

## Genelleştirilmiş Fibonacci Çizgelerin Bazı Özellikleri

Handan AKYAR \*<sup>1</sup>, Emrah AKYAR <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 26470, Eskişehir

(Alınış / Received: 07.12.2016, Kabul / Accepted: 26.07.2017, Online Yayınlanma / Published Online: 14.09.2017)

**Anahtar Kelimeler**  
Çizge kuramı,  
Genelleştirilmiş fibonacci  
çizgeler,  
Bağlılık boyama

**Özet:** Bu çalışmada  $k$ . dereceden genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerin kenar sayısı, düzlemselliği, çapı, yarıçapı, merkezi, kalınlığı ve çevresi gibi çeşitli özellikleri incelenmiş ve genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerin kromatik polinomları yardımıyla kromatik sayıları ve kromatik indeksleri hesaplanmıştır. Ek olarak genelleştirilmiş  $k$ . dereceden Fibonacci çizgelerin bağlılık kromatik sayıları da elde edilmiştir.

## Certain Properties of Generalized Fibonacci Graphs

**Keywords**  
Graph theory,  
Generalized fibonacci graphs,  
Incidence coloring

**Abstract:** In this work, certain fundamental properties of generalized Fibonacci graphs of degree  $k$  such as number of edges, planarity, diameter, radius, center, girth, etc. are studied and by means of chromatic polynomials their chromatic numbers and chromatic indexes are obtained. Additionally, the incidence chromatic number of generalized Fibonacci graphs are also given.

### 1. Giriş

Bu çalışmada, ilk olarak Golumbic ve Perl tarafından tanımlanan ve genellikle ağlar (network) üzerinde hızlı ve verimli haberleşme amacıyla kullanılan genelleştirilmiş Fibonacci çizgeler ele alınmıştır ([1]). Golumbic ve Perl çalışmalarında verilen  $m$  ve  $n$  tamsayıları için  $m$  kenarlı,  $n$  köşe noktalı, döngü içermeyen yönlü bir çizgenin  $r$  ve  $s$  köşe noktaları için  $r$  ile  $s$  arasındaki farklı yolların sayısını maksimize etme problemini ele almışlardır. Bu problemin bir çözümü olarak da Fibonacci çizgeleri tanımlamışlardır. [2] ile verilen çalışmada yazarlar, mertebesi  $2n$  olan Knödel çizgeleri belirlemek için bir algoritma sunmuştur. Aynı çalışmada Fibonacci çizgeler de ele alınmış, Knödel ve Fibonacci çizgelerin ağlar üzerinde verimli haberleşme amacıyla kullanımı incelenmiştir. Daha kesin bir ifadeyle söylemek gerekirse, [2] çalışmasında  $n$  köşe noktalı bir ağ üzerinde birbirine komşu köşe noktaları arasındaki eş zamanlı haberleşme ele alınmıştır. Aynı anda yapılan tüm haberleşmelerin kümesi bir dilim olarak tanımlanmış ve dilimlerin sayısını minimum yapma problemi incelenmiştir. [3] ile verilen çalışmada da bu dilimlerin sayısı ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. [4] ile verilen çalışmada araştırmacılar stokastik ağlar üzerinde kaynaktan hedefe çalışır bir yol bulma olasılığını hesaplama problemi olarak bilinen  $st$ -bağlantılılık problemini Fibonacci çizgeler üzerinde ele alarak, çözüm için bir metod sunmuşlardır. [5] ile verilen çalışmada ise  $n$  köşe noktalı üçüncü meretebeden genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerin mincut kümelerinin yapısı araştırılmış ve bu kümenin eleman sayısı için bir formül verilmiştir. Genelleştirilmiş Fibonacci çizgeler her ne kadar ağlar üzerinde haberleşme amacıyla kullanılıyor

olsa da, kimya alanında da çeşitli uygulamaları mevcuttur (bkz. [6–8]).

Çalışmanın ilk bölümünde  $k$ . dereceden genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerin tanımı verilerek, bu çizgelerin kenar sayısı, düzlemselliği, çapı, yarıçapı, merkezi, kalınlığı (girth) ve çevresi gibi çeşitli özellikleri incelenmiştir. İkinci bölümde genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerin kromatik polinomu bulunarak bu polinom yardımıyla,  $k$ . dereceden genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerin kromatik sayısı ve kromatik indeksi hesaplanmıştır. Çalışmanın üçüncü bölümünde bağlılık çizgesi (incidence graph) tanımlanarak genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerin bağlılık kromatik sayıları (incidence chromatic number) hesaplanmıştır. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar sıralanmıştır.

$k$ . dereceden genelleştirilmiş Fibonacci çizge aşağıdaki şekilde tanımlanır.

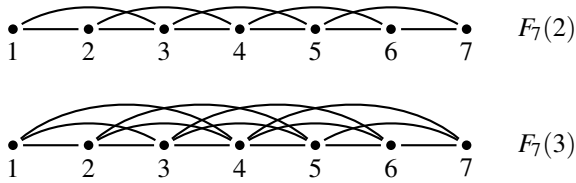
**Tanım 1.1** ([1]). Köşe noktalarının sayısı  $n$  olan,  $k$ . dereceden genelleştirilmiş Fibonacci çizge, köşe noktaları kümesi  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  olan ve kenarlar kümesi

$$E = \{\{u, v\} : u, v \in V \text{ ve } |u - v| \leq k\}$$

şeklinde tanımlanan bir çizgedir ve genellikle  $F_n(k)$  simgesiyle gösterilir (bkz. Şekil 1).

Eğer  $k = 2$  ise  $F_n(k)$  çizgesine özel olarak Fibonacci çizgesi denir.

Ağlar üzerinde haberleşme amacıyla kullanılan bir başka çizge de Fibonacci küp olarak bilinen çizgelerdir. Fibonacci küpler, hiperküp çizgelerin bir alt çizgeleridir ve köşe noktalarının kümesi ardışık 1 içermeyen  $n$ -bitlik binary string ifadeler, kenarlarının kümesi ise aralarındaki



Şekil 1.  $F_7(2)$  Fibonacci çizgesi ve 3. dereceden  $F_7(3)$  genelleştirilmiş Fibonacci çizgesi

Hamming uzaklık 1 olan köşe noktalar arasına çizilen kenarlarla tanımlanır. Fibonacci çizgeleri ile Fibonacci küpler arasında isim benzerliğinin dışında doğrudan bir bağlantı bulunmamaktadır. Fibonacci küpler ile ilgili kapsamlı bir inceleme [9] ile verilmiştir.

Genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerin ağlar üzerinde haberleşme amacıyla kullanılmasının başlıca nedeni, bu çizgelerin Hamiltonian olmalarıdır. Gerçekten de,  $k \geq 2$  olmak üzere  $k$ . dereceden genelleştirilmiş bir Fibonacci çizgesinde  $n$  tek ise

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow (n-1) \rightarrow n \rightarrow (n-2) \rightarrow \dots \rightarrow 3 \rightarrow 1,$$

$n$  çift ise

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow (n-1) \rightarrow (n-3) \rightarrow \dots \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

döngüleri bir Hamilton döngüsü oluşturur.

$P_n$  ve  $K_n$  sırasıyla  $n$  köşe noktalı yol ve tamçizgeyi göstermek üzere, yukarıdaki tanımdan  $F_n(1) \cong P_n$  ve  $k \geq n-1$  için  $F_n(k) \cong K_n$  olur.

Ayrıca,  $\Delta(G)$  bir  $G$  çizgesinin en büyük dereceli köşe noktasının derecesini,  $\delta(G)$  ise  $G$  çizgesinin en küçük dereceli köşe noktasının derecesini göstermek üzere

$$\Delta(F_n(k)) = \begin{cases} 2k & , k < n/2 \text{ ise} \\ n-1 & , k \geq n/2 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\delta(F_n(k)) = \begin{cases} k & , k < n \text{ ise} \\ n-1 & , k \geq n \text{ ise} \end{cases}$$

olacağı açıktır. Buradan [1] de verilen kenar sayısı formülü El Sıkışma Teoremi yardımıyla aşağıdaki gibi de elde edilebilir.

**Önerme 1.2.**  $k$ . dereceden  $F_n(k)$  genelleştirilmiş Fibonacci çizgesi için

$$|E| = \frac{(2n-k-1)k}{2}$$

olur. Burada  $|E|$  ile  $F_n(k)$  çizgesinin  $E$  kenarlar kümesinin eleman sayısı gösterilmektedir.

**Kanıt.**  $F_n(k)$  çizgesinin köşe noktalarının dereceleri incelendiğinde dereceleri  $k, k+1, k+2, \dots, 2k-1$  olan ikişer tane köşe noktası vardır. Geriye kalan  $(n-2k)$  tane köşe noktasının derecesi ise  $2k$  olur. O halde El Sıkışma Teoreminden (Handshaking Lemma, bkz. [10])

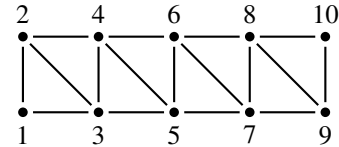
$$\begin{aligned} |E| &= \frac{2k + 2(k+1) + \dots + 2(2k-1) + (n-2k)2k}{2} \\ &= \frac{(3k^2 - k) + 2k(n-2k)}{2} \\ &= \frac{(2n-k-1)k}{2} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.  $\square$

**Sonuç 1.3.** Eğer  $n > 4$  ise  $k = 1, 2, 3$  için  $F_n(k)$  çizgesi düzlemsel,  $k \geq 4$  için ise  $F_n(k)$  çizgesi düzlemsel değildir. Eğer  $n \leq 4$  ise her  $k$  için  $F_n(k)$  çizgesinin düzlemsel olduğu açıktır.

**Kanıt.** Eğer  $n$  köşe noktalı,  $m$  kenarlı bir çizge düzlemsel ise  $m \leq 3n - 6$  eşitsizliği geçerlidir (bkz. [10]). Ancak Önerme 1.2 kullanılacak olursa,  $k \geq 4$  için bu eşitsizliğin sağlanmadığı görülür. O halde  $k \geq 4$  için  $F_n(k)$  çizgeleri düzlemsel olamaz.

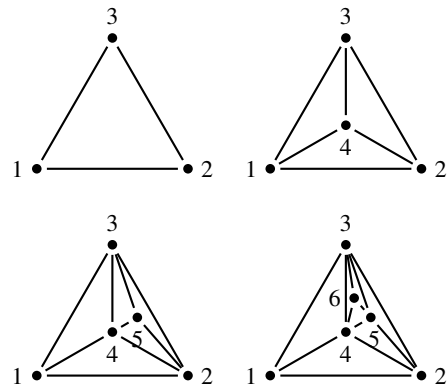
Diğer taraftan,  $k = 1$  için  $F_n(k) \cong P_n$  olduğundan ve  $k = 2$  için  $F_n(k)$  çizgesi Şekil 2 ile verildiği biçimde çizilebildiğinden  $F_n(1)$  ve  $F_n(2)$  çizgeleri düzlemseldir.



Şekil 2.  $F_{10}(2)$  çizgesinin düzlemde kenarları kesilmeyecek şekilde bir çizimi

Son olarak,  $k = 3$  ise  $F_n(k)$  çizgesi düzlemde kenarları kesilmeyecek şekilde aşağıdaki yöntem kullanılarak çizilebilir (bkz. Şekil 3):

Önce köşe noktaları 1, 2 ve 3 ile adlandırılan  $F_3(3)$  ( $K_3$  tamçizgesi) çizmesini çizelim. Daha sonra bu üçgenin içerisinde bir köşe noktası işaretleyelim ve onu 4 ile adlandıralım. 4 ile adlandırılan köşe noktasından 1, 2 ve 3 ile adlandırılan köşe noktalarına birer kenar çizelim. Böylece  $F_4(3)$  çizgesini ( $K_4$  tamçizgesi) elde ederiz. Daha sonra köşe noktaları 2, 3 ve 4 olarak adlandırılan üçgenin içinden bir köşe noktası seçip onu da 5 ile adlandırıp bu köşe noktasını 2, 3 ve 4 ile adlandırılan köşe noktaları ile birleştirir ve bu şekilde devam edersek  $F_n(3)$  çizgesi düzlemde kenarları kesilmeyecek şekilde çizilmiş olur.  $\square$



Şekil 3.  $F_n(3)$  çizgesinin düzlemde kenarları kesilmeyen çizilebilmesi için bir yöntem

$G$  tekparça (connected) bir çizge ve  $v$ ,  $G$  çizgesinin herhangi bir köşe noktası olsun.  $v$  köşe noktasının  $\varepsilon(v)$  dış merkezliği (eccentricity)  $G$  çizgesinin tüm köşe noktalarının  $v$  köşe noktasına uzaklıklarının maksimumu olarak tanımlanır. Bu tanım yardımıyla bir  $G$  çizgesinin  $D(G)$  çapı,  $G$  çizgesinin tüm  $v$  köşe noktaları üzerinden  $\varepsilon(v)$  değerlerinin maksimumu,  $R(G)$  yarıçapı ise  $\varepsilon(v)$  değerlerinin minimumu olarak tanımlanır.  $G$  çizgesinin  $\varepsilon(v) = R(G)$  koşulunu sağlayan köşe noktalarının kümesine  $G$

çizgesinin merkezi denir ve  $C(G)$  ile gösterilir. Bir  $G$  çizgesi içerisindeki en kısa döngünün uzunluğuna  $G$  çizgesinin kalınlığı (irth) denir ve  $g(G)$  ile gösterilir.  $G$  çizgesindeki en uzun döngünün uzunluğuna ise  $G$  çizgesinin çevre uzunluğu denir ve  $c(G)$  ile gösterilir. Eğer  $G$  çizgesi döngü içermiyorsa (acyclic),  $G$  çizgesinin kalınlığı ve çevre uzunluğu tanımlı değildir.

Bu tanımlar ışığında genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerin aşağıda verilen özellikleri sağladığı kanıtlanabilir.

**Önerme 1.4.**  $n \geq 3$  ve  $k \geq 2$  olmak üzere,  $k$ . dereceden  $F_n(k)$  genelleştirilmiş Fibonacci çizgesi için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$\begin{aligned} D(F_n(k)) &= \lceil n/k \rceil, \\ R(F_n(k)) &= \lceil n/2k \rceil, \\ C(F_n(k)) &= \begin{cases} \{n/2, (n/2) + 1\} & , n \text{ çift ise,} \\ \{(n+1)/2\} & , n \text{ tek ise,} \end{cases} \\ c(F_n(k)) &= n, \\ g(F_n(k)) &= 3. \end{aligned}$$

Burada  $\lceil x \rceil$  simgesi  $x$  sayısına eşit veya  $x$  sayısından büyük olan en küçük tamsayıyı göstermektedir.

*Kanıt.*  $k$ . dereceden  $F_n(k)$  genelleştirilmiş Fibonacci çizgeleri tanımı gereği tekparça çizgelerdir.  $F_n(k)$  genelleştirilmiş Fibonacci çizgesinde aralarındaki uzaklık en büyük olan köşe noktaları 1 ve  $n$  ile adlandırılan köşe noktalarıdır. Bu köşe noktalar arasındaki uzaklık ise

$$1 \rightarrow (1+k) \rightarrow (1+2k) \rightarrow (1+3k) \rightarrow \dots \rightarrow n$$

yolunun uzunluğuna eşittir. Bu yolun uzunluğu da  $\lceil n/k \rceil$  olduğundan  $D(F_n(k)) = \lceil n/k \rceil$  olur.

Benzer şekilde  $F_n(k)$  çizgesinin yarıçapı, 1 ve  $\lceil (n+1)/2 \rceil$  ile adlandırılan köşe noktaları (ya da  $\lceil n/2 \rceil$  ve  $n$  ile adlandırılan köşe noktaları) arasındaki uzaklığa eşit olur. Bu uzaklık da

$$1 \rightarrow (1+k) \rightarrow (1+2k) \rightarrow \dots \rightarrow \lceil (n+1)/2 \rceil$$

yolunun uzunluğuna eşit olduğundan ve bu yolun uzunluğu da  $\lceil n/2k \rceil$  olduğundan  $R(F_n(k)) = \lceil n/2k \rceil$  olur. Buradan

$$C(F_n(k)) = \begin{cases} \{n/2, (n/2) + 1\} & , n \text{ çift ise,} \\ \{(n+1)/2\} & , n \text{ tek ise,} \end{cases}$$

olduğu da elde edilmiş olur.

Yukarıda verilen Hamilton döngüsü  $F_n(k)$  çizgesi içerisindeki en uzun döngüdür. Bu döngünün uzunluğu da  $n$  olduğundan  $F_n(k)$  çizgesinin çevresinin uzunluğu  $n$  olur. Son olarak  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  döngüsü  $F_n(k)$  içindeki en kısa döngü olduğundan  $g(F_n(k)) = 3$  olur.  $\square$

## 2. Genelleştirilmiş Fibonacci Çizgelerin Kromatik Sayıları

Bu bölümde  $k$ . dereceden  $F_n(k)$  genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerinin  $P_{F_n(k)}(t)$  kromatik polinomları hesaplanarak bu polinomlar yardımıyla,  $F_n(k)$  çizgelerinin kromatik sayıları ve kromatik indeksleri elde edilmiştir.

**Önerme 2.1.**  $P_{F_n(k)}(t)$ ,  $F_n(k)$  genelleştirilmiş Fibonacci çizgesinin kromatik polinomunu göstermek üzere,

$$P_{F_n(k)}(t) = t(t-1)(t-2)(t-3)\dots(t-k)^{n-k}$$

olur.

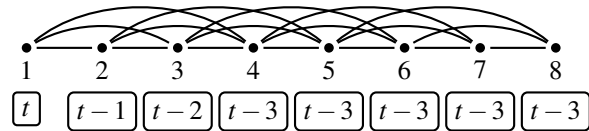
*Kanıt.*  $P_{F_n(k)}(t)$  polinomu  $k$ . dereceden  $F_n(k)$  genelleştirilmiş Fibonacci çizgesinin  $t$  renk ile komşu köşe noktalar farklı renklerde olacak şekilde kaç farklı biçimde boyanabileceğini gösterir.

$F_n(k)$ , çizgesinin  $t$  farklı renk ile kaç farklı şekilde boyanabileceğini hesaplamak için 1 ile adlandırılan köşe noktasından başlayarak köşe noktaları boyayalım.

1 ile adlandırılan köşe noktası  $t$  farklı renkten herhangi birisi ile boyanabilir (bkz. Şekil 4). Diğer taraftan 2, 3, ...,  $1+k$  ile adlandırılan köşe noktaları ise hem 1 köşe noktası ile hem de birbirleriyle komşu olacağından sırasıyla geriye kalan  $t-1, t-2, \dots, t-k$  farklı renk ile boyanabilir.

Geriye kalan köşe noktaları ise  $2+k$  köşe noktasından başlanarak boyanacak olursa,  $2+k$  köşe noktası daha önce boyanmış olan 1 köşe noktası ile komşu değil ancak diğer boyanmış  $k$  tane köşe noktasıyla komşudur. Buradan  $2+k$  ile adlandırılan köşe noktası 1 köşe noktasının boyandığı renkle de boyanabilir. Yani  $2+k$  ile adlandırılan köşe noktası için de  $t-k$  renk seçeneği söz konusudur.

Benzer şekilde  $3+k$  köşe noktası daha önce boyanmış 1 ve 2 ile adlandırılan köşe noktalarıyla komşu değil ancak diğer boyanmış  $k$  tane köşe noktasıyla komşudur. Dolayısıyla  $3+k$  ile adlandırılan köşe noktası için de  $t-k$  renk seçeneği söz konusu olur. Böyle devam edilecek olursa istenen sonuç elde edilir.  $\square$



**Şekil 4.**  $F_8(3)$  Genelleştirilmiş Fibonacci çizgesinin  $P_{F_8(3)}(t) = t(t-1)(t-2)(t-3)^5$  kromatik polinomunun hesaplanması

**Sonuç 2.2.** Bir  $G$  çizgesi düzlemsel ise  $P_G$ ,  $G$  nin kromatik polinomunu göstermek üzere  $P_G(4) > 0$  olur (bkz. [10]). Ancak Önerme 2.1 kullanılırsa,  $k \geq 4$  için  $P_{F_n(k)}(4) = 0$  olacağından  $k \geq 4$  iken  $F_n(k)$  Fibonacci çizgesinin düzlemsel olamayacağı Sonuç 1.3 den farklı olarak bir başka şekilde daha kanıtlanmış olur.

Bir  $G$  çizgesinin köşe noktaları komşu noktalar farklı renklerde olacak şekilde  $t$  farklı renk ile boyanabiliyorsa  $G$  çizgesine  $t$ -renk boyanabilir denir. Eğer  $G$  çizgesi  $t$ -renk boyanabilir ancak  $(t-1)$ -renk boyanabilir değilse,  $G$  çizgesinin kromatik sayısı  $t$  olur ve  $\chi(G) = t$  şeklinde gösterilir.

Benzer olarak, bir  $G$  çizgesinin kenarları birbirine komşu kenarlar aynı renkte olmayacak şekilde  $t$  farklı renkte boyanabiliyor ancak  $(t-1)$  renkle boyanamıyorsa,  $G$  çizgesinin kromatik indeksi  $t$ 'dir denir ve bu durum  $\chi'(G) = t$  şeklinde gösterilir.

Bu tanımlar ışığında aşağıdaki sonuçlar ifade edilebilir.

**Sonuç 2.3.** Eğer  $n \geq k$  ise  $\chi(F_n(k)) = k + 1$  olur.

*Kanıt.* Önerme 2.1 kullanılacak olursa,  $P_{F_n(k)}(k) = 0$  ve  $P_{F_n(k)}(k+1) = (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1 \neq 0$  olduğundan istenen sonuç elde edilir.  $\square$

Vizing Teorem yardımıyla genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerin kromatik indeksi için

$$\Delta(F_n(k)) \leq \chi'(F_n(k)) \leq \Delta(F_n(k)) + 1$$

eşitsizliği verilebilir (bkz. [10]). Buradan  $k < n/2$  ise

$$2k \leq \chi'(F_n(k)) \leq 2k + 1$$

eşitsizliği geçerli olur. Aşağıdaki önerme ise  $\chi'(F_n(k))$  kromatik indeksinin kesin değerini vermektedir.

**Önerme 2.4.** Eğer  $n \geq 3$  ve  $k < n/2$  ise

$$\chi'(F_n(k)) = 2k$$

olur.

*Kanıt.* Vizing Teoremden  $k$ . dereceden  $F_n(k)$  genelleştirilmiş Fibonacci çizgesinin tüm kenarlarını komşu kenarlar farklı renklerde olacak şekilde boyamak için en az  $2k$  renk gerekir. O halde  $2k$  renk kullanılarak çizgenin tüm kenarları için uygun bir boyama verilirse  $\chi'(F_n(k)) = 2k$  olur.

$F_n(k)$  genelleştirilmiş Fibonacci çizgesinin tüm kenarları  $2k$  renk ile komşu kenarlar farklı renklerde olacak şekilde aşağıdaki yöntem kullanılarak boyanabilir (bkz. Şekil 5):

**1. Adım**  $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}$  biçimindeki kenarlar sırasıyla alterne olarak 1. ve 2. renk ile boyansın. Bu durumda hiç bir komşu kenar aynı renk ile boyanmamış olur.

**2. Adım**  $\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \dots, \{n-2, n\}$  biçimindeki kenarlar ise artık 1. ve 2. renk ile boyanamaz. Bu kenarlar ikişer ikişer komşu olmadığından sırasıyla 3. ve 4. renk ikişer kez kullanılarak boyansın. Yani,  $\{1, 3\}, \{2, 4\}$  kenarları 3. renkle,  $\{3, 5\}, \{4, 6\}$  kenarları ise 4. renkle boyansın ve bu şekilde 3. ve 4. renkler her iki kenarda bir değiştirilerek kullanılsın.

**3. Adım** Yukarıdakine benzer olarak,  $\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \dots, \{n-3, n\}$  kenarları ise artık 1., 2., 3. ve 4. renk ile boyanamaz. Bu kenarlar da üçer üçer birbirleriyle komşu olmadığından sırasıyla her üç kenar, üç kenarda bir 5. ve 6. renk ile boyansın.

**4. Adım** Böyle devam edilecek olursa  $\{1, 1+k\}, \{2, 2+k\}, \{3, 3+k\}, \dots, \{n-k, n\}$  biçimindeki kenarlar da artık 1., 2., ...,  $2k-2$ . renk ile boyanamaz. Bu kenarlar da yukarıdakine benzer olarak her  $k$  kenarda bir sırasıyla  $(2k-1)$ . ve  $(2k)$ . renk ile boyansın.

Böylece,  $F_n(k)$  çizgesinin tüm kenarları komşu kenarlar farklı renklerde olacak şekilde  $2k$  renk ile boyanmış olur.  $\square$

### 3. Genelleştirilmiş Fibonacci Çizgelerin Bağlılık Kromatik Sayıları

Bu bölümde  $k$ . dereceden genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerin bağlılık kromatik sayıları incelenmiştir. Bir çizgenin bağlılık boyaması (incidence coloring) ilk olarak Brualdi ve Massey tarafından çalışılmıştır (bkz. [11]). Bir  $G = (V, E)$  çizgesinin bağlılık elemanları  $(v, e)$  şeklinde sıralı ikililerdir. Burada  $v \in V$  ve  $e \in E$  olmak üzere  $v$  köşe noktası  $e$  kenarının bir uç noktasıdır.  $G$  çizgesinin tüm bağlılık elemanlarının kümesi genellikle  $I(G)$  simgesiyle gösterilir.

Eğer aşağıdakilerden biri sağlanıyorsa  $(v, e) \in I(G)$  ve  $(w, f) \in I(G)$  bağlılık elemanları komşudur:

- i.  $v = w$ ,
- ii.  $e = f$ ,
- iii.  $\{v, w\}$  kenarı  $e$  ya da  $f$  kenarıyla aynıdır.

Bir  $G$  çizgesinin  $k$ -bağlılık boyaması diye,  $X$  kümesi  $k$  farklı renkten oluşan bir küme olmak üzere, komşu bağlılık elemanların farklı renklerle eşlendiği  $I(G)$  kümesinden  $X$  kümesine tanımlı bir  $\sigma$  fonksiyonuna denir.  $G$  çizgesinin bağlılık kromatik sayısı ise  $G$  çizgesinin  $k$ -bağlılık boyanabildiği en küçük  $k$  sayısıdır ve  $\chi_i(G)$  ile gösterilir.

Verilen keyfi bir çizgenin bağlılık kromatik sayısını bulmak için kolay bir yöntem bulunmamaktadır. Ancak başta Brualdi ve Massey olmak üzere çeşitli araştırmacılar tarafından bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir (bkz. [11]). Brualdi ve Massey verilen herhangi bir  $G$  çizgesi için aşağıdaki sonuçların geçerli olduğunu göstermiştir:

$$\chi_i(G) \geq \Delta(G) + 1, \quad (1)$$

$$\chi_i(G) \leq 2\Delta(G), \quad (2)$$

$$\chi_i(K_n) = n, \quad (n \geq 2) \quad (3)$$

$$\chi_i(K_{m,n}) = m + 2, \quad (m \geq n \geq 2) \quad (4)$$

$$\chi_i(T) = \Delta(T) + 1 \quad (5)$$

( $T$ ,  $n \geq 2$  köşe noktalı bir ağaç).

Brualdi ve Massey ayrıca  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$  eşitsizliğinin geçerli olduğu varsayımında da bulunmuşlardır. Ancak Guiduli  $\chi_i(G) \geq \Delta(G) + \Omega(\log \Delta(G))$  olduğunu göstererek bu iddianın doğru olmadığını kanıtlamıştır (bkz. [12]). Çeşitli çizgelerin bağlılık kromatik sayılarını hesaplamak üzere çok sayıda çalışma yapılsa da, bağlılık boyama, çizge kuramında halen yoğun olarak çalışılan konulardan biridir (bkz. [11–17] ve referansları).

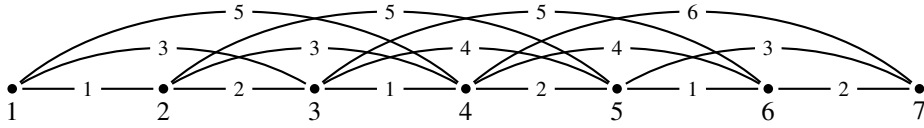
Yukarıdaki tanımlar yardımıyla  $k$ . dereceden  $F_n(k)$  Fibonacci çizgeleri için  $\chi_i(F_n(k))$  sayılarının değerleri aşağıda hesaplanmaktadır.

Eğer  $k = 1$  ise  $F_n(1) \cong P_n$  olduğundan

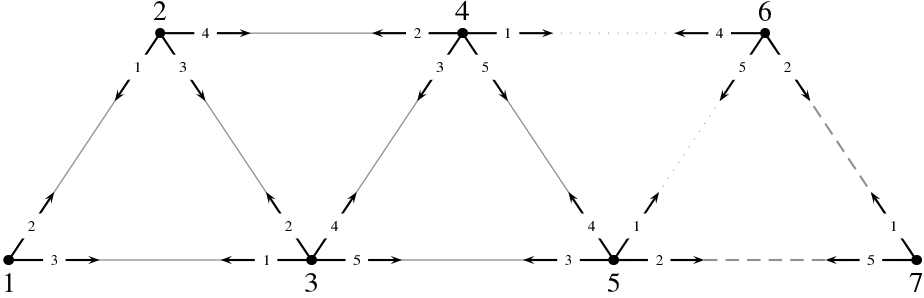
$$\chi_i(F_n(k)) = \begin{cases} 2 & , \quad n = 2 \text{ ise} \\ 3 & , \quad n > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca,  $k \geq n-1$  için  $F_n(k) \cong K_n$  olduğundan (3) eşitliğinden  $\chi_i(F_n(k)) = n$  olur.

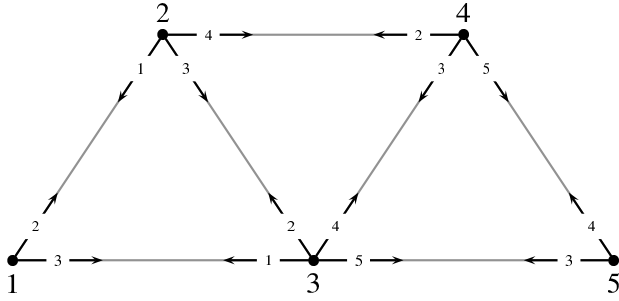
**Teorem 3.1.**  $k < n/2$  için  $\chi_i(F_n(k)) = 2k + 1$  olur.



Şekil 5.  $F_7(3)$  Genelleştirilmiş Fibonacci çizgesinin 6-renk kullanılarak elde edilen bir kenar boyaması



Şekil 7.  $I(F_5(2))$  çizgesinin Şekil 6 ile verilen boyaması kullanılarak  $I(F_6(2))$  ve  $I(F_7(2))$  çizgelerinin 5 renkle uygun boyamalarının elde edilmiş hali



Şekil 6.  $I(F_5(2))$  için bir uygun boyama örneği

*Kanıt.* Kanıtın kolay anlaşılması için önce  $k = 2$  için bağıllık çizgelerin nasıl boyanacağı gösterilip, daha sonra genel durum için kanıt verilecektir. Eğer  $k = 2$  ise  $n > 4$  olmalıdır. O zaman önce  $n = 5$  için eşitliğin doğru olduğunu yani,  $\chi_i(F_5(2)) = 5$  olduğunu gösterelim.

$\Delta(F_5(2)) = 4$  olduğundan ve (1) eşitsizliğinden  $\chi_i(F_5(2)) \geq 5$  olmalıdır. Ancak Şekil 6 ile  $I(F_5(2))$  bağıllık çizgesinin 5 renk kullanılarak bir boyaması verildiğinden  $\chi_i(F_5(2)) = 5$  elde edilir. Şekil 6 içerisinde kullanılan  $u \xrightarrow{1} v$  gösterimi  $(u, \{u, v\})$  bağıllık elemanın 1. renk ile boyandığını göstermektedir.

Şimdi  $n > 5$  için de eşitliğin geçerli olduğunu gösterelim.  $F_5(2)$  çizgesine 6 ile adlandırılan yeni bir köşe noktası eklenip, bu köşe noktasıyla 4 ve 5 ile adlandırılan köşe noktaları arasında birer kenar çizilirse,  $F_6(2)$  çizgesi elde edilir. Her  $n > 5$  için  $F_n(2)$  çizgesi bu şekilde elde edilebilir.

O halde  $I(F_6(2))$  çizgesini boyamak için Şekil 6 ile verilen boyamaya ek olarak  $(5, \{5, 6\})$ ,  $(6, \{5, 6\})$ ,  $(4, \{4, 6\})$  ve  $(6, \{4, 6\})$  bağıllık elemanlarının boyanması yeterlidir. Bu bağıllık elemanlarından  $(4, \{4, 6\})$  ögesinin boyanabileceği tek renk vardır (1. renk).  $(4, \{4, 6\})$  ögesi bu renk ile boyandıktan sonra  $(6, \{4, 6\})$  ögesinin de boyanabileceği geriye tek renk kalır (4. renk). Geriye kalan  $(5, \{5, 6\})$  ve  $(6, \{5, 6\})$  bağıllık elemanları sırasıyla  $(4, \{4, 6\})$  ve  $(4, \{4, 5\})$  ögeleri ile aynı renkte boyanacak olursa  $I(F_6(2))$  için uygun bir boyama elde edilmiş olur. Bu şekilde devam edilecek olursa her  $n > 5$  için  $I(F_n(2))$

bağıllık çizgesinin 5 renk ile uygun bir boyaması elde edilmiş olur (bkz. Şekil 7).

$k = 2$  için anlatılan bu yöntem keyfi  $k < n/2$  için de benzer şekilde genelleştirilebilir. Önce,  $I(F_{2k+1}(k))$  bağıllık çizgesi için uygun bir boyama verilip, daha sonra her seferinde yukarıda uygulandığı gibi  $F_{2k+1}(k)$  çizgesine yeni köşe noktaları eklenerek elde edilen çizgelerin bağıllık elemanları anlatılan yöntemle boyanarak  $I(F_n(k))$  çizgesi için de bir uygun boyama elde edilmiş olur.

$I(F_{2k+1}(k))$  çizgesi için  $2k + 1$  renkle uygun bir boyama ise şu şekilde elde edilebilir:  $u \in V = \{1, 2, \dots, 2k + 1\}$  ve  $v \in V = \{1, 2, \dots, 2k + 1\}$  köşe noktaları için  $(u, \{u, v\}) \in I(F_{2k+1}(k))$  bağıllık elemanları  $u$ . renk ile boyanırsa, tüm komşu bağıllık elemanları farklı renkte boyanmış olur. Örneğin, Şekil 6 ile verilen  $I(F_5(2))$  çizgesinde  $(3, \{1, 3\})$ ,  $(3, \{2, 3\})$ ,  $(3, \{3, 4\})$  ve  $(3, \{3, 5\})$  elemanları 3. renk ile boyanmıştır.

Böylece  $k < n/2$  için  $I(F_n(k))$  bağıllık çizgesi  $2k + 1$  renkle boyanabildiğinden  $\chi_i(F_n(k)) = 2k + 1$  olur.  $\square$

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada önce  $k$ . dereceden  $F_n(k)$  genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerin El Sıkışma Teoremi yardımıyla kenar sayısı hesaplanmıştır. Hem kenar sayısı, hem de elde edilen kromatik polinom yardımıyla bu çizgelerin hangi  $k$  sayıları için düzlemsel olduğu belirlenmiştir. Yine kromatik polinomlar kullanılarak bu çizgelerin kromatik sayıları bulunmuş, kromatik indeksleri de ayrıca hesaplanmıştır. Bağıllık kromatik sayısının kesin değeri  $k < n/2$  için verilmekle birlikte, kanıtta sunulan yöntem sayesinde bağıllık çizgenin bağıllık elemanlarının ne şekilde boyanması gerektiğine dair bir yöntem de sunulmuştur. Bunlara ek olarak  $k$ . dereceden genelleştirilmiş Fibonacci çizgelerin çap, yarıçap, merkez, kalınlık, vb. temel özellikleri de araştırılmıştır.

#### Teşekkür

Bu çalışma Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonunca kabul edilen 1502F064 nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

**Kaynakça**

- [1] Golombic, M. C., Perl, Y. 1979. Generalized Fibonacci maximum path graphs. *Discrete Mathematics*, 28, 237–245.
- [2] Cohen, J, Fraigniaud, P., Gavoille, C. 2002. Recognizing Knödel graphs. *Discrete Mathematics*, 250(1-3), 41–62.
- [3] Even, S., Monien, B. 1989. On the number of rounds necessary to disseminate information. *Proceeding SPAA'89 Proceedings of the first annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures*, 318–327.
- [4] Korenblit, M., Levit V. E. 2002. The st-connectedness problem for a Fibonacci graph. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 1(2), 89–93.
- [5] Korenblit, M., Levit, V. E. 2011. Mincuts in generalized Fibonacci graphs of degree 3. *Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering*, 11(5,6), 271–280.
- [6] Gutman, I., El-Basil, S. 1986. Fibonacci graphs. *Match*, 20, 81–94.
- [7] El-Basil, S. 1987. On color polynomials of Fibonacci graphs. *Journal of Computational Chemistry*, 8(7), 956–959.
- [8] El-Basil, S. 1988. Theory and computational applications of Fibonacci graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*, 2(1), 1–29.
- [9] Klavžar, S. 2013. Structure of Fibonacci cubes: a survey. *J. Comb. Optim.*, 25(4), 505–522.
- [10] Wilson, R.J. 2012. *Introduction to graph theory*. 5th Edition. Pearson, England, 184s.
- [11] Brualdi, R.A., Quinn Massey, J.J. 1993. Incidence and strong edge colorings of graphs. *Discrete Math.*, 122(1-3), 51–58.
- [12] Guiduli, B. 1997. On incidence coloring and star arboricity of graphs. *Discrete Math.*, 163(1-3), 275–278.
- [13] Chen, D.-L., Liu, X.-K., Wang, S.-D. 1998. The incidence coloring number of graph and the incidence coloring conjecture. *Math. Econom. (People's Republic of China)*, 15, 47–51.
- [14] Maydanskiy, M. 2005. The incidence coloring conjecture for graphs of maximum degree 3. *Discrete Math.*, 292, 131–141.
- [15] Pai, K.-J., Chang, J.-M., Yang, J.-S., Wu, R.-Y. 2014. Incidence coloring on hypercubes. *Theoret. Comput. Sci.*, 557, 59–65.
- [16] Shiu, W. C., Sun, P. K. 2008. Invalid proofs on incidence coloring. *Discrete Math.*, 308(24), 6575–6580.
- [17] Sopena, E., Wu, J. 2013. The incidence chromatic number of toroidal grids. *Discuss. Math. Graph Theory*, 33, 315–327.