



**Mesut ÖZTÜRK<sup>2</sup> Yaşar AKKAN<sup>3</sup> Abdullah KAPLAN<sup>4</sup>**

**Makale Alış:** 17 Nisan 2017

**Makale Kabul:** 21 Mayıs 2017

### **Öz**

Matematiksel ispat kavramı öğrencilerin akıl yürütme, muhakeme yapma, çıkarımda bulunma gibi matematiksel düşünme becerilerini etkilemektedir. Öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini ortaya çıkarmada etkili olan bu kavrama K-12 matematik öğretim programında yeterince yer verilmemiştir. Ancak bilim ve sanat merkezlerinde uygulanacak farklılaştırılmış öğretim programlarında ispata yer verilebilir. Çünkü üstün yetenekli öğrenciler bilim ve sanat merkezlerinde araştırma yapma ve proje hazırlamaya yönelik eğitimler almaktadır. Öğrencilerin daha önce yapılmış matematik projelerini anlayabilmeleri ve kendilerinin matematik projeleri hazırlayabilmeleri için ispatla ilgili temel kavramları ve kavramlar arasındaki farkındalıkları bilmeleri önemlidir. Bu doğrultuda çalışma üstün yetenekli lise öğrencilerinin ispatla ilgili kavramlara yönelik bilgilerini ve kavramlar arasındaki farkındalıklarını incelenmek amacıyla yapılmıştır. Çalışmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Çalışmaya 14 üstün yetenekli lise öğrencisi katılmıştır. Çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış görüşme formu ile toplanmıştır. Çalışmada elde edilen veriler içerik analizine tabi tutulmuştur. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin genel olarak ispatla ilgili kavramlar hakkında bilgi sahibi olmalarına karşın, kavramlar arasındaki ayrımların farkında olmadıkları tespit edilmiştir.

### **Anahtar Kelimeler**

ispatla ilgili kavramlar, üstün yetenekli, lise öğrencileri, farkındalık, matematik eğitimi

1 Bu çalışmanın bir bölümü "IX. Uluslararası Eğitim Araştırmaları Kongresinde sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

2 Bayburt Üniversitesi, Eğitim Fak., Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Böl., Bayburt, Türkiye. E-mail: mesutozturk@live.com

3 Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Gümüşhane, Türkiye. E-mail: akkanyasar61@hotmail.com

4 Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Erzurum, Türkiye. E-mail: kaplan5866@hotmail.com

## Giriş

Matematik öğretim programlarının ispat kavramına verdikleri önem son yıllarda artmıştır. Buna rağmen ispatın nasıl yapılacağına bilinmemesi, ispatta geçen kavramların tam olarak anlaşılabilmesi ve ispat sürecinin bilinmemesi gibi nedenlerle öğrenciler ispat yapmakta güçlük yaşamaktadırlar (Öztürk, 2017). Bu nedenle öğrencilerin ispatla ilgili kavramlar hakkındaki bilgileri ve bu kavramlar arasındaki farkındalıklarının belirlenmesi öğrencilere ispatın daha iyi öğretilmesi için gereklidir. Nitekim Aljaberi (2014) ispat kavramının öğrenciler tarafından anlaşılmasının oldukça zor olduğunu ifade etmiştir. Uğurel, Moralı, Koyunkaya ve Karahan (2016) ispat sürecinin yeterince anlaşılabilmesinin sebebi olarak ispat yöntemlerinin yeterince bilinmemesi, ispat sürecinin bilinmemesi, ispat kavramları hakkında yeterince bilgiye sahip olunmaması gibi gerekçeler belirtmişlerdir. Biz bu çalışmada ispat kavramlarının yeterince bilinmemesini ele alarak çalışmayı bu konu üzerine temellendirdik.

Temeli aksiyomlara dayandırılan ispat kavramı günümüzde matematiğin bir dalı olarak görülmekte ve yeni teoremlerin doğruluğunun gösterilmesinde kullanılmaktadır (Bloch, 2011). Gerstein (2012) ispatı bir durumun doğruluğunun değerlendirmesinde kullanılan kurallar bütünü olarak tanımlamıştır. Matematiksel yollarla doğruluğu ispatlanabilen ifadeler teorem olarak adlandırılırken (Taylor & Garnier, 2014) doğru veya yanlış olduğu ispatlanabilen ifadeler önerme olarak adlandırılmaktadır (Kuşlu, 2016). Matematiksel olarak ispat gerektirmeyen, doğruluğu kabul edilen ifadelere aksiyom denir (Gerstein, 2012). Aksiyom kavramıyla eş anlamlı gibi görünen postulat kavramı ise aksiyomun geometrideki karşılığı olarak açıklanabilir. Başka bir ifadeyle postulat ve aksiyom kavramlarının eş anlamlı gibi görünmesine karşın cebirsel ifadelerde aksiyom, geometri ifadelerinde ise postulat kavramının kullanılmasının daha doğru olacağı ifade edilmektedir (Arıkan & Halıcıoğlu, 2016). İspat terminolojisinde geçen bir başka kavram ise lemmadır. Lemma ispatı uzun olan teoremlerin ispatlanmasında kullanılan, daha önceden ispatı yapılmış ve bilinen yardımcı teoremler olarak tanımlanmaktadır (Taylor & Garnier, 2014).

Matematiğin anlaşılması kişiye göre farklılık gösterebilir. Tall (2004) bireylerin matematiği anlamasını üç kategoride ele almıştır. İlk kategori bireylerin daha çok duyuları yoluyla anlayabileceği gerçek dünya ve zihinsel dünyanın işe koşulduğu kategoridir. Bu kategorideki bireyler sayılardan ziyade sayıların nesnelere eşleştirilmiş karşılığını anlayabilirler. İkinci kategori bireylerin matematiğin aritmetik, cebir gibi alanlarını anlayabileceği hesaplama yapabileceği, sembolik ifadeler kullanabileceği kategoridir. Temel hesaplamayla başlanılan bu kategoride bireyler ondalık sayılar, negatif tamsayılar, temsiller, iki ve üç boyutta vektörler, n-boyut ve

böylece giden durumları kavrayabilirler. Üçüncü kategori bireylerin matematiksel tanımlardan ziyade matematiksel yapılarla uğraştıkları kategoridir. Grup, vektör uzayı, topolojik uzay gibi yapıların kullanılmasının gerekli olduğu bu yapıda teoremler zincirinden inşa edilen tümdengelimsel ispatlar yer alır. Bu kategorideki bireyler yeni kavramları tanımlayabilme, mantıksal tümdengelimsel çıkarımlarda bulunarak yeni yapılar inşa edebilme özellikleri bulunur. Tall'un (2004) oluşturduğu bu kategorilerde birinci kategori bireylerin genel olarak bulunabileceği pek çoğunun ulaşabileceği, okulöncesinden yükseköğretime kadar olan süreçteki bireyleri içerisinde barındırabilir. İkinci kategori ise ortaokuldan yükseköğretimin sonuna kadar olan bireyleri içine alan bir düzey olarak düşünülebilir. Üçüncü kategori en üst düzey olup pür matematik olarak bilinir ve matematikte üst düzey bilgi ve birikime sahip olan bireylerin ulaşabileceği düzeydir. Bu çalışma ikinci düzeyde yer alan bireyleri kapsamaktadır. Bir başka ifadeyle ispatı anlayabilecek ve sadece temel düzeyde ispatları yapabilecek bireylerle çalışılmıştır.

İleri düzey matematik bilgisine sahip bireylerin yetiştirilmesi için matematiğin temel kavramlarına hâkim olan, matematikteki temel işlemleri yapıp kavrayabilen ve ispatı anlayabilen bireylerin yetiştirilmesi önemlidir. Çünkü National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000) ispatın matematikteki bir konu için değil tüm konular için kazandırılması gereken bir standart olduğuna işaret etmiştir. Bu nedenle okul öncesinden yükseköğretime kadar tüm öğretim programlarına ispatı entegre etmiştir. Ülkemizde ise T.C. Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2011) ortaöğretim matematik programında ispat öğrenme alanına yönelik "İspat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapar." kazanımıyla yer vermiştir. Buna rağmen Knuth (2002) ispatın yalnızca üst düzey başarı gösteren liselerde veya üst düzey öğrenme kapasitesine sahip bireylere öğretilbildiğini ifade etmiştir. İspat öğretiminin yapılabilmesi için öğrencilerin sahip oldukları bilgiler, bu bilgiler arasındaki ilişkileri kurmaları ve kavramlar arasındaki farkındalıkları kazanmaları gerekir (Öztürk, 2017). Bu bağlamda ispatla ilgili kavramlara ve bu kavramlar arasındaki farklılıklara yönelik öğrencilerin bilgilerinin belirlenmesinin önemli olduğu söylenebilir.

İspat yapma becerisinin geliştirilmesi için matematiksel akıl yürütme süreçlerinin işe koşulması gerekmektedir. Çünkü ispat matematiksel bir bilginin sadece doğru yanlış olmasıyla değil, neden doğru ya da neden yanlış olmasıyla ilgilidir (Öztürk, 2017). Sriraman (2005) matematik alanında profesyonel çalışabilme yeteneğine bilişsel olarak sahip olan bireyleri matematikte üstün zekalı bireyler olarak tanımlamıştır. Üstün zekalı bireyler düşünme, sorgulama, çıkarımda bulunma gibi becerilerle birlikte; bilimsel araştırma yapma becerilerini de (hipotez kurma, değişken belirleme, değişken değiştirme, deney tasarlama, model oluşturma gibi becerileri

kazandırarak) kazanabileceklerinden (Tortop, 2016) üstün zekalı bireylere geleceğin matematikçileri gözüyle bakmak mümkündür (Sriraman, 2005).

Matematik alanında üstün zekalı olan bireyler örüntüleri anlama, ilişki kurma, akıl yürütmede bulunma (Tümevarımsal, tümgengelimsel ve analojik) ve matematiksel kavramların farkında olma gibi becerileri sergileyebilirler (Güçyeter, 2015). Bu zeka türü, problem çözme ya da yeni bir şeyin doğruluğunun değerlendirilmesinde tartışabilme, bilginin parçaları arasında ilişkiler kurabilme, soyut sembollerle çalışabilme ve kavramlar arası ilişkileri görerek bunların farkında olma kapasitesine sahip olmayı gerektirir (MEB, 2007).

Matematik alanında üstün yeteneklilere yönelik alan yazın incelendiğinde problem çözme becerisini incelemeye (Öztürk, Akkan, & Kaplan, 2014; Roesler, 2015; Sak, 2011), matematiksel kavramların doğruluğunu değerlendirmeye (Subotnik, Worrell, & Olszewski-Kubilius, 2017) ve matematiksel kavramları incelemeye (Waisman, Leikin, Shaul, & Leikin, 2014) yönelik yapılan çalışmalar olarak sınıflandırılabilir. Bu çalışma matematiksel kavramları incelemeye yönelik yapılmış olup alan yazın bu doğrultuda tartışılacaktır. Matematiksel kavramların farkındalığına yönelik yapılan çalışmalar bilgi düzeyini belirleme çalışmaları, bilişsel becerilere yönelik çalışmalar ve zihinsel sürece yönelik çalışmalar olarak sınıflandırılabilir. Çalışmalar düzeylendirilecek olursa ilk düzey bilgi seviyesini belirlemeye yönelik çalışmalar, ikinci düzey bilişsel becerilere yönelik yapılan çalışmalar, üçüncü düzey ise zihinsel düzeyi belirlemeye yönelik çalışmalardır. Uluslararası alan yazında zihinsel sürece yönelik çalışan Waisman ve diğerleri (2014) yaptıkları çalışmada üstün yetenekli lise öğrencilerinin fonksiyonların grafiksel temsillerinden sembolik temsillerine geçişteki zihinsel süreçlerini incelemişlerdir. Çalışmanın sonucunda öğrencileri üstün yetenekli olup matematikte mükemmel olanlar, üstün yetenekli olup matematikte mükemmel olmayanlar, matematikte mükemmel olup üstün yetenekli olmayanlar, üstün yetenekli olmayan ve matematikte mükemmel olmayanlar ve olağandışı matematiksel yeteneğe sahip olan bireyler olarak gruplandırma yapmıştır. Ancak ülkemizde henüz bu çalışmalar çok azdır. Bu çalışmalara temel oluşturmak için birinci düzey çalışmalardan başlanması gerekmektedir. Bu nedenle bu çalışma ilk düzeye yönelik olarak yapılarak temel oluşturulması amaçlanmıştır. Üstün yeteneklilere yönelik yapılacak olan bu tür çalışmaların üstün yetenekli öğrencilerin tanımlanmasından, üstün yetenekliliğin geliştirilmesine kadar ki süreç için temel oluşturması beklenmektedir. Bu gerekçelerle çalışma üstün yetenekli lise öğrencilerinin ispatla ilgili kavramlar hakkındaki bilgileri ve bu kavramlar arasındaki farkındalıklarının belirlenmesi amacıyla yapılmıştır. Bu amaç doğrultusunda çalışmada aşağıdaki alt problemlere yanıt aranmıştır:

- Üstün yetenekli lise öğrencilerinin ispatla ilgili kavramlara yönelik bilgileri nasıldır ?
- Üstün yetenekli lise öğrencilerinin ispatla ilgili kavramlar arasındaki farkındalıkları nasıldır ?

## YÖNTEM

### Araştırma Modeli

Çalışmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Durum çalışması bir ya da birbirine bağlı bir kaç olayın derinlemesine incelenmesi olarak tanımlanmaktadır (McMillan, 2000). Bu çalışmada üstün yetenekli lise öğrencilerinin ispatla ilgili kavramlar hakkındaki bilgileri ve bu kavramlara yönelik farkındalıklarının derinlemesine incelenmesi amaçlandığından durum çalışması yöntemi kullanılmıştır.

### Katılımcılar

Çalışmada üstün yetenekli öğrenciler olarak MEB tarafından WISC-R zeka testi kullanılarak ilkokuldayken üstün yetenekli öğrenci olarak tanımlanan öğrenciler üstün yetenekli öğrenci olarak tanımlanmıştır. Çalışmaya 14 üstün yetenekli lise öğrencisi katılmıştır. Katılımcılar Türkiye'nin kuzeydoğusunda yer alan üç farklı ilde bilim ve sanat merkezlerinde öğrenim gören lise öğrencileridir. Katılımcıların belirlenmesinde ölçüt örneklem yöntemi kullanılmıştır. Ölçüt örneklem, örneklemin seçiminde belli özellikleri (ölçütleri) taşıyan bireylerin belirlenerek çalışmaya dahil edildiği yöntemdir (McMillan & Schumacher, 2014). Bu çalışmada örneklemin seçimi için iki ölçüt belirlenmiştir. Bu ölçütler öğrencilerin bilim ve sanat merkezine devam ediyor olması (MEB tarafından üstün yetenekli olarak tanımlanmış olması için bu ölçüt alınmıştır) ve fen lisesinde öğrenim görüyor olması (matematik başarısının ölçütü olarak değerlendirilmiştir) şeklinde belirlenmiştir. Çalışmaya katılım tamamen gönüllülük esasıyla olmuştur.

Çalışmanın katılımcılarından 9'u erkek, 5'i kız öğrencidir. K-12 eğitimde öğrencilerin 8'i 10. sınıfta, 6'sı 11. sınıfta öğrenim görmektedir. Katılımcı öğrenciler Wechsler Çocuklar için Zeka Ölçeği (WISC-R) testi kullanılarak üstün (özel) yetenekli olarak tanımlanmışlardır. Katılımcı öğrencilerin bu testten aldıkları puanlar 135-140 puan aralığında dağılmıştır. Katılımcı öğrencilerin tamamı matematikte proje hazırlamak amacıyla temel ispat bilgisine yönelik ders almıştır. Bu çalışma kapsamında öğrencilere herhangi bir eğitim verilmemiştir.

### Veri Toplama Araçları

Çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış görüşme formu ile toplanmıştır. Formda öğrencilere “*Aksiyom kavramını açıklayabilir misiniz?*”, “*Postulat kavramını açıklayabilir misiniz?*” gibi bilgiye yönelik sorularla “*Aksiyom ve postulat arasında farklılık var mıdır? Varsa nelerdir?*”, “*Önerme ve teorem arasındaki fark var mıdır? Varsa nelerdir?*” gibi farklılık gerektiren sorular yöneltilmiştir. Hazırlanan form matematik eğitimi alanında uzman iki öğretim üyesine verilerek soruların uygunluğunu değerlendirmeleri istenmiştir. Uzmanlardan alınan görüşler doğrultusunda bir sorunun öğrencilerin seviyesi için uygun olmadığı (“*Lemma kavramını açıklayabilir misiniz?*”) belirlenmiştir. Bu nedenle bu soru formdan çıkarılmıştır. Diğer sorular üç öğrenciye uygulanarak soruların öğrenciler için anlaşılır olup olmadığına bakılmıştır. Uygulama sonucunda formun öğrenciler için anlaşılır olduğu belirlenmiştir.

### Verilerin Analizi

Çalışmada elde edilen veriler içerik analizine tabi tutulmuştur. İçerik analizinde ilk olarak öğrencilerden elde edilen veriler transkript edilmiş. Ardından yapılan transkriptler kodlanmıştır. Yapılan kodlama sonucunda ulaşılan ifadelerin doğruluğu katılımcılara sunularak katılımcı teyidi yapılmıştır. Daha sonra kodlar ortak özelliklerine göre tasnif edilerek kategoriler oluşturulmuştur. Kategorilerde ortak özelliklerine göre sınıflandırılarak temalar oluşturulmuştur. Kodlama süreci birinci araştırmacı tarafından yapılmış olup, üçüncü araştırmacı tarafından kodlamalar uygun-uygun değil biçiminde değerlendirilmiş ve kodlayıcılar arası uyum %89 olarak bulunmuştur. Güler ve Taşdelen-Teker’e (2015) göre bu değer kodlayıcılar arası uyum için yeterlidir. Çalışmada verilerin sunumunda öğrenciler için kod isim kullanılmıştır. Kod isimler  $O_{1-14}$  şeklinde numaralandırılarak sunulmuştur.

### Geçerlik ve Güvenirlik

Çalışmanın dış geçerliğini sağlamak amacıyla örneklem özellikleri detaylı olarak tanımlanmış ve öğrencilerden bazılarının ifadelerine doğrudan aktarmalar yoluyla yer verilmiştir. Patton (2002) bu işlemlerin yapılmasının dış geçerlik için yeterli olduğunu ifade etmektedir. Çalışmanın iç geçerliğini sağlamak amacıyla veri toplama süreci iki araştırmacı tarafından beraber yürütülmüş olup, bununla birlikte katılımcı kontrolü de yapılmıştır. Merriam (2009) iç geçerlik için bu işlemlerin yapılması gerektiğini ifade etmiştir. Çalışmanın dış güvenilirliğini sağlamak amacıyla nesnellik sağlanmaya çalışılmıştır. Başka bir ifadeyle her koddan sonra o koda yönelik en az bir katılımcı ifadesi sunularak okuyucunun ifadeleri karşılaştırabilmesine imkân sunulmuştur. Gibson ve Brown (2009) nitel araştırmanın dış geçerliğinin sağlanması için nesnellığın sağlanması gerektiğini belirtmiştir. İç geçerlik için çalışmanın kendi içinde tutarlığı sağlanmış ve nitel verinin analizinde başka bir araştırmacı tarafından

kodlamalar kontrol edilmiştir. Gibson ve Brown (2009) nitel araştırmanın iç geçerliği için bu işlemlerin yapılması gerektiğini ifade etmişlerdir.

## BULGULAR

Çalışmada toplanan veriler doğrultusunda yapılan analizler sonucunda ispatın temel kavramlarına yönelik bilgi ve ispatın temel kavramlarına yönelik farkındalık olarak iki tema oluşmuştur.

### İspatın temel kavramlarına yönelik üstün yetenekli lise öğrencilerinin bilgileri

Çalışmaya katılan öğrencilerin aksiyom kavramına ilişkin getirdikleri tanımlamalar Tablo 1’de sunulmuştur.

**Tablo 1.** Üstün yetenekli öğrencilerin aksiyom kavramına getirdikleri tanımlamalar

Kodlar	Öğrenciler	f
Doğruluğu kabul edilir	Ö <sub>1</sub> - Ö <sub>2</sub> -Ö <sub>3</sub> -Ö <sub>7</sub> -Ö <sub>9</sub>	5
Doğruluğu kanıt gerektirmez	Ö <sub>1</sub> -Ö <sub>2</sub> -Ö <sub>11</sub>	3
Önermelerin ön dayanağıdır	Ö <sub>5</sub> -Ö <sub>6</sub>	2
Kanıtlanmış ifadelerdir	Ö <sub>8</sub>	1
Doğruluğu kesin olmayan ifadelerdir	Ö <sub>12</sub>	1
Bilgi sıralamasıdır	Ö <sub>4</sub>	1

Tablo 1 incelendiğinde üstün yetenekli öğrencilerin aksiyom kavramına yönelik yaptıkları tanımlamalarda en fazla kullandıkları özellik “Doğruluğu kabul edilir” kodudur (n=5). En az sergilenen özellikler ise “Kanıtlanmış ifadelerdir”, “Doğruluğu kesin olmayan ifadelerdir” ve “Bilgi sıralamasıdır” kodudur (n=1).

“Doğruluğu kabul edilir” kodunun belirlendiği öğrencilerden Ö<sub>9</sub>’un “Doğruluğu herkes tarafından kabul edilen önermelerdir.” ifadesi ile Ö<sub>7</sub>’nin “Varsayımın benzer halidir.” ifadesi aksiyom kavramını tanımlamada bu kodu kullandıklarını göstermektedir. “Doğruluğu kanıt gerektirmez” kodunun belirlendiği öğrencilerden Ö<sub>11</sub>’in “Doğruluğu ispat edilemeyen ya da ispata gerek duyulmayan önermelerdir.” cümlesi aksiyom kavramını tanımlamada bu kodu kullandığına işaret etmektedir. “Önermelerin ön dayanağıdır” kodunun belirlendiği katılımcılardan Ö<sub>5</sub>’in “Önermenin ön dayanağıdır. Başka bir ifade ile temel önermedir.” cümlesinden aksiyom kavramını açıklamak için bu kodu kullandığı anlaşılmaktadır. “Kanıtlanmış ifadelerdir.” kodunun tespit edildiği Ö<sub>8</sub>’in “Doğruluğu kanıtlanmış genel bilgilerdir.” ifadesinden aksiyom kavramını bu kodla açıkladığı anlaşılmaktadır. “Doğruluğu kesin olmayan ifadelerdir” kodunun tespit edildiği Ö<sub>12</sub>’nin “Doğruluğu kesin olmayan önermelerdir.” ifadesinden aksiyom kavramını açıklamak için bu kodu

tercih ettiği görülmektedir. Bu kategoride bulunan son kod “Bilgi sıralamasıdır” kodudur. Bu kodun tespit edildiği Ö<sub>4</sub>’ün “Öklid’in postulatları ve aksiyomları vardır. Yani bunlar bir nevi bilginin sıralamasıdır.” ifadelerinden aksiyom kavramını açıklamak için bu kodu kullandığı anlaşılmaktadır.

Üstün yetenekli öğrencilerin postulat kavramına ilişkin kullandıkları ifadeler Tablo 2’de sunulmuştur.

**Tablo 2.** Üstün yetenekli öğrencilerin postulat kavramına getirdikleri tanımlamalar

Kodlar	Öğrenciler	f
Doğruluğu ispatlanamaz	Ö <sub>1</sub> -Ö <sub>9</sub> -Ö <sub>11</sub>	3
İspatlanmasına gerek yoktur	Ö <sub>1</sub> -Ö <sub>5</sub> -Ö <sub>6</sub>	3
İspatlanmış kurallardır	Ö <sub>2</sub> -Ö <sub>3</sub>	2
Sorunun çözümünde kullanılan stratejilerdir	Ö <sub>7</sub> - Ö <sub>12</sub>	2
Doğruluğu kabul edilir	Ö <sub>9</sub>	1
Doğruluğu kesin değildir	Ö <sub>11</sub>	1
Bilgi sıralamasıdır	Ö <sub>4</sub>	1

Tablo 2 incelendiğinde üstün yetenekli öğrencilerin postulat kavramına yönelik yaptıkları tanımlamalarda en fazla kullandıkları özellikler “Doğruluğu ispatlanamaz” ve “İspatlanmasına gerek yoktur.” kodlarıdır (n=3). En az sergilenen özellikler ise “Doğruluğu kabul edilir”, “Doğruluğu kesin değildir” ve “Bilgi sıralamasıdır” kodlarıdır (n=1).

“Doğruluğu ispatlanamaz” ve “Doğruluğu kabul edilir.” kodlarıyla postulat kavramını açıkladığı belirlenen katılımcılardan Ö<sub>9</sub>; “Doğruluğu mantıksal olarak kabul edilir ancak ispatlanamaz.” ifadesini kullanmıştır. “Doğruluğu ispatlanamaz” koduyla birlikte “Doğruluğu kesin değildir” kodunu kullanarak postulat kavramını açıkladığı belirlenen katılımcılardan Ö<sub>11</sub>, postulat kavramını açıklamak için “Bir konu hakkında konuyla ilgili bilgileri ortaya koymaktır. Ancak doğruluğu kesin olmayıp herkes tarafından kabul edilir.” ifadelerini kullanmıştır. “İspatlanmasına gerek yoktur.” kodunu kullanarak postulat kavramını açıkladığı belirlenen Ö<sub>1</sub>’in “Doğruluğu ispat edilemeyen ya da ispatına gerek duyulmayan kabullerdir.” ifadesi bu kodu desteklemektedir. “İspatlanmış kurallardır.” kodunun tespit edildiği katılımcılardan Ö<sub>2</sub>’nin “İspatlanmış kurallardır. Doğruluğu ispat yapılarak kabul edilir.” cümleleri bu kodu desteklemektedir. “Sorunun çözümünde kullanılan stratejilerdir” kodunun sergilendiği belirlenen katılımcılardan Ö<sub>7</sub>’nin “Bir sorunun çözüme ulaştırılması için aranan yoldur.” ifadesini kullanması bu kodu desteklemektedir. “Bilgi sıralamasıdır.” kodunun sergilendiği belirlenen katılımcılardan Ö<sub>4</sub>’ün “Aksiyomla postulat aynı anlama gelmektedir. Öklid postulatı



vardır. Bu bilgi sıralaması gibi bir şeydir.” ifadeleri bu koda dayanarak postulat kavramını açıkladığını göstermektedir.

Üstün yetenekli öğrencilerin önerme kavramına ilişkin kullandıkları ifadeler Tablo 3’de sunulmuştur.

**Tablo 3.** Üstün yetenekli öğrencilerin önerme kavramına getirdikleri tanımlamalar

Kodlar	Öğrenciler	f
Doğruluğu kesin olmayan ifadelerdir	Ö <sub>6</sub> -Ö <sub>8</sub> - Ö <sub>11</sub> -Ö <sub>14</sub>	4
Doğru veya yanlış fikir üretmedir	Ö <sub>3</sub> - Ö <sub>4</sub> - Ö <sub>7</sub>	3
Doğruluğu veya yanlışlığı kesindir	Ö <sub>2</sub>	1
Bir ifadenin doğruluk derecesidir	Ö <sub>5</sub>	1
Doğruluğu ya da yanlışlığı ispatlanabilir	Ö <sub>1</sub>	1

Tablo 3 incelendiğinde üstün yetenekli öğrencilerin önerme kavramına yönelik yaptıkları tanımlamalarda en fazla kullandıkları özellik “Doğruluğu kesin olmayan ifadelerdir” kodudur (n=4). En az sergilenen özellikler ise “Doğruluğu veya yanlışlığı kesindir”, “Bir ifadenin doğruluk derecesidir” ve “Doğruluğu ya da yanlışlığı ispatlanabilir” kodlarıdır (n=1).

“Doğruluğu kesin olmayan ifadelerdir” kodunun tespit edildiği öğrencilerden Ö<sub>8</sub>’in “Doğruluğu kanıtlanmamış geçici çözüm yollarıdır.” ifadesi bu koda uygun olarak önerme kavramını açıkladığını göstermektedir. “Doğru veya yanlış fikir üretmedir” koduna göre önerme kavramını açıkladığı belirlenen katılımcılardan Ö<sub>3</sub>’ün “Belli bir konu hakkında fikir üretmedir. Bu fikirler doğru ya da yanlış önermeler olabilir.” ifadeleri bu koda uygun açıklama yaptığını göstermektedir. “Doğruluğu veya yanlışlığı kesindir” koduna göre önerme kavramını açıkladığı belirlenen Ö<sub>2</sub>, “Doğru veya yanlış olduğu kesin olan bilgilere denir. Ya doğrudur ya da yanlıştır.” ifadelerini kullanmıştır. “Bir ifadenin doğruluk derecesidir” koduna göre önerme kavramını açıkladığı belirlenen katılımcılardan Ö<sub>5</sub> “Önerme bir şeyin ne düzeyde –derecede- doğru olduğunu gösterir.” ifadelerine yer vermiştir. “Doğruluğu ya da yanlışlığı ispatlanabilir” koduna göre önerme kavramını açıkladığı belirlenen katılımcılardan Ö<sub>1</sub>’in “Doğruluğu ya da yanlışlığı olan olaylardır.” ifadesi bu durumu desteklemektedir.

Üstün yetenekli öğrencilerin teorem kavramına ilişkin kullandıkları ifadeler Tablo 4’de sunulmuştur.

**Tablo 4.** Üstün yetenekli öğrencilerin teorem kavramına getirdikleri tanımlamalar

Kodlar	Öğrenciler	f
Güçlü kanıtlarla desteklenen kesinleşmemiş ifadelerdir	Ö <sub>5</sub> -Ö <sub>6</sub> -Ö <sub>8</sub> -Ö <sub>13</sub>	4
Doğruluğu ispatlanabilen ifadelerdir	Ö <sub>1</sub> -Ö <sub>3</sub> -Ö <sub>11</sub>	3
Doğru kabul edilen ifadelerdir	Ö <sub>2</sub> -Ö <sub>4</sub>	2
Bir araştırmada ulaşılan sonuçtur	Ö <sub>7</sub> -Ö <sub>12</sub>	2
Doğruluğu ispatlanmamış ifadelerdir	Ö <sub>9</sub> -Ö <sub>10</sub>	2

Tablo 4 incelendiğinde üstün yetenekli öğrencilerin teorem kavramına yönelik yaptıkları tanımlamalarda en fazla kullandıkları özellik “Güçlü kanıtlarla desteklenen kesinleşmemiş ifadelerdir” kodudur (n=4). En az sergilenen özellikler ise “Doğru kabul edilen ifadelerdir”, “Bir araştırmada ulaşılan sonuçtur” ve “Doğruluğu ispatlanmamış ifadelerdir” kodlarıdır (n=2).

“Güçlü kanıtlarla desteklenen kesinleşmemiş ifadelerdir” koduna göre teorem kavramını açıkladığı belirlenen katılımcılardan Ö<sub>13</sub>’ün “Gerçekliği tam olarak ispat edilememiş, ancak gerçekliğine dair önemli kanıtlar olan yönergelerdir.” ifadesi bu durumu desteklemektedir. “Doğruluğu ispatlanabilen ifadelerdir” koduna göre teorem kavramını açıkladığı belirlenen katılımcılardan Ö<sub>1</sub>’in “Doğruluğu ispatlanabilen önermelerdir.” cümlesi bu durumun gerekçesidir. “Doğruluğu kabul edilen ifadelerdir” koduna göre teorem kavramını açıkladığı belirlenen öğrencilerden Ö<sub>2</sub>’nin “İspatı kabul edilmiş kurallardır.” ifadesi bu koda göre teorem kavramını açıkladığını göstermektedir. “Bir araştırmada ulaşılan sonuçtur” koduna göre teorem kavramını açıkladığı belirlenen Ö<sub>7</sub> “Bir araştırmada ulaşılan sonuçtur.” ifadesiyle bu koda dayalı olarak teorem kavramını açıkladığını göstermiştir. “Doğruluğu ispatlanmamış ifadelerdir” koduna göre teorem kavramını açıkladığı belirlenen katılımcılardan Ö<sub>9</sub>’un “Doğruluğu ispatlanmamış görüş veya tezlerdir.” ifadesi bu durumu desteklemektedir.

Üstün yetenekli öğrencilerin sonuç kavramına ilişkin kullandıkları ifadeler Tablo 5’de sunulmuştur.

**Tablo 5.** Üstün yetenekli öğrencilerin sonuç kavramına getirdikleri tanımlamalar

Kodlar	Öğrenciler	f
Birkaç ifadeyi analiz edip çıkarımda bulunmadır	Ö <sub>1</sub> -Ö <sub>2</sub> -Ö <sub>3</sub> -Ö <sub>4</sub> -Ö <sub>6</sub> -Ö <sub>7</sub> - Ö <sub>10</sub> -Ö <sub>13</sub>	8
Problem çözme aşamalarına uygun çözüm yaparak bir sonuca ulaşmadır	Ö <sub>8</sub> -Ö <sub>9</sub> -Ö <sub>11</sub>	3
Karar verme	Ö <sub>1</sub>	1

Tablo 5 incelendiğinde üstün yetenekli öğrencilerin sonuç kavramına yönelik yaptıkları tanımlamalarda en fazla kullandıkları özellik “Birkaç ifadeyi analiz edip çıkarımda bulunmadır” kodudur (n=4). En az sergilenen özellik ise “Karar verme” kodudur (n=1).

“Birkaç ifadeyi analiz edip çıkarımda bulunmadır” koduyla birlikte sonuç kavramını açıkladığı belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri Tablo 6’da sunulmuştur.

**Tablo 6.** "Birkaç ifadeyi analiz edip çıkarımda bulunmadır" koduna göre sonuç kavramını açıkladığı belirlenen katılımcılardan bazılarının görüşleri

Öğrenci	İfadesi
Ö <sub>1</sub>	Karar vermedir. Başka bir ifadeyle analiz edip sonuca ulaşmadır.
Ö <sub>2</sub>	Belli analizler sonucunda ulaşılan bilgiler ya da çıktılardır.
Ö <sub>4</sub>	Bir problemin ya da sorunun çözülmeye çalışılıp sonucunda bir kavrama ulaşılmasıdır.
Ö <sub>10</sub>	Bir konuda elde ettiğimiz çıkarımlardır.

“Problem çözme aşamalarına uygun çözüm yaparak bir sonuca ulaşmadır” koduna göre sonuç kavramını açıkladığı belirlenen katılımcılardan Ö<sub>8</sub>’in “Herhangi bir problemin belli aşamaları izleyerek çözülmesi ve çözümün sonucunda ortaya çıkan cevaptır.” ifadesi bu durumun kanıtıdır. Sonuç kavramını “Karar verme” koduna uygun olarak açıklayan Ö<sub>1</sub> katılımcısının ifadesi Tablo 6’da görülmektedir.

### İspatın temel kavramlarına yönelik üstün yetenekli lise öğrencilerinin farkındalıkları

Çalışmada bu temada dört kategori belirlenmiştir. Bu kategoriler “Aksiyom ve postulatın ortak özellikleri”, “Aksiyom ve postulatın farkları”, “Önerme ve teoremin ortak özellikleri” ve “Önerme ve teoremin farkları”dır.

“Aksiyom ve postulatın ortak özellikleri” kategorisinde elde edilen kodlar ve bu kodların tespit edildiği öğrenciler Tablo 7’de sunulmuştur.

**Tablo 7.** "Aksiyom ve postulatların ortak özellikleri" kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı

Kodlar	Öğrenciler	f
İkisi de önermedir	Ö <sub>3</sub>	1
İkisi de aynıdır	Ö <sub>4</sub>	1
İkisinin de doğruluğu kesin değildir	Ö <sub>11</sub>	1
İkisini de ispatlamaya gerek yoktur	Ö <sub>11</sub>	1

Tablo 7 incelendiğinde bu kategoride elde edilen bütün kodların eşit sayıda katılımcı tarafından sergilendiği görülmektedir ( $n=1$ ). “İkisinin de doğruluğu kesin değildir” ve “İkisini de ispatlamaya gerek yoktur” kodlarının aynı katılımcı tarafından sergilendiği tespit edilmiştir.

“İkisinin de doğruluğu kesin değildir” ve “İkisini de ispatlamaya gerek yoktur” kodlarının tespit edildiği Ö<sub>11</sub>’in “Her ikisinin de doğruluğu kesin değildir. Ayrıca ikisini de ispatlamaya gerek yok.” ifadelerinden bu kodları sergilediği anlaşılmaktadır. “İkisi de önermedir” kodunun tespit edildiği katılımcılardan Ö<sub>3</sub>’ün “Birisi kabul edilmiş (aksiyom), diğeri ispatlanmış (postulat) önermedir. Ama her ikisi de önermedir.” ifadelerinden bu kodu sergilediği belirlenmiştir. “İkisi de aynıdır” kodunun tespit edildiği katılımcılardan Ö<sub>4</sub> ise “İkisi birbirinin aynıdır. Aralarında hiçbir fark yok.” ifadelerini kullanmıştır.

“Aksiyoim ve postulatın farkları” kategorisinde elde edilen kodlar ve bu kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 8’de sunulmuştur.

**Tablo 8.** "Aksiyoim ve postulatın farkları" kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı

Kodlar	Öğrenciler	f
Aksiyoim kanıt gerektirmez, postulat ispat gerektirmez	Ö <sub>1</sub>	1
Postulatın ispatı vardır, aksiyoimin ispatı yoktur	Ö <sub>2</sub>	1

Tablo 8 incelendiğinde bu kategoride elde edilen kodların eşit sayıda katılımcı tarafından sergilendiği görülmektedir ( $n=1$ ). Her iki kodda farklı birer katılımcı tarafından sergilenmiştir.

“Aksiyoim kanıt gerektirmez, postulat ispat gerektirmez” kodunun tespit edildiği Ö<sub>1</sub> katılımcısının “Aksiyoimde kabullerin kanıtlanmasına gerek yoktur. Postulatların ise ispatlanmasına gerek yoktur.” İfadeleri bu kodu desteklemektedir. Ö<sub>2</sub> katılımcısının “Postulatın ispatı vardır. Yani doğruluğu ispatlanarak kabul edilir. Aksiyoimin ise ispatı yoktur. İspatsız kabul edilir.” ifadeleri “Postulatın ispatı vardır, aksiyoimin ispatı yoktur” kodunu desteklemektedir.

“Önerme ve teoremin ortak özellikleri” kategorisinde elde edilen tek kod “İkisi de kesin değildir” kodudur. İki öğrenci tarafından sergilendiği belirlenen bu kodu sergilediği belirlenen katılımcıların ifadeleri Tablo 9’da sunulmuştur.

**Tablo 9.** "İkisi de kesin değildir" kodunu sergilediği belirlenen katılımcıların ifadeleri

Öğrenci	İfadesi
Ö <sub>6</sub>	Önerme kesin olmayan birilerinin ortaya sunduğu şey. Teorem, kesinleşmemiş, kanıtlanmamış, öne sürülmüş, yasalaşmamış ifadelerdir. Yani ikisi de kesin değildir.
Ö <sub>10</sub>	Her ikisinin de doğruluğu kanıtlanmamıştır.

“Önerme ve teoremin farkları” kategorisinde elde edilen kodlar ve bu kodların katılımcılara göre dağılımı Tablo 10’da sunulmuştur.

**Tablo 10.** "Önerme ve teoremin farkları" kategorisinde elde edilen kodların katılımcılara göre dağılımı

Kodlar	Öğrenciler	f
Teorem doğrudur, önerme ise doğru ya da yanlış olabilir	Ö <sub>1</sub> -Ö <sub>2</sub> -Ö <sub>3</sub>	3
Önermenin doğruluğu kanıtlanmamıştır, teoremin doğruluğu kanıtlanmıştır	Ö <sub>8</sub> -Ö <sub>11</sub>	2
Teorem bir fikir, önerme ise o fikrin sunulmuş halidir	Ö <sub>4</sub>	1

Tablo 10 incelendiğinde “Önerme ve teoremin farkları” kategorisinde en sık sergilenen kodun “Teorem doğrudur, önerme ise doğru ya da yanlış olabilir” kodu olduğu görülmektedir (n=3). Bu kategoride en az sergilenen kodun ise “Teorem bir fikir, önerme ise o fikrin sunulmuş halidir” kodu olduğu görülmektedir (n=1).

“Teorem doğrudur, önerme ise doğru ya da yanlış olabilir” kodunun sergilendiği belirlenen katılımcılardan Ö<sub>2</sub>’nin “Önerme doğru veya yanlış olabilir. Yani ya kesinlikle doğrudur ya da kesinlikle yanlıştır. Teorem ise kesinlikle doğrudur ve doğruluğu kabul edilmiştir.” ifadeleri bu kodu desteklemektedir. “Önermenin doğruluğu kanıtlanmamıştır, teoremin doğruluğu kanıtlanmıştır” kodunun sergilendiği belirlenen katılımcılardan Ö<sub>8</sub>’in “Önerme doğruluğu kanıtlanmamış geçici çözüm yollarıdır. Teorem ise doğruluğu kanıtlanmış fakat zamanla değişebilen bilgilerdir.” ifadesinden aradaki farkları bu koda göre açıkladığı anlaşılmaktadır. “Teorem bir fikir, önerme ise o fikrin sunulmuş halidir” kodunun tespit edildiği Ö<sub>4</sub> katılımcısı ise “Önerme bir probleme sunulan çözüm yolu gibidir. Yani önerme sunulur teorem ise o önermenin fikridir.” ifadelerinden bu koda uygun ayırım yaptığı anlaşılmaktadır.

## Tartışma, Sonuç Ve Öneriler

Üstün yetenekli lise öğrencilerin ispatın temel kavramlarına yönelik bilgileri ve bu kavramlar arasındaki farkındalıklarını incelemeye yönelik yapılan bu çalışmada öğrencilerin kavramlar hakkında bilgi sahibi olmalarına karşın –öğrenciler genel

olarak aksiyom, önerme ve sonuç kavramlarını tanımlayabilmiştir ancak teorem kavramını yeterince açıklayamamışlardır- kavramlar arasındaki ayrımların genel olarak farkında olmadıkları tespit edilmiştir.

Aksiyom kavramını doğru bildiği belirlenen öğrenciler bu kavramı açıklamak için “Doğruluğu kabul edilir”, “Doğruluğu kanıt gerektirmez”, “Önermelerin ön dayanağıdır” ve “Doğruluğu kesin olmayan ifadelerdir” tanımlamalarından yararlanmışlardır (n=9). Aksiyom kavramına yönelik eksik veya yanlış bilgi sahibi olduğu belirlenen öğrenciler ise “Kanıtlanmış ifadelerdir” ve “Bilgi sıralamasıdır” ifadelerini kullanmışlardır. Dane (2008) ilköğretim matematik öğretmeni adayları ile yürüttüğü çalışmada katılımcıların küçük bir kısmının aksiyom kavramını tam olarak açıklayabilirken yaklaşık yarısının yanlış yanıt verdiğini ifade etmiştir. Üstün yetenekli öğrencilerle yapılan bu çalışmada öğrencilerin doğru tanımlamalar yapması bu durumla çelişmektedir. Bu durumun sebebi sayısal ifadelerden kaynaklanmaktadır. Başka bir anlatımla yapılan bu çalışmada da az sayıda öğrenci doğru tanımlamalar yapmış ancak öğrencilerin yaklaşık yarısı aksiyom kavramına doğru yanıt verememiştir. Postulat kavramına yönelik doğru tanımlamalar yaptığı belirlenen öğrenciler “İspatlanmasına gerek yoktur”, “Doğruluğu kabul edilir” ve “Doğruluğu kesin değildir” kodlarıyla postulat kavramını açıklamışlardır (n=5). Postulat kavramına yönelik doğru tanım kullanamayan öğrenciler ise “Doğruluğu ispatlanamaz”, “İspatlanmış kurallardır”, “Sorunun çözümünde kullanılan stratejilerdir” ve “Bilgi sıralamasıdır” kodlarını kullanmışlardır. Öğrencilerin önerme kavramına getirdikleri açıklamalar incelendiğinde bu kavrama yönelik doğru tanımlamalar yapan öğrenciler “Doğruluğu kesin olmayan ifadelerdir”, “Doğru veya yanlış fikir üretmedir” ve “Doğruluğu ya da yanlışlığı ispatlanabilir” ifadelerine yer vermişlerdir (n=8). Önerme kavramına yönelik doğru tanımlama yapamayan öğrenciler ise “Doğruluğu veya yanlışlığı kesindir” ve “Bir ifadenin doğruluk derecesidir” tanımlamalarında bulunmuşlardır. Teorem kavramına yönelik tanımlamalar incelendiğinde bu kavramı doğru tanımlayan öğrencilerin sadece “Doğruluğu ispatlanabilen ifadelerdir” kodunu kullandığı tespit edilmiştir (n=3). Bu kavrama yönelik doğru tanımlamalarda bulunamayan öğrenciler ise “Güçlü kanıtlarla desteklenen kesinleşmemiş ifadelerdir”, “Doğru kabul edilen ifadelerdir”, “Bir araştırmada ulaşılan sonuçtur” ve “Doğruluğu ispatlanmamış ifadelerdir” tanımlamalarında bulunmuştur. Dane (2008) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının çoğunun teorem kavramını anlamada güçlük çektiği ve kavram yanlışlığına sahip olduğunu belirlemiştir. Gürses, Doğan & Yalçın (2005) kimya ve sınıf öğretmeni adaylarıyla yürüttükleri çalışmada öğretmen adaylarının ispat ve teori kavramlarına yönelik bilgi eksiklikleri olduğunu belirlemiştir. Bu çalışmada üstün yetenekli öğrencilerin teorem kavramına yönelik tanımlamalarının yetersiz olması sözü geçen çalışmaların bulgularını desteklemektedir. Sonuç kavramına yönelik

yapılan tanımlamalar dikkate alındığında yapılan tanımlamaların tamamının -“Birkaç ifadeyi analiz edip çıkarımda bulunmadır”, “Problem çözme aşamalarına uygun çözüm yaparak bir sonuca ulaşmadır” ve “Karar verme”- doğru olduğu belirlenmiştir (n=11). Buna karşın öğrencilerin bazılarının sonuç kavramını problem çözme bağlamında düşündüğü belirlenmiştir.

Farkındalık bağlamında incelendiğinde aksiyom ve postulatın ortak özelliklerinin farkında olduğu belirlenen katılımcılar “İkisi de önermedir” ve “İkisini de ispatlamaya gerek yoktur” tanımlamalarından yararlanmışlardır (n=2). Bu iki kavramın ortak özelliklerine yönelik eksik veya yanlış tanımlamada bulunan öğrenciler ise “İkisi de aynıdır” ve “İkisinin de doğruluğu kesin değildir” ifadelerini kullanmışlardır (n=2). Aksiyom ve postulat kavramlarının farklarına yönelik öğrenci ifadeleri incelendiğinde doğru tanımlama yapan öğrenci bulunmazken eksik veya yanlış tanımlama yapan öğrenciler “Aksiyom kanıt gerektirmez, postulat ispat gerektirmez” ve “Postulatın ispatı vardır, aksiyomun ispatı yoktur” ifadelerine yer vermiştir (n=2). Önerme ve teoremin ortak özelliklerin yönelik ifadeler incelendiğinde öğrencilerin önerme ve teoremin ortak özelliklerine yönelik doğru tanımlama yapamadıkları belirlenmiştir. Dane (2008) ilköğretim matematik öğretmenlerinin önerme ve teorem kavramlarını eş anlamlı gibi gördüklerini belirlemiştir. Eksik veya yanlış tanımlama yaptığı belirlenen katılımcılardan elde edilen tek kod “İkisi de kesin değildir” kodudur (n=2). Önerme ve teoremin farklarına yönelik ifadeler incelendiğinde doğru ifade kullandığı belirlenen katılımcıların “Teorem doğrudur, önerme ise doğru ya da yanlış olabilir” koduna toplandığı tespit edilmiştir (n=3). Eksik veya yanlış tanımlama bulunan öğrencilerin ise “Önermenin doğruluğu kanıtlanmamıştır, teoremin doğruluğu kanıtlanmıştır” ve “Teorem bir fikir, önerme ise o fikrin sunulmuş halidir” ifadelerinde toplandığı saptanmıştır (n=3).

Bu çalışma belli sınırlılıklar altında gerçekleştirilmiştir. Bu sınırlılıkların ilki çalışmanın nitel araştırma desenine göre yürütülmüş olması, bu nedenle nitel araştırma deseninin sahip olduğu tüm sınırlılıkları taşımasıdır. Bir diğer sınırlılık ise çalışmaya katılan öğrencilerin çalışma öncesinde ispat yapabilme durumlarının ölçülmemiş olması ve buna yönelik bu çalışma kapsamında herhangi bir eğitim verilmemiş olmasıdır. Başka bir ifadeyle öğrencilerin ispata yönelik almış olduğu eğitimden dolayı öğrencilerin ispatı bildiği kabul edilmiştir. Bu durum çalışmada toplanan verilerin zenginliği açısından sınırlılık oluşturmuştur.

Çalışmanın sonucunda öğrencilerin genel olarak ispatın temel kavramlarını bilmedikleri veya farkında olmadıkları bulunmuştur. Öğrencilere bu becerileri kazandıracak derslerin, uygulamaların veya etkinliklerin yapılması uygulayıcılar için önerilebilir. Gelecek araştırmacılar, üstün yetenekli öğrencilerin ispat veya akıl

yürütmelerini inceleyebilir. Öğrencilere ispat becerisi kazandıracak deneysel çalışmalar yürütebilir. Ayrıca öğrencilerin ispat kavramlarını duyduklarındaki zihinsel durumlarını inceleyecek beyin temelli araştırmalar (fMRI veya EEG kullanılarak) yapılabilir.

### Kaynakça

- Aljaberi, N. M. (2014). Pre-service elementary school teachers' level of mathematical thinking and their attitudes toward mathematics. *Journal of Education and Human Development*, 3 (3), 181-195.
- Ankan, A., & Halıcıoğlu, S. (2016). *Soyut matematik* (3. baskı). Ankara: Palme Yayıncılık.
- Bloch, E. D. (2011). *Proofs and fundamentals: a first course in abstract mathematics* (2. edition). New York, NY: Springer Science+Business Media.
- Dane, A. (2008). İlköğretim matematik 3. sınıf öğrencilerinin tanım, aksiyom ve teorem kavramlarını anlama düzeyleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 16 (2), 495-506.
- Gerstein, L. J. (2012). *Introduction to Mathematical Structures and Proofs*. New York: Springer.
- Gibson, W., & Brown, A. (2009). *Working with Qualitative Data*. Thousand Oaks, California: SAGE Publications Inc.
- Güçyeter, Ş. (2015). Ortaokul matematik öğretmenleri ve sınıf öğretmenlerinin matematikte üstün zekâlı öğrenci özelliklerine yönelik yargılarının incelenmesi. *Türk Üstün Zekâ ve Eğitim Dergisi*, 5 (1), 44-66.
- Güler, N., & Taşdelen-Teker, G. (2015). Açık uçlu maddelerde farklı yaklaşımlarla elde edilen puanlayıcılar arası güvenilirliğin değerlendirilmesi. *Eğitimde ve Psikolojide Ölçme ve Değerlendirme*, 6 (1), 12-24.
- Gürses, A., Doğan, Ç., & Yalçın, M. (2005). Bilimin doğası ve yüksek öğrenim öğrencilerinin bilimin doğasına dair düşünceleri. *Milli Eğitim Dergisi*, 33 (166), 68-76.
- Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5 (1), 61-88.
- Kuşlu, H. (2016). *Nasîruddin Tâsî'de önermeler mantığı*. İstanbul: Klasik.
- McMillan, J. H. (2000). *Educational research fundamentals for the consumer* (3. b.). New York: Longman.
- McMillan, J. W., & Schumacher, S. (2014). *Research in education: Evidence-based inquiry* (Seventh Edition). Boston: Pearson.
- Merriam, S. B. (2009). *Qualitative Research: A Guide to Design and Implementation* (3rd Editions). San Francisco: John Wiley & Sons.
- Öztürk, M. (2017). *Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin bilişsel açıdan incelenmesi*. (Yayınlanmamış doktora tezi), Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Öztürk, M., Akkan, Y., & Kaplan, A. (2014). Üstün yetenekli öğrencilerin problem çözerken sergiledikleri üst bilişsel becerilerin incelenmesi: Gümmüşhane ili örneği. 11. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi (s. 341). Adana: Çukurova Üniversitesi.
- Roesler, R. A. (2015). Toward solving the problem of problem solving: An analysis framework. *Journal of Music Teacher Education*, 26 (1), 1-15.



- Sak, U. (2011). Selective problem solving (sps): A model for teaching creative problem-solving. *Gifted Education International*, 27 (3), 349-357.
- Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education*, 17 (1), 20-36.
- Subotnik, R. F., Worrell, F. C., & Olszewski-Kubilius, P. (2017). The 15-minute audition: Translating a proof of concept into a domain-specific screening device for mathematical talent. *Gifted Child Quarterly*, 1-8.
- Tall, D. (2004). *Thinking Through Three Worlds of Mathematics*. International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 281–288). Bergen, Norway: Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Taylor, J., & Garnier, R. (2014). *Understanding mathematical proof*. Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group, LLC.
- TC Milli Eğitim Bakanlığı. (2007). *Çocuk gelişimi ve eğitimi: Üstün zekâ ve özel yetenekli çocuklar*. Ankara: TC Milli Eğitim Bakanlığı.
- TC Milli Eğitim Bakanlığı. (2011). *Ortaöğretim matematik (9, 10, 11 ve 12. sınıflar-haftalık 4 saat) dersi öğretim programı & ortaöğretim matematik (10, 11 ve 12. sınıflar-haftalık 2 saat) dersi öğretim programı*. Ankara: TC Milli Eğitim Bakanlığı.
- The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Tortop, H. S. (2016). Niçin düşünce deneyleri üstün yetenekli öğrencilerin yaratıcılık ve problem çözme becerilerini geliştirici eğitimsel bir araç olarak kullanılmalıdır? *Üstün Zekâlar Eğitimi ve Yaratıcılık Dergisi*, 3 (2), 35-48.
- Uğurel, I., Moralı, S., Koyunkaya, M. Y., & Karahan, Ö. (2016). Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Behaviors in the Proving Process. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12 (2), 203-231.
- Waisman, I., Leikin, M., Shaul, S., & Leikin, R. (2014). Brain activity associated with translation between graphical and symbolic representations of functions in generally gifted and excelling in mathematics adolescents. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12 (3), 669-696.