded Materials”, Journal of Applied Sciences, vol.8, no.18, pp. 3267-3272, 2008.
- [9] Boğa C., “Analytical and Numerical Axisymmetric Elastic Stress Analyses of Stationary/Rotating Discs Made of Isotropic/Orthotropic Functionally Graded Materials by the Transfer Matrix Method”, Ph. D. Thesis, Adana, Turkey, p177, 2016.
- [10] Nejad, MZ., Abedi, M., Lotfian, MH. and Ghannad, M., “Exact and Numerical Elastic Analysis for the FGM Thick-Walled Cylindrical Pressure Vessels with Exponentially-Varying Properties”, Arch. Metall. Mater., vol.61, no.3, pp. 1649–1654, 2016.

[11] Hassan A., and Keleş İ., “FGM Modelling using Dummy Thermal Loads, Applied with ANSYS APDL”, Journal of Selcuk International Science and Technology, vol.1, no.1, pp. 10-18, 2017.

[12] Demirbaş MD., and Apalak MK., “Thermal Stress Analysis with Finite Difference Method of Functionally Graded Circular Plates”, International Journal of Mechanical And Production Engineering, vol.5, no.10, pp. 78-84, 2017.