

Türkiye Nüfus Büyümesi ve Tahminleri: Matematiksel Büyüme Modelleri ve İstatistiksel Analiz İle Kuramsal ve Uygulamalı Bir Yaklaşım

Cemil İskender¹

Öz

Bu çalışmanın amacı, Verhulst ve Gompertz tarafından ilk tanımlamaları yapılan ve nüfus analizlerinde geniş uygulama imkânları bulan matematiksel büyüme fonksiyonlarıyla, 1925-2015 dönemi için yeterli veri arz eden Türkiye nüfusunun büyüme eğilimini ve özelliklerini analiz gelecekte ulaşacağı maksimum seviyeyi tespit etmektir. İlaveten bu dönem zarfında sağlanan mutlak ve nispi büyüme oranlarını yine bu eğriler üzerinden hesaplamaktır. Geliştirdiğimiz matematiksel analiz ve istatistiksel uygulamayla Türkiye nüfus verilerinin soyut düzeyde temsiliyeti hedeflenmiş, yapılan ileri istatistiksel çalışmayla keyfiyet test edilmiştir. Daha sonra söz konusu fonksiyonlarla geleceğe dönük tahmin çalışmaları yapılmıştır. Bu şekilde Türkiye nüfusu hakkında matematiksel büyüme modelleri, istatistiksel analiz ve geleceğe dönük tahminler ile kuramsal bir çerçeve tanımlanmıştır. Türkiye'nin 1925-2015 dönemi toplam nüfus sayımı istatistikleri çalışmamızda kullanılmıştır. Lojistik fonksiyon ve Gompertz fonksiyonunda alt ve üst asimptot arasında nüfusun gelişimi önce süratle artan sonra azalarak artan bir seyir halinde olacağı varsayımı ile hareket edilir. Nüfusun gelişimi üst sınır olan taşıma kapasitesi ile sınırlıdır. Büyüme fonksiyonlarında nüfus bağımsız değişkene göre sonsuz büyüzem. Fonksiyonlarının birinci türevleri yıllık mutlak büyüme rakamlarının hesabında ve ortalama yıllık büyümenin hesaplanmasında, ikinci türevler ise değişimlerdeki değişimin ve fonksiyon dönüm noktalarının hesabında kullanılmıştır. Çalışmamızda SAS bilgisayar yazılımı kullanılmıştır. Gompertz fonksiyonu üzerinden yapılan ilave çalışmalara ve Amerikalı bilim adamlarının nüfus çalışmasına da ayrıntılı olarak değinilmiştir

Anahtar Kelimeler

Türkiye Nüfusu • Matematiksel Büyüme Fonksiyonları • Lojistik Fonksiyon • Gompertz Fonksiyonu • Nüfus tahminleri

Turkish Population Growth and Estimates

Abstract

This study aims to analyze the population growth trend and properties of Turkey between 1925 and 2015 and estimate the maximum level to be reached in the future by using mathematical growth functions of Verhulst and Gompertz. The study used SAS software. Additionally, the study calculates and charts absolute and relative growth rates of population through the curves. The representation of Turkish population data at an abstract level was targeted with mathematical analysis and statistical application. After the successful results were taken from the mathematical representation and statistical proof stages, predictions for the future were made. Thus, a theoretical framework with mathematical growth models, statistical analyses, and predictions related to the future of Turkish population is defined. The necessity of using logistic and Gompertz growth functions for population analysis is explained in detail. These functions analyze growth with the assumption that population rapidly increases first, then the rate of increase slows down, reaching a maximum level at upper asymptote (carrying capacity). There is a limit to growth in these functions based on the geography and resources of the country. The first derivatives of the growth functions are used for calculating annual absolute growth and average annual growth rates of population. The second derivatives have been used for calculating change amount of absolute growth figures and reflection points of functions. Additionally, some thoughts on Gompertz function and American experience on population are explained in detail.

Keywords

Turkish Population • Logistic Growth Function • Mathematical Growth Functions • Gompertz Growth Function • Population Estimates

¹ Sorumlu Yazar: Cemil İskender, Ekonomist, Tuzla 34959 İstanbul, Türkiye. Eposta: iskenderc@ttmail.com

Atf: İskender, C. (2018). Türkiye nüfus büyümesi ve tahminleri: Matematiksel büyüme modelleri ve istatistiksel analiz ile kuramsal ve uygulamalı bir yaklaşım. *Ekonometri ve İstatistik e-Dergisi*, 14(28), 75–141. <https://dx.doi.org/10.26650/ekoist.2018.14.28.0004>

Extended Summary

This study aims to analyze the population growth trend and properties of Turkey for the period 1925–2015 and estimate the maximum level to be reached in the future by using commonly accepted mathematical growth functions of which the first definitions were developed by Verhulst (Belgium) and Gompertz (England) in the nineteenth century. Additionally, the study calculates and charts the absolute and relative growth rates of population studied during this period through the curves. Turkish population statistics of Turkish Statistical Institute were analyzed by using logistic growth functions, two-stage logistic growth function and Gompertz growth functions, and on the basis of this purpose, non-linear function solutions were used in statistical applications. Representation of the Turkish population data at an abstract level was targeted with mathematical analysis and statistical application, and all population data were processed with advanced statistical tests. After the successful results were taken from the mathematical representation and statistical proof stages, predictions were made with the aforementioned functions and the results obtained are discussed. Thus, a theoretical framework is defined with mathematical growth models, statistical analyses, and predictions related to the future of Turkish population with data of the 1925–2015 period.

Pierre François Verhulst (1804–1849, Belgium) anticipated that population cannot continue to grow all the time according to the exponential function of the Malthusian model; on the contrary, after a rapid increase in speed, growth will decrease to nearly zero, which adds a restrictive variable to the function. This variable is carrying capacity—the limiting factor of growth.

In 1825, the mathematician and actuarial and insurance specialist Benjamin Gompertz (1779–1865) wrote his famous article about human mortality tables, putting forward a non-linear growth function for this purpose. Although Gompertz developed this function for calculating human mortality tables, today’s intended framework has already been surpassed and the relevant function has been used in many areas of sciences as a growth function. The concept of “carrying capacity” is already included in Gompertz function, as in the logistic function, as a limiting variable.

We can calculate growth by simply dividing figures with each other in discrete units of time (by years) or by means of continuity of a mathematical function. Simple and compound growth formulas are used for short periods of time. For studying long-term data, functional analysis with growth functions is required. According to our knowledge about the data at hand, we can choose what best suits them. This also applies to the human population statistics. It is preferable to apply statistical methods to the data at hand by adopting growth functions and calculating absolute and relative growth rates of population for the long term.

An increase in the number of available mass of population is based on the existence of resources at hand, which is a restrictive variable. In this case, it is useful to apply logistic growth function to data over a long period of time with the assumption that nothing will permanently increase or decrease and there will be increasing, slowing, and decreasing period of time for the variable at hand. When applied with non-linear statistical techniques, growth functions and curves with the flexibility to provide predictions of multiple parameters on the same function at a time draw a close model to actual data. Initially, there is exponential growth in the logistic function. Following the exponential growth period, an inflection point is reached. This is the beginning of second phase growth, which slows down and reaches an upper limit. Logistic models have upper and lower asymptotes. The turning point is right in the center of the curve, which is symmetric here. Symmetry is an element restricting the structure of the curve. But the growth curve developed by Gompertz overcomes the symmetry restriction and provides us with a better functional analysis. In the analysis with the logistic function, the independent variable is time and the dependent variable is population. It is useful to work with this function when the variable starts from a point close to the horizontal axis with a slow acceleration, reaches the inflection point rapidly, and then slows down toward the upper asymptote. This is the restrictive point where carrying capacity—the region where the population reaches the limits in place—comes in. Moving the carrying capacity to an upper level is only possible with the introduction of new resources and geography. Because human population is closely related to the economy, it will be more meaningful to add the national income to carrying capacity. Apart from geography, natural resources, energy, etc., national income is also an effective variable for carrying capacity; this is the point where economics comes in to the function.

There are more than one unknown parameters in the logistic function to be estimated, and ordinary least squares methods of estimation are not sufficient for statistical tests. There is one equation but more than one parameter to be estimated. Specially developed least squares methods based on minimization of the error sum of squares are required for solving and determining parameters of non-linear functions. Fortunately, techniques developed by theoretical statisticians in the last fifty years have made the job easier in terms of solving non-linear functions. All these methods are used in our statistical analysis.

The Turkish census statistics from 1927 to 2015 were used in our study. Preliminary statistical studies have been made to prepare a series for 5-year periods and to provide estimated data for missing years. In these studies, estimations have been made for 1925, 1930, and 1995, which have no census results, with the help of simple curve fitting and regression analysis. Together with census statistics of Turkish Statistical Institute and estimations for missing years, 19 observations have been obtained

for basic statistical analysis and non-linear curve fitting. Additionally, qualitative analysis has been done over this period, and this analysis has been included in the quantitative analyses as a variable. The development of the Turkish population over the aforementioned period has been divided into three sub-phases: stagnation period (1925–1950), development and growth period (1950–1985), and growth and maturity period (1990–2015). The qualitative aspects of these periods are given in detail in the main article. These three phases were indexed as 1, 2, and 3 and used in two-phase logistic function (James H. Ricketts/Geoffrey A. Head function) and Gompertz function as dummy variables. Thus, it includes a qualitative variable in addition to the time variable. More successful results can be obtained with this approach.

Two groups of functions used in the statistical analysis are logistic function and Gompertz function.

In addition to basic logistic function, two-phase logistic function—successfully developed by authors James H. Ricketts and Geoffrey A. Head—has been extensively used in our study. Furthermore, adding inverse hyperbolic sine variable to this function gave more fruitful results. The two-phase logistic function has given far better results than the original logistic function. We added the allometric variable (v) of Richards’ logistic function to obtain accurate, meaningful statistical tests. The first and second derivatives of the logistic function have been used for calculations of annual absolute growth figures, average annual growth rates, and changing amount of the first derivative in absolute growth figures. Inflection points were calculated from second-degree derivatives. Re-parametrization of variables to be determined is calculated for curves in order to find more linear equations. Otherwise, meaningless statistical results were obtained from calculations of the curves.

Gompertz functions, which give more flexible results than the logistic functions used in the study, have confirmed same upper asymptote levels (115 million people) for the Turkish population, along with the two-phase logistic function. Hyperbolic variable is also included in the Gompertz function for better results.

Logistic and Gompertz growth functions do not have a linear structure. A non-linear function has a non-linear relation between parameters. Therefore, least squares estimation methods used in the estimation of parameters of ordinary linear equations cannot be used here. Non-linear least squares methods developed for non-linear functions are used for the estimation of parameters of the non-linear functions. We have also followed this method in our work. On the contrary, it is impossible to make these calculations manually or with entry-level computer software. In this case, Microsoft Excel can be used only to prepare the data. There are no standard non-linear regression models in Excel; therefore, we used Excel as a data-preparation tool. The software “SAS University Edition NLIN Procedure” was used in this study

for statistical analysis of non-linear functions. In this software, convergence criteria/iterative phase, minimization of error sum of squares, compliance diagnosis charts, F-tests, standard errors, 95% confidence limits and bootstrap confidence limits, Box bias criteria and Hougaard skewness criteria, global non-linearity measures, etc. were used for statistical tests of the functions. In order to find the required linearity of tested growth functions, parametrization and calibration of the parameters of functions to be estimated have been necessary in many functions, and this has been done in the SAS software. Detailed explanations are given in the main article for the aforementioned criteria followed and applied in the SAS NLIN procedure.

Logistic functions have passed all the advanced statistical tests in the SAS NLIN procedure. The lower asymptote and upper asymptote (carrying capacity) figures of logistic function have been found as 9.5 and 94 million people, respectively. Turkey has a long way to go if we consider that Turkey's population as of 2015 is 78.1 million people. The intrinsic growth rate of the logistic function has been found to be 4.93%. This is not an annual average growth rate of population that we analyze. Intrinsic growth rate is a general growth rate for the function, and it is valid throughout the period under study. A higher intrinsic growth rate means a sharper increase of the curve during the reach to the upper asymptote. We mentioned that the logistic function is symmetric around the reflection point. In order for the curve to follow this symmetry, carrying capacity is lower than expected, as will be confirmed by Gompertz functions having asymmetrical structures. The carrying capacity is 115 million people in Gompertz functions, which is more realistic than the logistic function's 94 million people.

The error sum of squares as a percentage of the total sum of squares of logistic function is 0.0121%, which is negligible. Data representation of the function is high and acceptable. But the Ricketts/Head logistic function has produced far better results than a simple logistic function from an error sum of squares point of view. The reflection point of the curve is 51.7 million people at the year 1986.38. Top level in relative growth was in 1965, with 2.55% growth rate. This figure has reached below 1% circa 2015.

A two-phase asymmetric logistic function developed by James H. Ricketts and the Geoffrey A. Head for medical purposes, was used in our population analysis with some modifications. The Richards parameter was added to the function and, with the other arrangements made, contributed to the success of the function in representing the Turkish population. Intrinsic growth rate of the function is 12.82%; the lower asymptote and upper asymptotes are 7 and 115 million people, respectively. This is a sharper curve upwards than that of the logistic function. Hundred and fifteen million people is a more realistic figure and can also be confirmed by Gompertz function. The error sum of squares has been found as 0.006318% of the total sum of squares.

We have achieved successful statistical results with the Gompertz functions as well. The intrinsic rate of growth is 2.71% and the upper asymptote is 113.8 million people for the first Gompertz function. The inflection point was the highest in 1984, with a population of 50.4 million people. The highest relative rate of growth was calculated as 2.7% in 1960.

We have dealt with two properties of the functions. The first is the ability to represent the data to which they apply. The second is whether they are powerful enough for predictions. The method that we used to prove the ability of functions at representing the Turkish population was to get the test results of non-linear equations—part of an advanced stage of statistics—with the relevant computer software. I believe that we have achieved this goal in the study. Verhulst’s logistics function, a two-stage Ricketts/Head function that is a continuation of logistic function and Gompertz function and their mathematical properties, was successful and gave the expected results for our Turkish population analysis. Nineteen observations over 90 years between 1925 and 2015 comprise enough data for our population analysis. After the mathematical representation and statistical proof, successful results were obtained for the future population discussed. It is expected that Turkey’s population will level off at 115–120 million people.

Additionally, some thoughts on Gompertz function and interesting experiences by American scientists on population are detailed in our study. Detailed statistical outputs of the growth functions can be found in the appendices.

Türkiye Nüfus Büyümesi ve Tahminleri: Matematiksel Büyüme Modelleri ve İstatistiksel Analiz İle Kuramsal ve Uygulamalı Bir Yaklaşım

Bu çalışmanın amacı, on dokuzuncu yüzyılda Verhulst ve Gompertz tarafından ilk tanımlamaları yapılan ve daha sonra nüfus analizlerinde geniş uygulama imkânları bulan ve birçok yönden geliştirilerek bugüne kadar kullanılan genel kabul görmüş matematiksel büyüme fonksiyonlarıyla, 1925-2015 dönemi için yeterli veri arz eden Türkiye nüfusunun büyüme eğilimini ve özelliklerini analiz edip bugün hangi noktada olduğunu ve gelecekte ulaşacağı maksimum seviyeyi tespit etmektir. İlâveten bu dönem zarfında sağlanan mutlak ve nispi büyüme oranlarını yine bu eğriler üzerinden hesaplayıp grafiklemektir. Söz konusu fonksiyonlar, hesaplama teknolojilerinin ve istatistiksel yöntemlerin bugün ulaştığı seviyede ciddi imkânlar sağlamaktadır. Doğrusal olmayan bir nitelik arz eden bu fonksiyonların elle istatistiklere uygulanması hemen hemen imkânsızdır. Yirminci yüzyılda matematik ve istatistik yazarlarının, hem fonksiyonları hem istatistik uygulamadaki sorunların çözümlerini geliştirmeleri sonucu iktisat, biyometri, çevrebilim, ormancılık, zooloji, nüfus vs. gibi çeşitli bilim dallarında bu fonksiyonlarla başarılı uygulama çalışmaları yapılmıştır.

Pierre François Verhulst (1804-1849, Belçika) Malthus'un² öngördüğü gibi nüfusun üstel fonksiyona göre $Y(t) = Y_0 e^{rt}$ sürekli büyümeye devam edemeyeceğini, hızlı artışıtan sonra hızının yavaşlayacağını ve giderek büyüme hızının sifıra yaklaşacağını düşünerek üstel büyüme fonksiyonuna kısıtlayıcı bir değişken ilave etmiştir. Bu değişken taşıma kapasitesi olarak tanımlanmıştır. Taşıma kapasitesi büyümeyi sınırlayan faktördür. Fonksiyon, Tsoularis ve Wallace'nin (2002) tanımıyla $Y(t) = KY_0(Y_0 + (K - Y_0)e^{-rt})^{-1}$ şeklindedir³. Bu şekilde nüfus fonksiyonunda başlangıç nüfus miktarı (Y_0), içsel büyüme oranı (r) ve üst asimptot (taşıma kapasitesi K) bir arada yer alarak insan nüfusu için nüfus büyümesiyle kaynaklar, yaşam coğrafyası (büyüklüğü ve yaşama elverişliliği), iklim koşulları, sahip olunan arazi ve tarımsal güç, sahip olunan enerji ve su kaynakları ve ulusal üretim gücü ve milli gelir arasındaki ilişkilerin tespiti modellenmiştir. Bu saydığımız değişkenlerin tamamı Verhulst tarafından amaçlanmamış olmakla birlikte bugün yaşamı ve nüfus artışını mümkün kılan öğelerin bunlar olduğunu bilmekteyiz. Verhulst bu çalışmayı logistic⁴ olarak tanımlayarak bugüne kadar gelen bir modellemeyi başlatmıştır. Hesaplanması zordur ve ancak ileri bilgisayar yazılımlarıyla mümkün olmaktadır. Hesaplanan fonksiyon, sigmoidal (s-biçimli) ve doğrusal olmayan bir yapıya sahiptir. Doğrusal olmayan fonksiyon, türevi alındığı zaman türev denklemindeki parametreler ile ana fonksiyon arasında ilişki taşıyan matematiksel modeldir. Bu durum hesaplamalarda özel yöntemlerin uygulanmasını zorunlu kılar. R-Project, SAS, SPSS ve MAXIMA gibi ileri istatistik yazılımları bugün bize bu imkânları sağlamaktadır.

2 Ünlü İngiliz iktisatçı Thomas Malthus (1766-1834). İlk nüfus teorisini yazan bilim adamıdır. Nüfusun üstel fonksiyona göre gıda üretiminin aritmetik olarak artacağını ileri sürerek çelişkiye dikkat çekmiştir.

3 Y : nüfus, K : taşıma kapasitesi, Y_0 başlangıç nüfusu, t : zaman, r : içsel büyüme oranı.

4 Logistic kelimesinin bir izahı: kıt kaynaklarla ilgili anlamında olarak Fransızca logis (yaşam alanı) kelimesinden alındığı şeklindedir (<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Verhulst.html>).

Keza İngiltere’de ünlü matematikçi, aktüer ve sigorta uzmanı Benjamin Gompertz (1779-1865) doğrusal olmayan bir fonksiyonu 1825 yılında yazdığı ünlü makalesinde⁵ ortaya koyarak sigortacılık ve aktüerya hesaplarının (human mortality) yapılmasında kullanmıştır. Fonksiyon Fekeduleng ve arkadaşlarında (1999) tanımlanan büyüme uygulamasıyla, $Y_{(t)} = Ke^{-Qe^{-rt}}$ şeklindedir⁶. Diğer bir deyimle e üstü $-e$ ’dir. Benjamin Gompertz bu formülü sigorta ve hayat istatistiklerinde, aktüerya tablolarında kullanmak üzere geliştirmişken bugün amaçladığı çerçeve çoktan aşılıp, geliştirdiği fonksiyon sigorta ve hayat istatistikleri dışında da birçok sahada uygulama imkânı bulmuştur. Aşağıda kullandığımız fonksiyonların tanımları hakkında bilgi vermekteyiz. Bu nedenle tarihi bilgilere daha fazla girmenin bu yazının amacı dışında kaldığını belirtmeliyim⁷. İlgilenenler ekte verilen kaynaklara -özellikle şu kaynağa bakabilirler⁸.

Ülkemizde beş yılda bir yapılan nüfus sayım sonuçlarını kullanarak nüfusun büyüme hızı hakkında hesaplamalar yapılmakta, bu hesaplamalar ile yorumlar oluşturulmaktadır. Yıllık rakamları birbirine oranlayarak artış/azalış hızları hesaplanmakta ve elde edilen sonuçlar çeşitli amaçlar için kullanılmaktadır. Oysa nüfusun matematiksel trend yapısı büyüme fonksiyonlarıyla tespit edildiği zaman ara yıllar dahil tüm keyfiyeti bütünsel bir perspektiften izleyerek mevcut ve gelecekte ulaşılabilecek seviyeler hakkında bilgi sahibi olmak mümkün olacaktır. İnsan topluluklarının belirli siyasi ve ekonomik coğrafyalarda yaşayıp gelişmek zorunda oldukları, sahip oldukları doğal ve ekonomik kaynakların sınırlı olduğu ve bu kaynakların artışları için de bir zaman gereksinimi olduğu dikkate alınırsa bu çerçeveye göre gelişecek olan insan nüfusunun büyüme trendini tespit etmek en azından bir iktisatçı için önemlidir. Çalışmamın amacı budur.

Büyümeyi; ayrık (discrete) zaman birimlerini (çoğu zaman yıllara ait verileri) birbirine oranlayarak veya bir fonksiyon yapısı içinde süreklilik arz eden bir şekilde hesaplayabiliriz. Yıllara ait verilerden büyümeyi hesaplarken ilk ve son yılı orandıktan sonra yıl sayısına bölerek yıllık ortalama sonuç elde edilir. Veya yıllara ait değerlerden büyüme hesaplandıktan sonra bunların ortalaması alınır. Biraz daha ileri giderek ilk ve son yıl değerleri oranlanıp logaritmaları alındıktan sonra yıllık büyüme oranı bulunur (birleşik büyüme oranı). Her hesaplamada birbirine yakın ama farklı sonuçlar elde edilir. Elimizdeki veri hakkındaki bilgilerimize göre bunlardan uygun olanı seçebiliriz. Bu anlatılanlar nüfus istatistikleri için de geçerlidir.

Daha kapsamlı ve anlamlı sonuçlar elde etmek için istatistiksel yöntemlerle elimizdeki veriye büyüme fonksiyonlarının uyarlanması ile elde edilecek değerler üzerinden

5 Gompertz, B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 115, 513–583.

6 Y: nüfus, K: taşıma kapasitesi, t: zaman ve Q sabit parametre r: içsel büyüme oranı ve $e = 2.71$ ’dir.

7 Söz konusu fonksiyonlar insan nüfusu dışındaki canlı nüfusları, bitkiler, çeşitli hastalıklar vs. için de biyometristler tarafından yoğun olarak uygulanmaktadır.

8 Kirkwood, T. B. L. (2015). Deciphering death: a commentary on Gompertz. *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci*. 19, 370. <https://dx.doi.org/10.1098/rstb.2014.0379>

giderek mutlak ve nispi büyüme hesaplayıp yorumlamak biyolojik hareket nitelikleri göz önüne alındığında insan nüfus hareketleri için daha anlamlı olur. İnsan nüfusu ve bu nüfusa ait özellikler diğer kategorilerdeki büyüme modellerinden daha yavaş (uzun ömürlü) olduğu için uygulanacak istatistik daha çok başarı şansı elde eder. İnsan nüfusu ile çalışmanın dezavantajı ise, yeterli ve sıhhatli veriyi elde etmek için çok uzun süre beklemek ve veri elde etmenin maliyetidir. İnsan nüfusuna göre diğer canlılara ait nüfus hareketleri veya çeşitli mallara ait piyasa hareketleri çok fazla değişim gösterebilir ve daha kısa sürelerde gözlemlenebilir. Bu da istatistiksel yaklaşımlarda ortaya çıkacak çok sayıda sorunun çözümünü gerektirir. İnsan nüfusu ile yapılan ilk çalışmalardan birisi Pearl ve Reed'in (1920) ABD nüfusuyla ilgili olarak yaptığı lojistik eğrisine dayanan mükemmel analizdir. Ayrıntılarını aşağıda Amerika bahsinde ele alacağız.

Ülkemizde Cumhuriyetin kuruluşuyla başlayan ve bugüne kadar devam eden nüfus sayımlarıyla elde edilen verilerin büyüme analizi için ziyadesiyle yeterli olduğunu düşünerek bu çalışmamızda matematiksel büyüme modellerine göre yapacağımız istatistiksel çalışmanın daha anlamlı olduğunu düşündük. Bu çerçevede nüfusun alt asimptot ve üst asimptot değerleri tespit edilerek ilerde varacağı maksimum seviyeler hakkında bilgi sahibi olacağız. Yıllara göre mutlak ve nispi büyüme, içsel büyüme oranını bu çerçevede elde edeceğiz.

Bu amaçla öncelikle büyüme konusu ve uygulayacağımız matematiksel büyüme fonksiyonları daha sonra nüfus sayım verileri, istatistik uygulama sonuçları sırasıyla ele alınacak ve varılan sonuçlar değerlendirilecektir. Sonuçta uygulanan büyüme fonksiyonlarının Türkiye nüfusunu temsil ve özelliklerini yansıtmaya kabiliyeti, bu temsiliyetin istatistiksel olarak test edilip ispat edilmesi ve devamında geleceğe dönük tahminlerin yapılabilmesi ayrıntılı olarak araştırılmış olacaktır.

Büyüme

İktisat, demografi ve diğer birçok disiplinde belirli bir konu incelenirken konuya bakış araçlarından biri de büyümenin hesaplanmasıdır. Nüfus, milli gelir, istihdam, fiyatlar, dış ticaret, sanayi üretimi, tarımsal üretim vs. analizinde konu öncelikle büyüme açısından ele alınır. Bu nedenle büyümenin teknik tanımı ve nüfustaki kullanımını ile ilgili olarak bu bahsi zorunlu gördük.

En basit tanımıyla büyüme ele alınan değişkenin dönemler itibarıyla artışını mutlak ve nispi olarak belirlemektir. Bu tanımlama zaman boyutunu da içerir. Mutlak ve nispi büyüme: tanımlanan ayrık dönemler (discrete time), dönemsel birleşik (compounding each period) olarak ve, sürekli dönemler (continuous time), sürekli birleşik (compounding continuously) olarak iki ayrı başlık altında incelenir.

Ayrık Dönemlere (Yıl) Göre Büyüme, Dönemsel Birleşik Büyüme, (Discrete Periods, Compounding Each Period)

Mutlak büyüme.

Y_t , ilk dönem nüfusu Y_{t+1} sonraki dönem nüfusu olmak üzere mutlak büyüme $\Delta Y = Y_{t+1} - Y_t$ olarak tanımlanır. t döneminde 100 kişi olan nüfus $t+1$ döneminde 120 kişi olmuşsa artış 20 kişidir. İki rakam arasında beş dönem ($t+5$) varsa ortalama yıllık nüfus 4 kişi artmıştır. Nüfus artış miktarını dönem sayısına bölerek ortalama mutlak büyümeye ulaşırız.

Nispi büyüme (büyüme oranı).

Ayrık dönemlerde büyüme oranı $g = (Y_{t+1} - Y_t) / Y_t$ olarak tanımlanır. Dönem sayısı birden fazlaysa bulunan rakam dönem sayısına bölünür. Örnek tablo 1’de 5 dönemde büyüme oranı %20’dir. Beşe bölersek dönemsel büyüme oranı %4’tür denir. Bu yöntem büyümeyi fazla gösterir. Örneğe uyguladığımızda beşinci yıl sonundaki rakamı 120 değil 121.67⁹ olarak gösterir (tabloda 3. kolon).

Dönemsel nispi büyümeyi, ayrık dönemler için birleşik büyüme formülüne göre $Y_t = Y_0(1 + r)^t$ olarak hesaplamak daha gerçekçi bir yaklaşım olur. Hesaplama, logaritmik dönüşümden sonra ortalama nispi büyüme formülü $r = \text{EXP}(\text{LN}(Y_t/Y_0)/t) - 1$ ile yapılır. Genelde en çok kullanılıp uygulanan formül budur. Ara dönem değerlerini dikkate almayan bir hesaplama tarzıdır. Örneğe göre bu formülle büyüme beş yıllık dönemde yıllık %3.7137’dir (tabloda 4. kolon).

Beş yıllık dönemde ara yıl değerlerinin de tablo 1 kolon 1’deki gibi olduğunu varsayalım. Bu durumda izleyen yıl değerlerini birbirine bölüp büyümeyi hesaplayabiliriz (kolon 2). Yıllık hesaplanan bu büyüme oranlarının aritmetik ortalamasını hesapladığımızda dönem büyümesi bulunur (%3.724).

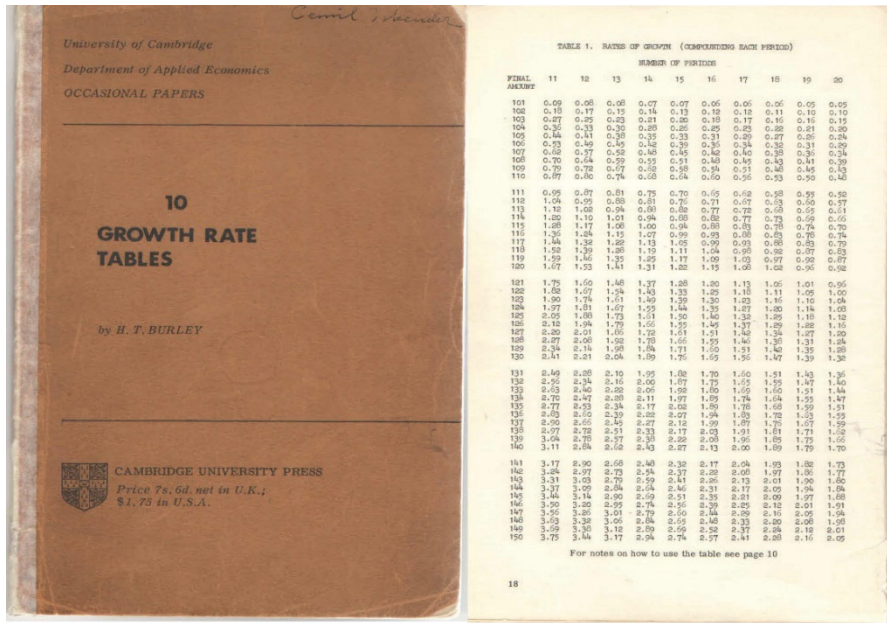
Dikkat edilirse yöntemlere göre hesaplanan büyüme rakamları, sırasıyla %3.724, %4, %3.7137, %3.646, birbirinden tamamen farklıdır. Analizini yaptığımız olayın mahiyetine göre bunlardan uygun olan birini kısa dönem nispi analizi için seçip uygulamak durumundayız.

⁹ Kullandığımız istatistik yazılımını (SAS University Edition) izleyerek bu çalışmamızda rakamların hanelerini virgülle, ondalık kesirleri noktayla ayırdık.

Tablo 1

Büyüme Hesapları

	1	2	3	4	5
Dönem	Hipotetik	Hipotetik (% büyüme)	Ortalama yıla bölme (% 4)	Dönemsel birleşik (r) (discrete) (0.037137)	Sürekli birleşik (g) (continuous) (0.03646)
0	100	0.0000	100.00	100.00	100
1	106	6.0000	104.00	103.71	103.71
2	110	3.7736	108.16	107.57	107.57
3	112	1.8182	112.49	111.56	111.56
4	117	4.4643	116.99	115.70	115.70
5	120	2.5641	121.67	120.00	120
Ortalama		3.7240			



Resim 1. Büyümenin el kitabı.

Not: Türkiye İsmail Kalkınma Bankasında (İstanbul) iktisatçı olarak çalıştığım yıllarda (1977-2002) iktisatçılara proje hesapları için Banka tarafından verilmiş olan “Büyüme Oranı Tabloları” kitabı. Kişisel bilgisayarların olmadığı 60 ve 70’li yıllarda bir büyüme oranı hesaplamak için ilk ve son yıl değeri hesap makinesinde orandıktan sonra dönem sayısına göre büyüme rakamı kitaptaki tabloların bakılarak tespit edilirdi. Kitabın birinci bölümü ayrı dönemlere göre büyüme tablolarını ikinci bölümü ise sürekli dönemlere göre büyüme tablolarını içerirdi (Basım yılı 1966, Cambridge University Press).

Sürekli Dönemlere Göre Büyüme, Sürekli Birleşik Büyüme, (Continuous Periods, Compounding Continuously)

Mutlak büyüme.

Ayrık dönemlerden sürekli dönemlere geçtiğimizde keyfiyetin daha ileri fonksiyonlarla ifadesi edilmesi gerekir. Zira büyüme burada zamanın sonsuz olması halinde bağımlı değişkenin aldığı değerdir. Hem mutlak hem nispi büyüme için süreklilik arz eden fonksiyon üzerinden hesaplamalar yapılır. Fonksiyonun tespiti ise en küçük kareler yöntemine göre yapılır. Yöntemin uygulanması için en az 12-15 döneme ait verilerin bulunması gerekir. Bu şekilde en kısa zaman birimi için fonksiyonun değişimi (türev) hesaplanır ve ilgili dönemin değerinin fonksiyonda yerine konmasıyla mutlak büyüme tespit edilir.

İki dönemli veri için en basit büyümeyi doğrusal denklemden elde ederiz. $Y = at + b$ fonksiyonunda mutlak büyüme sayısı a 'dır. İki noktası belli olan veriye ilgili cebir kuralları uygulanarak denklemin katsayılarına ulaşılabilir. Örneğe uygularsak denklem $Y = 4t + 100$ şeklindedir ve mutlak büyüme denklemin türevi ($Y' = \frac{dY}{dt}$) olan 4 kişidir. Her tip fonksiyon için mutlak büyüme, fonksiyonun türevinin alınmasıyla zamanın aldığı değere karşılık gelen bağımlı değişken değeri olarak hesaplanır. Ve bu değer her dönem için aynı olmayabilir. Bu yazımızda kullanılan doğrusal olmayan değişkenlerin mutlak büyümesi de türev hesaplanarak grafiğe dönüştürülecektir.

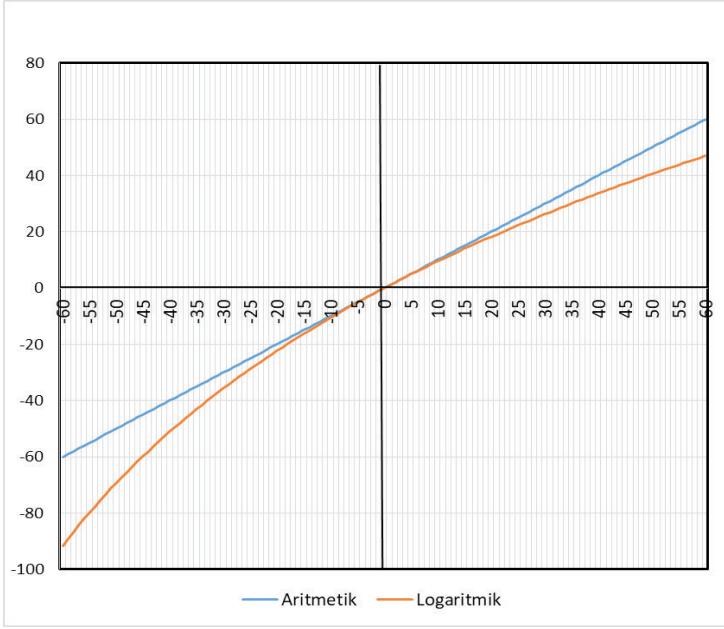
Nispi büyüme (büyüme oranı).

Nüfus analizlerinde iki dönem arasında sürekli büyüme $Y_t = Y_0 e^{gt}$ formülünden g 'nin değeri olan nispi büyüme $g = \ln\left(\frac{Y_t}{Y_0}\right) / t$ olarak hesaplanır. Tabloda bu oran %3.6464'tür. Bu logaritmik büyümedir. Dikkat edilirse logaritmik büyüme daha önce aynı veri için hesaplanan ayrık dönem büyümesinden (%3.7137) daha küçüktür. Sıfır noktasından yükseldikçe iki büyüme oranı arasındaki fark açılır. %10-15 büyümeye kadar ayrık dönem formülü kullanılabilir. Ancak sürekli fonksiyon daha gerçekçidir.

r (aritmetik) ile g (logaritmik) büyüme oranları arasında geçişler aşağıdaki formüllere göre sağlanır.

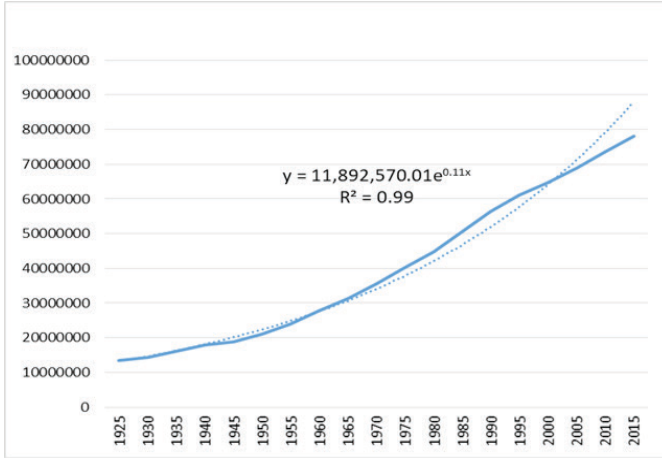
r 'den g 'ye geçiş $g = \ln(r + 1)$. $g = \ln(1+0.037137)=0.03646$, sonuç ondalık kesirdir.

g 'den r 'ye geçiş $r = \exp(g) - 1$. $r = \exp(0.03646)-1=0.037137$, sonuç ondalık kesirdir.



Grafik 1. Mukayeseli aritmetik ve logaritmik büyüme oranları.

Fonksiyonel büyüme.



Grafik 2. Türkiye nüfusu için basit üstel fonksiyon uygulaması.

Yukarıda büyüme ile ilgili olarak anlattıklarımız kısa vadeli verilerin analizinde faydalı olacağından 1925-2015 gibi oldukça uzun bir döneme ait nüfus verilerinin analizinde kullanılmayacaktır. E tabanlı üstel fonksiyonun da nüfus analizi için uygun olmadığını belirtelim. Grafik 2’de Türkiye nüfusuna uygulanmış basit bir üstel fonksiyon verisi yer almaktadır. Buna göre nüfusun istikameti gerçekte ne olursa olsun projeksiyon üstel sayı oranında artmaya devam edecektir. Tabii ki gerçek böy-

le değildir. Esas amacımız kaynak, çevre kısıtı parametresini (K) içeren yukarıda bahsettiğimiz Verhulst ve Gompertz tarafından geliştirilen fonksiyonları kullanarak Türkiye nüfusuna ait alt asimptot, üst asimptot (taşıma kapasitesi), içsel büyüme oranı, mutlak ve nispi büyüme miktarlarını hesaplamaktır. Yoksa beş yıllık verilerden hareketle basit büyüme hesapları yapıp yorumlarda bulunmak amacında değiliz. Bu nedenle giriş mahiyetindeki yukarıdaki izahatı takiben üstel fonksiyondan lojistik fonksiyona geçiş için her iki yapının özelliklerini kısaca görmekte fayda vardır.

Tablo 2
Büyüme Fonksiyonlarının Karşılaştırması ve Özellikleri

	Üstel fonksiyon	Verhulst üç değişkenli lojistik fonksiyonu
Çözüm fonksiyonu	$Y_t = Y_0 e^{rt}$	$Y_t = \frac{KY_0}{Y_0 + (K - Y_0)e^{-rt}}$
Diferansiyel fonksiyon modeli	$\frac{dY}{dt} = rY$	$\frac{dY}{dt} = rY(1 - \frac{Y}{K})$
Mutlak büyüme miktarı (türev)	$\frac{dY}{dt} = rY_0 e^{rt}$	$\frac{dY}{dt} = \frac{rKY_0 e^{-rt}(K - Y_0)}{(Y_0 + (K - Y_0)e^{-rt})^2}$
Nispi büyüme, kişi başına büyüme, türevin nüfusa oranı, gerçekleşen büyüme oranı. (r_g)	$r = r_g = r_i = \frac{\frac{dY}{dt}}{Y}$ Y ile değişmez	$r_g = r_i(1 - \frac{Y}{K})$ $r_g = \frac{(K - Y)r e^{-rt}}{Y_0 + (K - Y_0)e^{-rt}}$ Y ile değişir, $r_g < r_i$ dir.
	$r_i = b - d$	$r_i = b - d$
İçsel büyüme oranı (r_i)	Doğum oranı eksi ölüm oranıdır, sabit ve maksimumdur.	Doğum oranı eksi ölüm oranıdır, sabit ve maksimumdur.
İzahat 1	İçsel büyüme oranı nispi büyüme oranına eşittir. Malthus parametresi, nüfus artış haddi, kişi başına büyüme olarak da adlandırılır.	İçsel büyüme oranı nispi büyüme oranından büyüktür, nispi büyüme oranı içsel büyüme oranının $(1 - \frac{Y}{K})$ ile çarpımından elde edilir, teorik bir rakamdır, fonksiyondan hesaplanır, büyümenin maksimum seviyesini gösterir.
İzahat 2	İçsel büyüme oranı, fonksiyonun tamamında geçerli sabit bir rakamdır. Zaman boyutu yoktur. Kişi başına büyümeyi incelenen dönemlerin tamamı için temsil eder, bu nedenle de dönemlere göre değişim gösteren nispi büyüme oranından farklıdır.	

Burada üzerinde durulması gereken bir nokta yukarıda anlattığımız dönemsel nispi büyüme oranıyla K parametrelili fonksiyonlardan hesaplanan içsel büyüme oranı arasındaki ilişkidir. İkisi aynı değildir. İçsel büyüme oranı lojistik büyüme eğrisinin hesaplamaları sırasında bulunan ve hesaplandığı dönemin tamamı için geçerli olan sabit bir rakamdır. Buna karşılık nispi büyüme oranı verinin uygulandığı fonksiyondan hesaplanan ve yıllara göre değişen büyüme oranıdır. Fonksiyonlara göre izahat aşağıdaki tablodadır.

Üstel fonksiyon tamamen matematik esaslı bir yapıya sahiptir. Büyümede sınır yoktur. Lojistik fonksiyonla birlikte matematik+iktisat esaslı bir yapıya geçmiş oluruz. Sınırlı kaynakları temsil eden kapasiteyi (K) ve kendi kurallarına göre büyüyen

nüfusu, fonksiyona dâhil edip analiz etmek yeni bir planlamanın ilk adımı olarak karşımıza çıkmaktadır.

Matematiksel Büyüme Fonksiyonları

İstatistikte sıklıkla kullandığımız üstel, doğrusal, logaritmik, polinomsal ve güç fonksiyonları vs. nüfus artışının izlenmesinde de kullanılabilir. Çoğu zaman istatistiksel testlere uyum da sağlanabilir. Daha çok kısa süreli hesaplamalarda bu araçlar işimize yarar. Nitekim bu çalışmamızda da Türkiye nüfusuna ait elimizde veri olmayan bazı ara yıllar miktarlarını tahmin için biz de az önce saydığım bu yöntemlerden faydalandık. Örneğin elimizde sayım verileri olmayan 1925, 1935 ve 1995 yıllarına ait tahminler için bu yola gittik. Ancak Türkiye coğrafyasına ait ve Türkiye Cumhuriyeti'nin kuruluşundan beri derlenen nüfus istatistiklerin değerlendirilmesinde yukarıda bahsedilen matematiksel fonksiyonların hiçbirini esas alıp uzun vadeli bir izahat için kullanamayız. Bahsi geçen fonksiyonların istatistiksel testlerin tamamını geçtikten sonra orta ve uzun vadelere uygulanma imkânları olsa bile ülkelerin nüfus gelişmeleri, dünya kömür üretimi, dünya ham petrol üretimi, Türkiye buzdolabı tüketimi ve hanelere penetrasyonu vs. gibi serilerin 20 yılı aşan uzun vadeli incelenmesinde Verhulst ve Gompertz'den beri geniş bir uygulama alanı bulan büyüme fonksiyonlarının¹⁰ kullanılması, keyfiyetin kuramsal bir çerçeveye oturtulması gerektiğinde daha isabetli olacaktır. Yukarıda sayılan eğriler ucu açık eğrilerdir. Bunlarla nüfus gibi ağır hareket eden bir değişkeni açıklamak isabetli olmayabilir. Daha kuramsal bir çerçeve sağladıklarından büyüme fonksiyonlarının nüfus analizinde sağlayacağı faydaları aşağıda örnekleriyle göreceğiz.

Bir nüfus kitlesinin sayısındaki artış mevcut nüfusa ve eldeki kaynakların varlığına dayanır. Hiçbir şeyin sürekli artmayacağı, sürekli düşmeyeceği, artan, yavaşlayan ve düşen dönemlerinin olacağı dikkate alındığında lojistik büyüme eğrisini kullanmanın önemli faydaları görülür. Büyüme eğrisi, birden çok parametresinin tahminlerde sağladığı esneklikle gerçek verilere yakın bir model çizer. Başlangıçta üstel bir büyüme söz konusudur. Üstel büyümeyi takiben ulaşılan dönüm noktasında (inflection point) eğrinin büyüme hızı düşerken ikinci safhaya geçilmiş olur. Lojistik modelde bir alt asimptot ve bir üst asimptot vardır. Dönüm noktası eğrinin tam ortasında yer alır. Eğri burada simetriktir. Simetriklik eğrinin yapısını kısıtlayan bir unsurdur. Ancak Gompertz tarafından geliştirilen eğri asimmetrik bir yapıya sahiptir ve bu kısıtlamayı aşar. Daha sonra geliştirilen fonksiyonlarda da yeni parametrelerin eklenmesiyle teknik sorunların daha da aşıldığı görülmektedir. Grafik 3'teki eğri bu keyfiyeti izah eden klasik bir büyüme eğrisidir. Değişkenin yatay eksene (zaman) yakın bir yerden yavaşça hızlanan, giderek hızını arttırdıktan sonra artış hızında yavaşlama ve doyuma

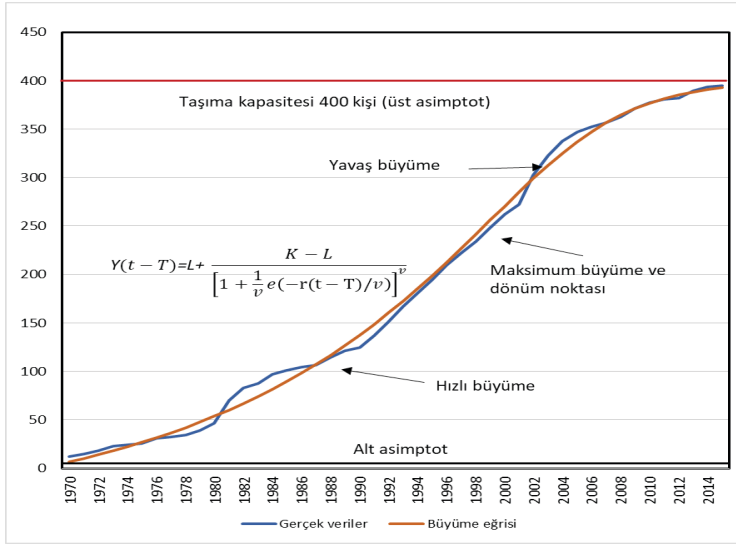
10 Lojistik eğri yaklaşımını kullanarak Dünyadaki nüfus artışının enerji kaynaklarıyla çok güzel ve etkileyici bir açıklaması için Graham Zabel'in (London School of Economics) linkteki "Peak People: The Interrelationship between Population Growth and Energy Resources" başlıklı ve 2009 tarihli yazısına bakılabilir. http://www.resilience.org/stories/2009-04-20/peak-people-interrelationship-between-population-growth-and-energy-resources#_ftn4

ulaşma gösterdiği hallerde bu eğri ile analiz faydalı olur. Eğrinin yatay asimptotik hal aldığı üst çizgiye *taşıma kapasitesi* denir. Taşıma kapasitesi olarak tanımlanan yerde nüfusun bulunduğu coğrafyada sınırlara ulaşılmış demektir, taşıma kapasitesinin yukarıya çekilmesi ve daha fazla nüfus beslenmesi ancak yeni kaynakların ve coğrafyanın devreye girmesiyle mümkündür. İnsan nüfusu ekonomiyle ilgili olduğuna göre taşıma kapasitesine ulusal geliri de katmak anlamlı olacaktır. Coğrafya, tabii kaynaklar, enerji vs. yanında gelişmişliğe bağlı olarak ulusal gelirin de taşıma kapasitesinde etkin rolü vardır. Ulusal gelire bağlı olarak artan beslenme, tıbbi imkânlar, aynı coğrafyada yeni yaşam imkânlarının açılmasını bu meyanda sayabiliriz.

Grafik 3'te, özel bir emeklilik vakfının kurulduğundan beri yıllara göre emekli üye sayısındaki artış ve bu verilere dayanarak hesaplanmış büyüme eğri örneği verilmiştir. Çalışma süresi, emekliliğe geçiş ve emekliliği bir yaşam süreci olarak düşünürsek, emeklilerin sayısındaki gelişmeyi büyüme fonksiyonuyla açıklamak doğru ve isabetli olmuştur. Esasen grafiğin kendisi büyüme fonksiyonuna uyumu açıkça göstermektedir. Bizim yapmamız gereken bunun istatistiksel çalışmasıdır. Emekliler artış eğrisinin verilerine dayalı lojistik büyüme fonksiyonu belirlenirken, tüm istatistiksel testler (SAS NLIN yöntemi, bk. aşağıda bölüm 6) geçilmiştir. Bu örnekte lojistik eğrinin tüm safhaları kırk beş yılda yaşanmış ve tamamlanmıştır.

Bir büyüme eğrisinde yer alması gereken tüm safhalar 1970-2015 dönemindeki verilerden görülebilir. Eğri s-biçimli klasik büyüme eğrisidir. 1970 yılında 12 olan emekli sayısı 2015'te 395'e ulaşarak 400 olan kapasite sınırında karar kılmıştır. Mutlak ve nispi büyüme grafiklerinden de görüleceği gibi başlangıçta alt asimptot seviyesinden kalkışa geçen emekliler sayısı 1999¹¹ yılında maksimuma ulaşmış buradan itibaren artış yavaşlayarak 2015 yılında sıfıra çok yaklaşmış, $Y(t) = K - 5$ durağan durumuna ulaşılmıştır. Burada kapasite sınırı vakfin ve vakfin bağlı bulunduğu kuruluşun mali imkânları olarak karşımıza çıkmaktadır. Emekliler sayısının bu noktadan sonra artışı beklenmemektedir. Hatta bağlı olduğu kuruluşun istihdamı son on beş yılda gerilediğinden buna bağlı olarak emekliler sayısının da 395 rakamında kalma ve/veya gerilemeler göstermesi beklenmektedir.

11 Grafikte görülen fonksiyonun ikinci türevini sıfıra eşitleyip çözdüğümüz zaman t 'nin değerinin T 'ye eşit ve 1999 olduğunu görürüz.



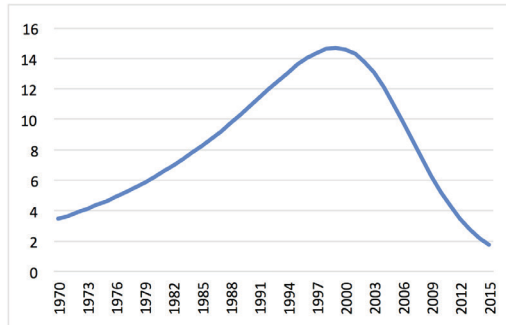
Grafik 3. Emekliler büyüme eğrisi (1970-2015).

Not: Büyüme eğrisi tablosundaki veriler gerçek hayattan alınmıştır. Türkiye'deki özel bir emeklilik vakfının 1970-2015 yılları emekli sayılarını göstermektedir. Burada taşıma kapasitesi vakfın mali olanakları ve bağlı olduğu kuruluşun istihdam politikası ve mali imkânlarıdır. Fonksiyona göre hesaplanan vakıf emeklileri sayısı içsel büyüme oranı %5,87 olarak bulunmuştur.

İstatistik çalışmada emeklilere ait büyüme fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunmuştur. Ayrıntısına girmeden tüm istatistiksel testlerin geçildiğini belirtelim.

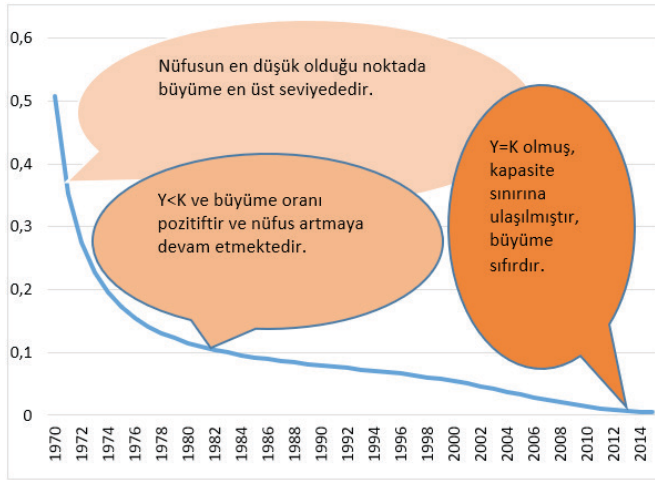
$$Y(t - 1999) = -52 + \frac{400 - (-52)}{\left[1 + \frac{1}{0.2286} e^{(-0.0587(t-1999)/0.2286)}\right]^{0.2286}}$$

Yukarıdaki emekliler eğrisine ait örnek mutlak ve nispi büyüme rakamları da aşağıdaki grafiklerde yer almaktadır.



Grafik 4. Emekliler mutlak büyüme eğrisi (dY/dt).

Aşağıdaki grafikten de görüleceği gibi, yıllık nispi büyüme oranı nüfus artışıyla birlikte düşmektedir. Emekliler örneğinde büyüme 2015 yılında %0 olmuştur, diğer bir deyimle $N = K$ 'dir. Keza mutlak büyüme de sifra ulaşmıştır.



Grafik 5. Emekliler nispi büyüme eğrisi $(dY/dt)/Y(t)$.

Yukarıda emeklilere ait verilerden hareketle emekliler sayısının lojistik gelişimini, mutlak büyüme ve nispi büyüme gelişimlerini grafiklerle gösterdik, rakamları sadelik adına buraya ayrıntılı olarak taşımadık. Bu bir örnek sunum olmaktadır. 1927 yılından beri elimizde beşer yıllık sayım verileri olan Türkiye nüfusunun analizinde matematiksel büyüme fonksiyonlarını istatistiksel olarak test ettikten sonra yıllara göre mutlak ve nispi büyüme oranlarının ve ulaşılabilecek maksimum nüfus seviyesinin tespiti de bu model ile mümkün olacaktır.

Kullanılan Fonksiyonlar

Türkiye nüfusunun matematiksel büyüme analizinde üzerinde çalıştığımız çok sayıda fonksiyondan, Verhulst lojistik büyüme fonksiyonuna ait altı tanesinin ve Gompertz Büyüme Fonksiyonuna ait dört tanesinin olmak üzere toplam on fonksiyonun sonuçlarını iki grup halinde yazımıza dâhil ettik. Fonksiyonların bu bölümde matematiksel özellikleri amacımıza uygun olarak kısaca anlatılacaktır. Fonksiyonların ileri matematiksel özellikleri hakkında, örneğin diferansiyel denklemden çözüm denklemine ulaşım hakkında vs. ekteki kaynaklarda geniş bilgiler vardır (Tsoularis ve Wallace, 2002).

Nüfus miktarı esas olarak zamanın bir fonksiyonu olarak alınmış, zamana ilaveten ikinci değişken olarak sosyal değişim endeksi ve ters hiperbolik sine fonksiyonları kullanılmıştır. Fonksiyonlarda bağımlı değişken nüfus (Y) ve ana bağımsız değişken (t) zamandır. Kullanılan parametrelerin sembolleri tablo 5 ve 7’de ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Parametreler: dışsal parametreler ve içsel parametreler olarak iki gruba ayrılmıştır. Dışsal parametrelere ait istatistik test değerleri hesaplanmamaktadır. Bunlar taşıma kapasitesi, alt asimptot, esas yıl başlangıç nüfusu gibi fonksiyonda yer almakla birlikte fonksiyon içinde belirlenmeyen unsurlardır. İçsel parametreler: üstel

fonksiyon çarpanları, içsel büyüme oranı, alometrik katsayı, sosyal gelişme endeksi katsayısı ve invers hiperbolik sinh katsayısı sistemin içinden belirlenen değerlerden oluşmaktadır. Sadece içsel parametrelere ait istatistiki test değerleri hesaplanmaktadır. Dışsal parametrelerin değerleri önceden yaklaşık olarak belirlenerek fonksiyona konmakta, içsel parametrelere verilen anlamlı başlangıç değerleriyle yakınsama süreciyle içsel parametrelerin belirlenmesine çalışılmaktadır. İstatistiki değerleriyle birlikte elde edilen içsel parametre değerleri yetersizse dışsal parametreler tekrar tekrar değiştirilerek, içsel parametrelerin başlangıç değerleri yenilenerek ve/veya yeniden parametre tanımları yaparak (reparametrization) süreç tekrar edilmektedir. En çok uygulanan tedbir parametreye düz rakamlar yerine rakamların logaritmalarını veya e tabanına göre değerlerini vererek (ln ve exp değerleri) fonksiyonu çalıştırmaktır. Biz de bu uygulamaya başvurduk ve olumlu sonuçlar aldık.

Tanımları verilen fonksiyonlar, parametrelerin belirlenmesinde (içsel büyüme oranları, q parametreleri vs.) tahmini nüfus değerlerinin, güven sınırlarının hesaplanmasında, gerçek rakamlarla fonksiyondan hesaplanan rakamlar arasındaki farkların (residuals) tayininde, ilgili grafiklerin elde edilip yorumlanmasında kullanılmıştır. Fonksiyonlara ait birinci türevler yıllık nüfus artışlarının (mutlak büyüme) hesaplanmasında esas olarak kullanılmıştır. Birinci türev rakamlarının fonksiyondan hesaplanan nüfus değerlerine oranıyla yıllara göre nispi büyüme (relative growth) rakamları seri halde bulunarak grafiklendirilmiştir. İkinci türevler ise yıllık mutlak artışlardaki değişimin takibinde ve fonksiyonların dönüm noktalarının (point of inflection) hesaplanmasında kullanılmıştır.

Geliştirdiğimiz matematiksel analiz ve istatistiksel uygulamayla Türkiye nüfus verilerinin soyut düzeyde temsiliyeti hedeflenmiş, yapılan ileri istatistiksel çalışmayla keyfiyet test edilmiştir. Matematiksel temsiliyet ve istatistiksel ispat safhalarında alınan başarılı sonuçlar görüldükten sonra söz konusu fonksiyonlarla geleceğe dönük tahmin çalışmaları yapılmış ve elde edilen sonuçlar tartışılmıştır. Bu şekilde 1925-2015 Türkiye nüfusu hakkında matematiksel büyüme modelleri, istatistiksel analiz ve geleceğe dönük tahminler ile kuramsal bir çerçeve tanımlanmıştır.

Verhulst ve Gompertz'den başlayarak matematiksel büyüme fonksiyonları son iki yüzyılda çok geliştirilmiş, yeni parametreler ilave edilmiş, yeni tanımlamalara konu olmuştur. Büyüme fonksiyonlarının iki yüz yıllık geniş bir tarihi vardır. Bu iki yüzyıl zarfında birçok yazar konuya katkı sağlamış bu fonksiyonları geliştirip uygulama sahalarını yaygınlaştırmıştır. Kullanılacak çok sayıda fonksiyon olmasına karşılık bu fonksiyonlar her olayda aynı sonucu vermemektedir. Biz bunlar arasından amaçlarımıza uygun olanları aşağıda çalışarak verdik. Konu burada verilen fonksiyonlarla sınırlı değildir. İnsan nüfusundan ziyade fonksiyonların bitki nüfusları, hayvan nüfusları, mikro organizmaların ve tümörlerin büyümesi vs. konularındaki uygulamaları çok daha yaygındır.

Lojistik fonksiyonlar.

Lojistik fonksiyonlarda: T: temel yıl, K: üst asimptot (taşıma kapasitesi), L: alt asimptot, N veya Y_0 başlangıç nüfus miktarı, Q: üstel fonksiyon çarpanı, r: içsel büyüme oranıdır.

Verhulst Lojistik Fonksiyonu (Fonksiyon 1).

Fonksiyon:

$$Y_{(t-T)} = L + \frac{(K-L)Y_0}{(-Y_0-L+K)e^{-r(t-T)}+Y_0} \quad (1)$$

Fonksiyonun birinci türevi, yıllar itibariyle fonksiyondaki mutlak büyümeyi (=değişim artış/azalış) göstermektedir.

$$\frac{d}{dt}[f(t)] = \frac{(K-L)(-Y_0-L+K)Y_0e^{-r(t-T)}}{((-Y_0-L+K)e^{-r(t-T)}+Y_0)^2} \quad (1a)$$

Nispi büyüme oranı, yıllar itibariyle nispi büyümeyi hesaplamak için kullanılmaktadır.

$$\frac{\frac{d}{dt}[f(t)]}{Y_{(t-T)}} = \frac{(K-L)(-Y_0-L+K)Y_0e^{-r(t-T)}}{((-Y_0-L+K)e^{-r(t-T)}+Y_0)^2} \left(\frac{(K-L)Y_0}{(-Y_0-L+K)e^{-r(t-T)}+Y_0} + L \right) \quad (1b)$$

Fonksiyonun ikinci türevi, fonksiyonun dönüm noktasını hesaplamak için ve mutlak büyümedeki değişimi izlemek için kullanılmaktadır.

$$\frac{d^2}{dt^2}[f(t)] = \frac{2(K-L)(-Y_0-L+K)^2Y_0e^{-2r(t-T)}}{((-Y_0-L+K)e^{-r(t-T)}+Y_0)^3} - \frac{(K-L)(-Y_0-L+K)Y_0e^{-r(t-T)}}{((-Y_0-L+K)e^{-r(t-T)}+Y_0)^2} \quad (1c)$$

Fonksiyonun zaman dönüm noktası: ikinci türev sıfıra eşitlenip t için çözümlenerek elde edilir. Bu değer esas denklemde yerine konularak nüfus karşılığı bulunur:

Zaman dönüm noktası:

$$t_{inf} = \frac{rT + \ln\left[\frac{K-L}{Y_0} - 1\right]}{r} \quad (1d)$$

veya,

$$t_{inf} = T + \frac{1}{r} \ln\left[\frac{K-L-Y_0}{Y_0}\right] \quad (1e)$$

Lojistik fonksiyon simetrik yapıya sahip s-yapılı bir fonksiyondur. Simetrikten kastedilen eğrinin ortasında bir dönüm noktasına sahip olmasıdır. Dönüm noktasında nüfus taşıma kapasitesinin yarısındadır. Zaman olarak karşılığı yukarıda verilen ikinci türev formülünden bulunur. Lojistik eğrinin simetrik bir yapı taşınması beraberinde bazı sorunlar da getirmektedir. Şöyle ki fonksiyon simetrik olduğu zaman eğrinin ilk ve ikinci yarısındaki gidişat konkav/konveks çerçevede birbirini izlemektedir. Eğer analiz edilen nüfusun gerçek rakamları simetrik bir yapıdan uzaksa bu durumda lojistik eğrinin temsil kabiliyeti azalmaktadır.

Ricketts / Head, iki safhalı lojistik büyüme fonksiyonu (Fonksiyon 2-6).

Bu grupta beş fonksiyon incelenmiştir. Bu fonksiyonda Y: nüfus miktarı, t: zaman, T: temel yıl, K: Taşıma kapasitesi (üst asimptot), L: alt asimptot, ve üstel fonksiyon çarpanları, r içsel büyüme oranı, c: invers hiperbolik sinh katsayısı ve v alometrik katsayı (eğrinin bünyesinin şekilleneceği istikameti ve büyüklüğü gösterir) f_t ağırlık fonksiyonu, asimetrik bir yapıya sahip olan bu fonksiyonda ağırlık dağıtım anahtarlarıdır. \bar{C}_f , f_t ağırlık fonksiyonuna ait ortalama eğim göstergesidir.

$$Y_{(t-T)} = L + \frac{(K-L)}{(1+f_t A + (1-f_t)B)^{(1/v)}} \quad (2)$$

$$A = Q_1 e^{(-r(t-T))} \quad (2a)$$

$$B = Q_2 e^{(-r(t-T))} \quad (2b)$$

$$f_t = \frac{1}{1 + \bar{C}_f e^{(-r(t-T))}} \quad (2c)$$

$$\bar{C}_f = \frac{2Q_1 Q_2}{|Q_1 + Q_2|} \quad (2d)$$

v parametresi, Ricketts ve Head'in (1999) orijinal makaledeki fonksiyonunda yoktur. Türkiye nüfus çalışmasında daha iyi sonuç verdiği için biz ilave ettik¹². v parametresi esasen Richards'ın (1959) yazdığı ünlü makalesinde lojistik fonksiyona dâhil edilmiş ve adıyla anılan Richards eğrisi böylece oluşmuştur.

Fonksiyona dahil edilen ağırlık fonksiyonu simetri olayının getirdiği kısıtları aşmak amacıyla taşımaktadır. Dönüm noktası taşıma kapasitesinin tam ortasında değildir. Bu nedenle verilere intibakta bu fonksiyon klasik lojistik eğriye göre üstündür. Esasen dönüm noktasının tam ortada olması tetkik edilen olaylarda beklenmemelidir. Nüfus söz konusu olduğunda da durum böyledir.

Bu gruba ait ikinci fonksiyonda, ilk Ricketts/Head Fonksiyonu sosyal gelişme endeksinin ilavesiyle iki bağımsız değişkenli hale getirilmiştir. Diğer her şey aynıdır.

Bu gruba ait üçüncü fonksiyon, bir önceki iki bağımsız değişkenli fonksiyona sürekli ağırlıklandırma (iteratively reweighted least squares) yönteminin ilavesiyle bulunmuş sonuçları ihtiva eder (SAS/STAT, 2009, s. 4312).

Ricketts/Head lojistik fonksiyonuna ters hiperbolik sinüs fonksiyonunu zaman için ilave ederek de iki çalışma daha yapılmıştır. Hiperbolik fonksiyondaki değişimler aşağıdaki gibidir. Matematik ayrıntılar için Chukwu ve Oyamakin'e (2015) bakılabilir.

¹² Ricketts/Head Fonksiyonuyla bizim Türkiye nüfusu için yeniden tanımlayarak yukarıda verdiğimiz fonksiyon arasındaki diğer farklar için bakınız ek 2.

$$A = Q_1 e^{(-r(t-T) - c \cdot \operatorname{arsinh}(t-T))}$$

$$B = Q_2 e^{(-r(t-T) - c \cdot \operatorname{arsinh}(t-T))}$$

$$f_t = \frac{1}{1 + \bar{C}_f e^{(-r(t-T) - c \cdot \operatorname{arsinh}(t-T))}}$$

Bu grup fonksiyonlarda daha başarılı sonuçlar verdiği için üstel fonksiyon çarpanları Q_1 ve Q_2 istatistiksel çalışmalarda üstel olarak formüle dâhil edilmiştir. $Q_1 = \exp(Q1e)$ ve $Q_2 = \exp(Q2e)$ 'dir.

Ricketts/Head lojistik fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerinin alınması çok zaman alan ve fazla yer tutan bir süreç olduğundan bu fonksiyona dayalı mutlak ve nispi büyüme analizine girmedik. Lojistik eğri ve Gompertz eğrisi için verdiğimiz mutlak ve nispi büyüme analizlerinin yeterli olduğu görüşündeyiz.

Gompertz Büyüme Fonksiyonları.

Birçok parametrelerle tanımlanan Gompertz Büyüme Fonksiyonunun dört parametrelili aşağıda verilen tanımı çalışmalarımızda kullanılmıştır. Gompertz fonksiyonlarında: T: temel yıl, K: üst asimptot (taşıma kapasitesi), N veya başlangıç nüfus miktarı, Q: üstel fonksiyon çarpanı, r: içsel büyüme oranıdır.

Gompertz Büyüme Fonksiyonu. (Fonksiyon 1 ve 2)¹³

Fonksiyon:

$$Y_{(t-T)} = Y_0 + (K - Y_0)e^{-Qe^{-r(t-T)}} \tag{3}$$

Fonksiyonun birinci türevi:

$$\frac{d}{dt}[f(t)] = (K - Y_0)Qr e^{-Qe^{-r(t-T)}} e^{-r(t-T)} \tag{3a}$$

Nispi büyüme oranı:

$$\frac{\frac{d}{dt}[f(t)]}{Y_{(t-T)}} = \frac{(K - Y_0)Qr e^{-Qe^{-r(t-T)}} e^{-r(t-T)}}{(K - Y_0)e^{-Qe^{-r(t-T)}} + Y_0} \tag{3b}$$

Fonksiyonun ikinci türevi:

$$\frac{d^2}{dt^2}[f(t)] = (K - Y_0)Qr^2 e^{-Qe^{-r(t-T)}} e^{-r(t-T)} - r e^{-Qe^{-r(t-T)}} e^{-r(t-T)} \tag{3c}$$

Fonksiyonun zaman dönüm noktası (inflection point):

$$t_{inf} = \frac{rT + \ln(Q)}{r} \tag{3d}$$

13 Gompertz fonksiyonu ile ilgili ayrıntılı açıklamalar bu istatistiki çalışma sonuçlarıyla birlikte ekl 1'de verilmiştir.

Gompertz fonksiyonunda simetri yoktur. Bu nedenle verilere uyum göstermede üstünlüğe sahiptir. Esnek bir yapıdadır. Yaptığımız çalışmalarda da bunu gördük, alometrik kat sayının ilave edilmesinden başarılı sonuç alamadık ve vazgeçtik. Esasen fonksiyon esnek bir yapıya sahip olduğundan başka parametrelerin dâhil edilmesi iyi netice vermemektedir.

Bu başlık altında Gompertz fonksiyonunun sürekli ağırlıklandırılmış versiyonu da (*iteratively reweighted least squares*)¹⁴ çalışılarak aşağıda sonuçları verilmiştir.

Bu gruptaki fonksiyon 2’de daha başarılı sonuçlar verdiği için q ve r reparametrize edilerek fonksiyonlarda $Q = \exp(Qe)$ ve $r = \exp(re)$ şeklinde hesaplamalara dâhil edilmiş ve başarılı istatistiksel sonuç alınmıştır.

Hiperbolik Gompertz Büyüme Fonksiyonu (Fonksiyon 3 ve 4).

Yukarıdaki Gompertz Büyüme Fonksiyonunun bilinen genel halidir. Fonksiyonu tadil edip geliştiren çalışmalar da vardır. Bu yönde bir çalışma olan Chukwu ve Oyamakin’in (2015) “hiperbolik Gompertz fonksiyonunda” yazarlar, Gompertz fonksiyonunun büyüme rakamına zamanın hiperbolik sine değerinin tersini ilave ederek çam ağaçlarının boyu ve gövde çapı üzerinde yaptıkları istatistiksel çalışmada başarılı sonuçlar elde etmiştir. Bu yöntemi nüfus çalışmamızda kullanmayı uygun gördük.

Fonksiyonun matematiksel şekli:

$$Y_{(t-T)} = Y_0 + (K - Y_0)e^{-Q \cdot e^{(-r(t-T) - c \cdot \text{arsinh}(t-T))}} \quad (4)$$

Ters hiperbolik sinüs fonksiyonu EXCEL’de ASINH(x), SAS’da ARSINH(x) ve başka kaynaklarda ARCSINH(X) olarak anılan fonksiyondur. Tam matematik karşılığı:

$$\sinh^{-1}(x) = \log |x + \sqrt{1 + x^2}| \quad (5)$$

şekindedir. Matematik ayrıntılar ve istatistiksel uygulamalar için çok güzel izahat veren Chukwu ve Oyamakin’e (2015) ve yazarların diğer makalelerine bakılabilir.

Bu gruba ait son fonksiyon hiperbolik fonksiyona sürekli ağırlıklandırma (*iteratively reweighted least squares*) yönteminin ilavesiyle bulunmuş sonuçları ihtiva eder (SAS/STAT, 2009, s. 4312).

Kullanılan Nüfus Verilerinin Açıklaması

Ön hazırlıklar.

Türkiye’de nüfus sayımı ilk olarak 1927 yılında yapılmıştır. Türkiye’yi de önemli ölçüde olumsuz etkileyen 1930 Dünya iktisadi krizini müteakiben 1935 yılında ilki olmak üzere 1990 (dâhil) yılına kadar her beş yılda bir düzenli nüfus sayımı yapıl-

14 <https://v8doc.sas.com/sashtml/stat/chap45/sect31.htm> veya <https://www.okstate.edu/sas/v8/saspdf/stat/chap45.pdf>. s. 2412.

mıştır. 1995 yılında sayım yapılmamış, sonra 2000 yılında yapılmıştır. Bu sayımlar sokağa çıkma yasağı ile birlikte uygulanmıştır. 2005 yılında da sayım yapılmamıştır. 2007’den (dâhil) itibaren adrese dayalı nüfus sayımları yapılmasına başlanmıştır. 2007-2016 dönemi adrese dayalı sayımların uygulandığı yıllardır. TÜİK¹⁵ web sayfalarında 2007-2016 döneminin her bir yılı için rakam vardır. İlaveten TÜİK, “Demografik göstergeler, 2000-2023” başlığı altında web sayfalarında her yıl ortası ve sonu için nüfus istatistikleri yayınlamıştır. Adrese dayalı sayımlar sokağa çıkma yasağı sayımlarıyla karşılaştırıldığında diğer bir deyimle 2000 öncesi ve sonrası rakamlar bir seri haline getirildiğinde bir istatistikçinin dikkatini çeken analiz sorunları ortaya çıkmaktadır. Bir nüfus eğrisinde olmayacak kadar sert kırılmalar değişimler görülmektedir. 1995 ve 2005 yıllarına ait sayım sonuçları olmayışı analiz keyfiyetini daha da güçleştirmektedir. Eski sayım sistemi terkedilirken 1995 ve 2005 gibi sayım yapılmayan yıllarla birlikte 2007 de yeni sayım sistemi uygulaması sonucu elde edilen rakamlar arasında tutarsızlıklar görülmüştür. Bu nedenle çalışmamamızın amacına uygun olarak aşağıda anlatacağım yöntemlerin uygulanmasıyla serilerin tutarlı hale gelmesi amaçlanmıştır.

Elimizdeki sayım verilerinin çoğunluğu beş yıllık dönemlere ait olduğundan bu çalışma da da beş yıllık dönemi esas alarak analiz yaptık. 1927 ilk sayımını 1925 ve 1930 yılı için tahminlerde veri olarak kullandık ve nihai matematiksel model tahmininin veri setine dâhil etmedik.

Elimizde sayım verisi olmayan 2005 yılı için ise TÜİK’in yaptığı tahmini kullandım. Genel nüfusumuza ait istatistiklerin esasen yeterli olmadığını düşünürsek özellikle 1995 ve 2005 yıllarının sayım yapılmadan geçilmesi ve boşluklar yaratılmasının, gelişiminin ortalarını yeni geçen ve çeşitli karakteristik değerleri edinme sürecinde olan nüfusun anlaşılmasında önemli bir eksiklik olduğu kanısındayım. 2007 yılından itibaren ikametgâha dayalı nüfus sayımına geçildiğinden sayım yapılmayan 1995 ve 2005 yıllarının eksikliği sokağa çıkma yasağının uygulanarak yapıldığı sayımların terk edildiği sıraya denk gelmiştir. Bunun sonucu olarak aradaki boşluk sokağa çıkma yasağıyla yapılan sayımların ikametgâha dayalı olarak yapılan sayımlarla bir araya getirilmesinde sorun olmuştur. Nitekim TÜİK’de normal çalışmalarına ilaveten 2000-2010 dönemi için yıl ortası ve yılsonu sayım tahminleri yayınlamıştır. Zaman zaman bunlara da başvurudum.

Bahsi geçen sorunların üstesinden gelmek ve tutarlı bir analiz yapmak için izlediğim yöntem şudur. Verilerin beş yıllık sürelerle göre tanzim edilmesine öncelik verilmiştir. Zira elimizdeki verilerin çoğunluğu beş yıllık sürelerle aittir (1935-1990). 1927-2000 dönemine ait haneler gezilerek yapılan sayım sonuçlarına uygulanan üçüncü derece parabolik denklem esas alınarak 1925 ve 1930 yılları için nüfus tahmini yapılmıştır. Denklem aşağıdaki gibidir.

15 Türkiye Ulusal İstatistik Kurumu

$$Y = 8148x^2 - 31247051x + 2997679756, R^2 = 99.99 \quad (6)$$

(Standart sapmaları sırasıyla: -316, 1239835 ve 1216851491, Y: nüfus ve x: zaman)

Bu denkleme istinaden 1925 ve 1930 yılına ait rakamlar sırasıyla 13,538,351 ve 14,350,591 olarak bulunmuştur. Bundan sonra 1990 (dâhil) yılına kadar TÜİK sayım sonuçları aynen alınmıştır. 2000, 2005 2010 ve 2015 yılları için TÜİK tarafından hesaplanan yıl ortası değerleri esas alınmıştır.

Esas sorunlu yıl 1995'dir. 1995'te sayım yapılmamıştır. 1995 yılı boş bırakılarak 1970-2015 verileri esas alınıp hesaplanan aşağıdaki denklemden 1995 yılı verisi 61,066,689 olarak hesaplanmıştır.

$$Y = 66933691 \ln(x) - 120193105, R^2 = 99.57 \quad (7)$$

(Standart sapmaları sırasıyla: 1553143 ve 4133871, Y: nüfus ve x: zaman)

Bu düzenlemelerden sonra bir nüfus kitlesinin gelişiminde tuhaf karşılanan görüntüler temizlenmiş ve seri, istatistiksel analize esas olabilecek bir seviyeye ulaşmıştır.

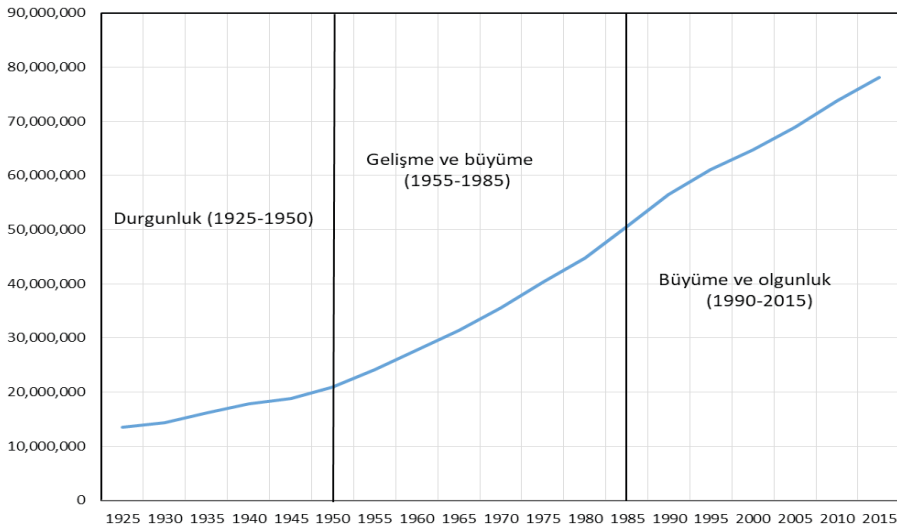
1925-2015 olarak bakıldığında beşer yıllık dönemlere isabet eden seriyle manalı analiz mümkün olmaktadır. 1925 yılında tahminen 13,5 milyon kişi olan Türkiye nüfusu 2015 yılında 78,1 milyon kişiye ulaşmıştır. Doksan yılda nüfus 5,79 kat artmıştır. Buradan nereye? Başlangıç rakamı önemli değildir. Yaklaşık biliyoruz ve artık tarih olmuştur. Ama gelecek rakamını bilmek merakımız dâhilindedir. 1925-2015 dönemi mutlak ve büyüme oranlarını da tespit etmek bu çerçevede yararlı olacaktır.

Yapılan ön hazırlıklardan sonra 19 yıla ait veri seti aşağıdaki gibi oluşmaktadır.

Tablo 3
Türkiye Nüfusu

Sayım no	Yıl	Nüfus (kişi)	Sosyal gelişme endeksi
1	1925	13,538,351	1
2	1930	14,350,591	1
3	1935	16,158,018	1
4	1940	17,820,950	1
5	1945	18,790,174	1
6	1950	20,947,188	1
7	1955	24,064,763	2
8	1960	27,754,820	2
9	1965	31,391,421	2
10	1970	35,605,176	2
11	1975	40,347,719	2
12	1980	44,736,957	2
13	1985	50,664,458	2
14	1990	56,473,035	3
15	1995	61,066,689	3
16	2000	64,729,000	3
17	2005	68,861,000	3
18	2010	73,723,000	3
19	2015	78,152,000	3

Bu rakamlara ait basit bir grafik de aşağıdaki gibidir.



Grafik 6. Türkiye nüfusu (1925-2015).

Bu tabloya bir de siyaset-iktisat-sosyoloji üçgeninde toplu olarak bakmakta yarar vardır. Bu amaçla 1925-2015 dönemi üçe ayrılmıştır: durgunluk, gelişme ve büyüme, büyüme ve olgunluk. Bu ayırmadan amaç rakamlarla ifade edilen nüfus miktarının nicel yönüne niteliksel değişimi de yansıtmaktır. Daha sonra, dönemlere ait “sosyal gelişme endeksi” fonksiyonlara *dummy* değişken olarak dâhil edildiğinde anlamlı istatistik sonuçlar verdiği görülecektir. Dönemlerin tanımları kısaca aşağıdaki gibidir.

Durgunluk (1925-1950).

Yeni bir siyasal yapıya kavuşmuş olan Cumhuriyetin ilk döneminde savaştan çıkmış bir nüfusla karşı karşıyayız. On yıl süren savaşlar dönemi bitmiş yeni Türkiye kurulmuş ve kendisini toparlama sürecindedir. Kısa bir süre sonra 1930 iktisadi krizi Dünya’da başlamış, Türkiye bundan ziyadesiyle etkilenmiş müteakiben iktisadi kalkınmasını 1933 yılında beş yıllık sanayi planıyla uygulamaya koymuştur. Planın bitiminde ikinci savaş başlamış bu durumdan da nüfus, ekonomi ve siyaset açılarından ülke ciddi boyutlarda olumsuz etkilenmiştir. 1945’te savaşın bitimiyle olumsuzluklar sona ermiş, Avrupa’ya gelen Marshall yardımıyla Türkiye’nin gelişimi yeni bir döneme girmiştir. Sayılan olaylar durgunluk döneminde nüfusun nicelik ve nitelikleri üzerinde önemli olumsuz etkilerde bulunmuştur. Savaş sırasında nüfus artış hızı gerilemiştir. Bu dönem nüfus açısından önemli olan sıhhat ve hijyen imkanlarının en az olduğu dönemdir. Tıp olanakları çok sınırlıdır. Altı nüfus sayımının esas alındığı bu döneme istatistiksel yöntemlerin yardımıyla iki tahmini dönem (1925 ve 1930) çalışmalarımızda eklenmiştir. 1927 sayım rakamı doğrudan kullanılmamıştır. Toplam olarak hesaplara alınan gözlem sayısı altıdır. Sosyal gelişme endeksinde bu altı gözleme 1 değeri verilmiştir.

Gelişme ve büyüme (1955-1985).

Gelişme ve büyüme dönemi diye adlandırdığımız bu dönem Türkiye'nin sınai kalkınmasının Dünya Bankası öncülüğünde başladığı dönemdir. Savaşsız geçen bu dönemde nüfus büyümesinde önemli artışlar olmuş, dünyadaki ekonomik büyümeyle birlikte Türkiye'de de gelir seviyesi yükselmiş, yatay ve dikey şehirleşme artmıştır. Bu dönemin nüfus dinamikleri ilk dönemden farklıdır. Kıt kaynaklar dikkate alınarak planlı kalkınma uygulamasına geçilmiş, artan sanayileşmeye paralel olarak tarımsal üretim ve nüfus nispi olarak gerilemiş, özellikle 1965'ten itibaren büyük şehirlere başlayan nüfus göçü 1970-80 arasında Türkiye'nin sosyo-kültürel yapısını ciddi biçimde değiştirmiştir. Yaşanan siyasi ve iktisadi krizler -1960, 1970 ve 1980- nüfusu çok etkilemiş, büyük şehirler kapasitelerinin çok fazla üstünde plansız nüfus büyümeleri göstermiştir. Diğer taraftan dünyada yaşanan ikinci savaş sonrası gelişmeler de ülke nüfusumuzu olumlu ve olumsuz yönlerden çokça etkilemiştir. Bu dönemde yedi nüfus sayımı yapılmıştır. Sosyal gelişme endeksi olarak bu yedi sayıya 2 değeri verilmiştir.

Büyüme ve olgunluk (1990-2015).

Yaşadığımız bu son dönemde nüfus artış hızında düşüşler görülmeye başlamış, gelir artışı devam etmiş nicelik ve nitelik yönünden nüfusun yapısı Türkiye'nin artan imkânlarıyla daha fazla buluşmuştur. Coğrafi yapıda nüfus yaygınlığı artmış şehirlerde yoğunluk fazlaşmıştır. Ülkenin ekonomik ve coğrafi imkânlarından daha fazla yararlanan nüfusun 'taşıma kapasitesine' yaklaştığı görülmüştür. Aşağıdaki hesaplamalarda 113,8 milyon kişi olarak bulunan taşıma kapasitesini esas alırsak 2015 nüfusuna (78.150.000 kişi) göre 'orta yol' geçilmiş ve bu kapasitenin %68,6'sına ulaşılmıştır. Bu durumda gidilecek 35,7 milyonluk bir nüfus vardır. Bu büyük bir rakamdır. Benim dokuz yaşında olduğum 1960 yılı nüfusunun 27,7 milyon olduğu dikkate alınırsa 35,7 milyonun tek başına daha büyük ve önemli bir Türkiye olduğu ortaya çıkar. Bu döneme ait verilerden beş yıllık düzenlemesine uygun olarak elimizde 6 gözlem bulunmaktadır. Bu altı verinin sosyal gelişme endeksi 3 olarak alınmıştır.

Sayıdığımız bu safhaların niteliksel analizine daha fazla girmek konumuz dışıdır. Açıklamalar yazının amacı kapsamında yeterlidir. Rakamlara ilaveten nüfusun sosyal izahatı için bir çerçeve çizilmeye çalışılmıştır.

Bu üç safha sırasıyla 1, 2, 3 olarak endekslenip iki safhalı lojistik ve Gompertz büyüme fonksiyonlarına kukla (dummy) değişken olarak dâhil edilmiştir. Bu şekilde zamana ilaveten niteliksel bir değişkenin de matematiksel çalışmalara dâhil edilmesi amaçlanmış ve olumlu sonuçlar alınmıştır. Hata kareleri toplamı %40 azalarak bulunan parametrelerin temsil kabiliyeti artmıştır.

Bu alt bölümde anlatılanların 1925-1960 bölümü hakkında okuduklarım, eğitimim ve profesyonel iş hayatım sayesinde ziyadesiyle bilgi sahibi oldum. 1960-2015 arası

bilgilerime bu saydıklarımaya ilaveten canlı hatıralarımı ve yaşadıklarımı da ilave etmem gerekir. 1951 doğumluyum, çocukluğum, eğitim, iş ve emeklilik hayatımın tamamı İstanbul'da geçti. 1965 öncesi babamın iş seyahatleri nedeniyle Türkiye'nin pastoral hayatını tanıdım. 1965-1980 arası yaşanan şehirlere göç olayını ve getirdiği sosyoekonomik değişimi yakından gözlemledim ve bu göçlerle birlikte şehir merkezlerinin kazalarla kazaların komşu şehirlerle birleşmesini gördüm ve yaşadım. 1960, 1970 ve 1980 yıllarında yaşanan politik ve ekonomik olaylar ve sonuçlarını gördüm. Türkiye'nin nüfus hareketleri ve sonuçları üzerinde sayısız gözlemim var. İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesinde iktisat ana bilim dalı yanında istatistik dersleriyle birlikte demografi de okudum. Eğitim hayatımdan sonra iş hayatımda da iktisatçı olarak çalışıp Türkiye'nin sınai kalkınmasını bir iktisatçı olarak çeyrek asır takip ettim, yaşadım. Sonuç olarak burada soyut düzeyde anlatılanlar uzun bir yaşam içinden derlenen gözlemlere mesleki tecrübe ve bilgimizin de eklenmesiyle oluşabilmiştir. Ne eğitim, ne yaşam ne teorik bilgi keyfiyeti tek başına açıklamaya yetmez. Hepsi bir arada olmak gerekir.

İstatistiksel Yöntemler ve Uygulanan Kıstaslar

Lojistik ve Gompertz büyüme fonksiyonları doğrusal bir yapıya sahip değildir. Doğrusal olmayan bir fonksiyonun parametreleri arasında doğrusal olmayan bir ilişki vardır. Daha matematik bir ifadeyle aşağıdaki alıntı önemlidir.

NLIN yöntemi en küçük kareler yöntemini kullanarak tek değişkenli doğrusal olmayan bir hesaplama yapar. Doğrusal olmayan regresyon analizi bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki fonksiyonel ilişki doğrusal olmadığı zaman uygulanır. Bu anlamda doğrusal olmayan yapı, *parametreler* arasındaki doğrusal olmayan ilişkiye işaret eder. Birçok doğrusal regresyon modellerinde bağımsız değişkenin düz bir çizgi olmayan yapı sergilemesi doğrusal olmadığı anlamına gelmez. Bu durum modeli doğrusal olmayan bir hale getirmez. Eğer modelin bir parametreye göre türevi bu ve diğer parametrelere bağımlı ise model doğrusal değildir.¹⁶

Bu nedenle doğrusal denklemlerin katsayılarını tahmin için kullanılan en küçük kareler yöntemini burada kullanamayız. Doğrusal olmayan fonksiyonların parametrelerinin tahmininde bu amaca uygun geliştirilmiş doğrusal olmayan en küçük kareler yöntemi kullanılır. Biz de çalışmamızda bu yöntemi takip ettik. Elle ve basit bilgisayar istatistik programlarıyla bu hesaplamaları yapmak imkânsızdır. Microsoft Excel burada sadece veri hazırlama amaçlı kullanılabilir. Excel'in doğrusal olmayan regresyon modelleri yoktur. Biz de öyle yaptık, Excel'i veri hazırlama için kullandık. Esas kullandığımız yazılım açıklaması dipnot 8'deki kaynakta bulunan doğrusal olmayan fonksiyonların istatistiksel tahminleri için ileri düzeyde uygulama sağlayan SAS NLIN yöntemidir.

SAS University Edition NLIN yazılım yönteminin istatistiksel hesaplamalarda esas aldığı kıstaslar özetle aşağıdaki gibidir.

¹⁶ SAS/STAT® 9.2 User's Guide The NLIN Procedure (Book Excerpt), SAS Documentation, February 2009, 2nd electronic book, p. 4264.

Yakınsama kıstası/yineleme aşaması (convergence criterion/ iteration phase).

Bu kıstasa göre, değeri tahmin edilmek istenen parametrelere anlamlı başlangıç değerleri verildikten sonra kullanılan yazılım belirlenen süreçlere göre parametrelerin varacağı değerleri tekrarlamalarla hesaplar. Tahmini istenen parametrelerin (içsel parametreler) beklenen değerleri alması için dışsal parametrelerin değiştirilmesiyle tekrar tekrar dengeli değerlere ulaşılması sağlanır. İstenen değerlere ulaşılırken hata kareleri toplamının en az olacak şekilde belirlenmesi amaçtır. Parametreler hesaplandıktan sonra bunların hata kareleri toplamını minimize edip etmediğini program kontrol eder, denemeler minimizasyon elde edilene kadar tekrar edilir. Bu yönüyle hesaplama basit en küçük kareler yönteminden ayrılır.

İterasyon sonucunda elde edilecek değerlerle birlikte aşağıdaki istatistiklerin tamamının istenen sınırlar içinde karşılanmış olması beklenir. Yakınsama kıstasına ait örnekler eklerde “Iterative Phase” tablolarında yer almaktadır.

Hata kareleri toplamının en aza indirilmesi (minimization of error sum of squares).

Doğrusal olmayan regresyon analizinde yöntem, tahminen başlangıç değerleri verilen parametrelerin denkleme konulmasından sonra elde edilen tahmini nüfus değerlerinin veri setiyle karşılaştırılmasından sonra elde edilen farkların en az olması esasına dayanır. Veri seti başlangıçta hesaplara dâhil edilmez. En az olarak elde edilecek hata kareleri toplamıyla veri setinin en iyi temsil edildiği kabul edilir. Hesap tarzı basit en küçük kareler yönteminden farklıdır. Basit en küçük kareler yönteminde parametre değerleri bilinen formüllere göre hesaplanır. Buradaysa denemelere dayanan bir minimizasyon süreci söz konusudur. Minimize edilecek tutar izah edilemeyen hata karelerinin toplamıdır. Kullandığımız istatistik yazılımı da bu yönetime göre çalışmaktadır. Çalışmalarımızda minimizasyon neticesi elde edilen hata kareleri toplamı toplam kareler toplamının on binde 1.2’si ile 0.3’ü arasındaki değerler olarak bulunmuştur. Bulunan bu değerler hata karelerinin izahını yapacak ek istatistiki yöntemlerin tatbik edilmesini gerektirmeyecek kadar küçüktür. Diğer bir anlatımla uygulanan zaman fonksiyonları Türkiye nüfusunun ‘tamamını’ açıklamaktadır diyebiliriz.

Verilerin uygunluk teşhisi için grafikler.

SAS NLIN yöntemi çıktısında yer alan birçok analiz grafiği de yorumlarımıza yardımcı olmuştur. Örnekler ek 3’de vardır.

F- testleri.

SAS NLIN yöntemi istatistiksel hesaplama çıktısında yer alan F test değerleri istatistikte bildiğimiz F testidir. Çalıştığımız fonksiyonların tamamı F testlerini geçmiştir. F-testlerinin istatistiksel yorumları genel istatistik kitaplarında ziyadesiyle bulunabilir.

Parametrelere ait standart hata değerleri ve tahminlerin %95 güven sınırları.

Parametrelerle ilgili tahminler elde dildikten sonra bunların standart hataları da hesaplanmış, tahminlerin standart hatalara bölümünden elde edilen değerler t tablosu ile karşılaştırıldığında hepsinde t-tablosu değerleri üzerinde yer aldıkları ve kabul edilebilir oldukları görülmüştür. İlâveten bootstrap eğrilik-düzeltilmiş %95 güven sınırları hesaplanarak standart %95 güven sınırlarıyla örtüşmesi kontrol edilerek geçerli sonuçlar sağlanmıştır. Doğrusallığın sağlanmış olması için normal %95 güven sınırlarının bootstrap eğrilik-düzeltilmiş güven sınırlarıyla örtüşmesi gerekmektedir. Bu örtüşme sağlanana kadar yakınsama sürecinin ek tedbirlerle devam ettirilmesi gerekmektedir. Bu konuda Gebramariam’ın (2014) yazısı ve referanslarının tetki-kinde çok fayda mülâhaza ediyoruz. Aşağıdaki tabloda 4 numaralı lojistik fonksiyon çıktısından alınan normal ve bootstrap %95 güven sınırları değerleri verilmektedir. Tüm parametreler için standart %95 güven sınırlarının bootstrap sınırları içinde olduğu görülmektedir. Diğer fonksiyonlara ait benzer sonuçlar da çıktılarda yer almıştır.

Tablo 4

Gompertz Büyüme Fonksiyonuna Ait Güven Sınırları ve Bootstrap-Eğrilik-Düzeltilmiş Güven Sınırlar

Parameter	Estimate	Approx Std Error	Approximate 95% Confidence Limits		Bootstrap Std Dev	Bootstrap Bias-Corrected 95% Confidence Limits		Skewness	Bias	Percent Bias
r	0.0271	0.000230	0.0266	0.0276	0.000229	0.0266	0.0275	0.0236	1.226E-6	0.005
q	2.5773	0.0230	2.5289	2.6258	0.0227	2.5312	2.6204	0.0560	0.000227	0.009

Box eğrilik (bias) ve Hougaard çarpıklık (skewness) kistasları ve genel doğrusal-olmayan durum kistasları.

İlk defa Ratkowsky (1990) tarafından tanımlanan “doğrusala-yakın” doğrusal-olmayan regresyon modeli doğrusal regresyon modeli tarafından üretilen özelliklere benzer parametreler üreten bir modeldir. Diğer bir deyişle, parametrelerin en küçük kareler yöntemiyle elde edilen tahminlerinin eğriliği yoktur, normal dağılmışlardır, en düşük varyans tahminlerine sahiptirler.

Doğrusal-olmayan bir model tek bir parametrenin özelliklerinden dolayı doğrusala-yakın özellikler göstermede başarısız olabilir. Bu olduğu zaman parametrelerdeki eğiklik (bias) ulaşılan geçersiz standart hataları ve güven sınırlarını kullanarak sonuçlar çıkarır. Ratkowsky (1990) doğrusal-olmayan bir modelde iki eğrilik bileşeni- ni- içsel eğrilik ve parametre-etkileri eğriliğini (Bates ve Watts 1981) tanımlar, tipik olarak parametre-etkileri eğriliği daha büyüktür. Doğrusal-olmayan bir modeli farklı bir parametremeye uygulamanın cazibesi farklı bir yorum elde etmek ve parametre tahminlerine daha doğrusala-yakın bir keyfiyet kazandırmaktır.

Hougaard’ın skewness ölçütü kullanılarak parametrenin doğrusala yakın olup olmadığı, önemli boyutta doğrusal-olmayan bir keyfiyet gösterip göstermediği araştırılabilir. SAS PROC NLIN modeli bu keyfiyeti test eden HOUGAARD seçeneğini ihtiva eder (SAS/STAT, 2009, s. 4289-4290).

Bu alıntı sorunu ve çözümü yeterince izah etmektedir. Hougaard'ın skewness kistası Box'ın bias kistası doğrusal-olmayan fonksiyonların analizinde genel kabul görmüş istatistik testlerdir. Çalışmamızda doğrusal olmayan fonksiyonların parametre tahminine bias ve skewness özellikleri de eklenmiştir.

Ratkowsky'e göre %1'den büyük eğrilik (bias) önemli bir doğrusal-olmayan durumun göstergesidir. Biz de analizimizde bu kriteri uyguladık. Keza mutlak değer olarak 0.24'den büyük Hougaard çarpıklık (skewness) ölçütü de doğrusal-olmayan bir fonksiyonun varlığı olarak düşünülmelidir (Gebremariam, 2014). Burada amaç doğrusal olmayan fonksiyon parametrelerinin mümkün olduğu kadar doğrusal hale getirilmesidir. Keyfiyet bu iki kistas ile tespit edildikten sonra çeşitli yöntemlerle doğrusallığın sağlanması gerekir. Bunlardan en basit ve önemli bir önlem tahmin edilen parametrenin logaritmik veya üstel değerini kullanmaktır. Yine Ratkowsky'ye göre tahmin edilen parametrenin dağılımı sağa doğru uzun bir kuyruk oluşturuyorsa normal dağılımdan ziyade lognormal bir dağılım vardır ve parametre üstel parametre veya pozitif güç ile değiştirilmelidir. Eğer dağılım sol kuyruğa doğru ise parametre logaritması ile veya kesirli güç ile değiştirilmelidir. Bu incelemeler yapılırken "bootstrap eğrilik-düzeltilmiş %95 güven sınırları" ile standart güven sınırlarının örtüştüğü de aynı zamanda kontrol edilmelidir.

Box ve Hougaard'ın geliştirdiği yöntemlere ilaveten ele alınması gereken diğer kistaslar Bates ve Watts (1980) tarafından geliştirilen genel doğrusal-olmayan durum ölçüleridir (Global Nonlinearity Measures). Bunlar maksimum parametre-etkileri ve maksimum içsel eğrilik ölçüleridir (Maximum parameter-effects and maximum intrinsic curvature measures). İstatistik yazılımımızın çıktısında, 'Global Nonlinearity Measures' tablosunda yer alan bu değerlerinin yine aynı tabloda yer alan 'curvature critical value'nün altında olması doğrusallığın geçerliliği için gereklidir. Konuyla ilgilenenler dipnot adreste ayrıntıları ve kaynakları bulabilirler.¹⁷

SAS NLIN yazılımı yukarıda sayılan istatistikî yöntemlerin tamamını içermektedir. Çalışmamızda bunları yoğun olarak kullandık. Ekte örnek çıktılarını verdik. Parametrelerini tahmin ettiğimiz Verhulst lojistik eğrileri, Gompertz büyüme fonksiyonları istatistik testlerinin tamamını geçmiştir. Hesaplanan içsel parametreler ve dışsal parametreler bu şekilde oluşmuştur. Özellikle dışsal parametrelerin yukarıya ve aşağıya çekilmesi istatistik değerleri olumlu/olumsuz etkilemektedir. İçsel parametreler ise ancak hepsi bir arada istenen sonucu vermektedir. Dolayısıyla modellerde keyfiliğe yer olmamaktadır.

¹⁷ https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63962/HTML/default/viewer.htm#statug_nlin_sec020.htm#statug_nlin.nlinbias

Tablo 5
 SEO Tablo 1* ARABIC 5: Lojistik Fonksiyonlara Ait İstatistiksel Değerler

Fonksiyonun adı	Semboller	Fonksiyon 1	Fonksiyon 2	Fonksiyon 3	Fonksiyon 4	Fonksiyon 5	Fonksiyon 6
SAS / F ile referansı Ek referansı		Turkpop1. sas Ek 3	Turkpop6. sas Ek 4	Turkpop6a. sas -	Turkpop6b. sas Ek 5	Turkpop6ar- sinh.sas -	Turkpop6ar- sinhwe.sas -
Dışsal Parametreler							
Temel yıl	T	1952.7957	1940	1925	1925	1940	1940
Üst asimptot (taşma kapasitesi)	K	94.000.000	115.000.000	115.000.000	115.000.000	120.000.000	117.000.000
Alt asimptot	L	9.529.843	7.000.000	8.200.000	7.200.000	5.000.000	5.000.000
Başlangıç miktarı	N veya (Y ₀)	13.538.351	-	-	-	-	-
İçsel Parametreler							
Üstel fonksiyon çarpanı	Q	5.2397	-	-	-	-	-
Üstel fonksiyon çarpanı 1	Q1		57,090.90	383,770.50	250,246.07	23,374.48	26,134.20
Üstel fonksiyon çarpanı 2	Q2		4,507.06	29,007.22	20,710.58	1,911.80	2,174.82
İçsel büyüme oranı	r	0.0493	0.1219	0.1194	0.1152	0.1135	0.1162
Alometrik katsayı	v	-	3.6006	3.3946	3.4182	3.4143	3.5145
Sosyal gelişme katsayısı	s	-	-	0.1654	0.1278	-	-
endeksi							
İnvers hiperbolik sinh katsayısı	c	-	-	-	-	-0.0758	-0.0752
Ağırlık dağıtma fonksiyonu katsayısı	C _f	-	8,354.56	53,937.58	38,255.13	3,534.51	4,015.48
Logaritmik değerler							
In(Q1)	Q1e	-	10.9524	12.8578	12.4302	10.0594	10.171
Logaritmik değerler							
In(Q2)	Q2e	-	8.4134	10.2753	9.9384	7.5558	7.6847
Bağımsız değişkenler		Zaman	Zaman	Zaman ve sosyal gelişme endeksi	Zaman ve sosyal gelişme endeksi	Zaman ve ters hiperbolik sine fonksiyonu	Zaman ve ters hiperbolik sine fonksiyonu
Hata kareleri toplamı	ESS	4.707E + 12	2.461E + 12	1.826E + 12	1.010E + 12	1.936E + 12	1.420E + 12
Toplam kareler toplamı	TSS	3.895E + 16	3.895E + 16	3.895E + 16	2.858E + 16	3.895E + 16	3.111E + 16
Hata kareleri toplamı / Toplam kareler toplamı (onbinde)	F	1.2085	0.6318	0.4688	0.3534	0.4970	0.4564
F-değeri		70,334.80	59,341.30	59,730.20	79,251.20	56,333.10	61,328.80

İstatistiksel Çalışma Sonuçları ve Yorumlar

Bu bölümde; üzerinde çalıştığımız çok sayıda fonksiyondan, altı adedi Verhulst lojistik büyüme fonksiyonu ve dört adedi Gompertz Büyüme Fonksiyonu olmak üzere on tanesinin istatistiki sonuçlarını ele alarak yorumlar yapacağız. Aşağıda sonuçları verilen büyüme fonksiyonları yukarıda altıncı bölümde sayılan istatistiksel kıstasların tamamını karşılamaktadır. Eklerdeki çıktı tablolarından da keyfiyeti görmek mümkündür.

Lojistik Fonksiyonlar.

Verhulst lojistik fonksiyonu.

Yazımızda elde edilen istatistik sonuçlardan birinci fonksiyonlara ait olanları fonksiyonda yerine koyarak analize başlamanın uygun olacağını düşündük. Tablodaki fonksiyon 1'e ait değerleri (birinci kolon) yerine koyarsak,

$$Y_{(t-1952.8)} = 9529843 + \frac{13538351(94000000 - 9529843)}{13538351 + (94000000 - 9529843 - 13538351)e^{-0.0493(t-1952.8)}} \quad (8)$$

elde edilir. Nüfus artışı zamanın fonksiyonudur.

Geleneğe uyarak açıklamalarımıza lojistik fonksiyon sonuçlarıyla başlıyoruz. Lojistik eğrinin istatistik çıktısında yer alan (ek 3) convergence/iterative phase sonuçları, standart hatalar, skewness ve bias değerleri ve genel eğrisellik değerleri ziyadesiyle kabul edilebilir sınırlar içindedir. Genel eğrisellik değerleri 0.5277 kritik seviyesinin oldukça altında hemen hemen sifıra yakındır. Diğer bir anlatımla doğrusalılık yakalanmıştır.

Birinci fonksiyon ilk altı irdelemede yakınsama noktasında denge değerlere ulaşmıştır. Burada isabetli alınan başlangıç tahmin değerleri etkili olmuştur. Fazladan yeni parametreler üretmek gerekli olmamıştır. Bu fonksiyona göre ulaşılacak maksimum nüfus seviyesi (K), 94 milyon olarak bulunmuştur. Alt asimptot 9,5 milyon kişi ve başlangıç nüfusu 13,5 milyon kişidir (1925). 9,5 milyon ve altı Cumhuriyet öncesi olarak kabul edilmelidir. Birinci Savaş ve Kurtuluş Savaşından sonra 1925 yılında 13,5 milyon nüfustan hareketle 2015 yılında 78,1 milyona gelinmiştir. Yaklaşık 16 milyon kişilik gidilecek bir yol vardır. Fonksiyonun içsel büyüme oranı %4,93'tür. Temsil ettiği dönem itibariyle kişi başına sabit büyümeyi gösterir. Bu fonksiyon ve devamı olan v parametrelili Wikipedia genel fonksiyonu (buraya almadık) tahminlerde bizi çok uğraştırdı, istenen istatistiklere ulaşmak kolay olmadı, buna rağmen elde edilen sonuçlar ilginç düzeydedir. Nihai nüfus tahminleri (K) arasında en düşük tahmini lojistik eğri vermiştir. Bu modele ait tahminler ve gerçek sayım sonuçlarını veren grafik 8 aşağıdadır. Grafiğin tetkikinden temsiliyetin ne kadar iyi olduğunu görmek mümkündür. %95 tahmin aralığının çok dar olması güveni artırmaktadır. Modelin bir özelliği fonksiyonun simetrik bir yapıya sahip olmasıdır. Bu durumda birinci ve ikinci yarı simetrik olunca varılacak taşıma ka-

pasitesinin düşük bulunma ihtimali vardır. Nüfus gelişiminin simetrik olmasını bekleyemeyiz ve iddia edemeyiz. Bu nedenle lojistik fonksiyonun 94 milyonluk nihai nüfus tahminini ihtiyatla karşılamak istiyoruz ve düşük buluyoruz. Eğrideki simetri özelliğini kaldıran Ricketts/Head Fonksiyonunda bu durumun düzeldiğini taşıma kapasitesinin 115 milyona ulaştığını göreceğiz. Keza aşağıdaki Gompertz Fonksiyonlarında da bu görüşümüzü teyit eden sonuçlar almış bulunuyoruz.

Hata kareleri toplamı $4.71E+12$ 'dir. Kareler toplamı içindeki payı %0.0121 mertebindedir. Fonksiyonun temsil kabiliyeti yüksektir. Ancak elde edilen hata kareleri toplamı açısından Türkiye nüfusunun analizinde Ricketts/Head Fonksiyonlarının sonuçları itibariyle üstünlüğü tartışılmaz.

Lojistik eğriler içinde birinci ve ikinci türevi alınması kolay olduğundan mutlak ve nispi büyüme analizi de bu fonksiyon üzerinden yapılmıştır. Şimdi mutlak ve nispi büyüme analizine geçerek rakamlara ve grafiklere bakalım. En büyük mutlak artış bir milyon kırk bin ile 1985 sayımındadır. 1986'den itibaren miktarlar düşmektedir. Fonksiyonun dönüm noktası (inflection point) formülünde $t_{inf} = T + \frac{1}{r} \ln \left[\frac{K-L-Y_0}{Y_0} \right]$ değerleri yerine koyarsak, $1952.7957 + (1/0.0493154) * \ln((94000000-9529842.7-13538351)/13538351) = 1986.37937$ tarihi olarak bulunur. Nitekim ikinci türev de bu tarihte eksiye dönmektedir. Dönüm noktasının nüfus olarak karşılığı: $94,000,000 + 9,529,842 = 103,529,842/2 = 51,764,921$ kişidir. Yukarıda bulduğumuz 1986.38 rakamını fonksiyonda yerine koyduğumuzda çıkan rakam da 51,765,625 kişidir (fark 704 kişi).

Nispi büyümede ise tepe noktası %2,55 ile 1965 yılındadır. 1925'te %1,37 olan büyüme oranı 1965'te tepeyi geçtikten sonra 2015 yılında %1'in altına kadar inmiştir. Bu yapıyla nüfus olgunluk ve büyümenin son dönemine girmiştir. Ancak büyüme durmuş değildir. Bu büyüme rakamları çalışma sonucu elde edilen fonksiyon üzerinden hesaplanmaktadır, sayım sonuçlarından değil hatırlatalım.

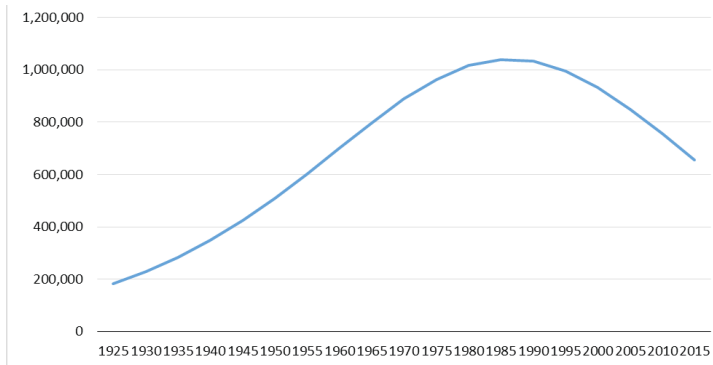
Tablo 6

Verhulst Lojistik Fonksiyonuna Göre Türkiye Nüfusu Mutlak ve Nispi Büyüme Rakamları

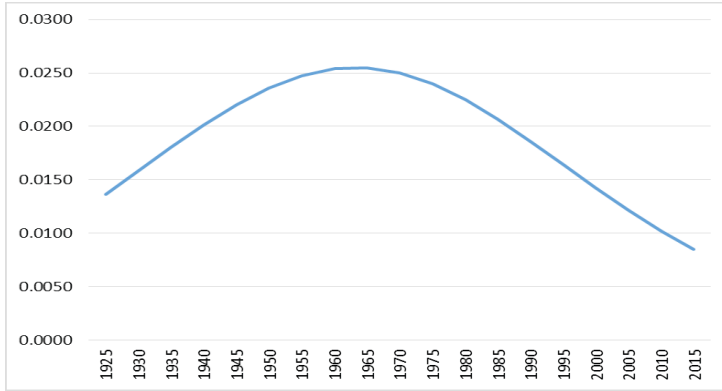
Sayım sırası	Sayım yılları	Türkiye nüfusu (Lojistik tahmin)	Yıllık mutlak büyüme miktarı (birinci türev)	Yıllık nispi büyüme oranı (Birinci türev/nüfus)	Türevdeki artış miktarı (ikinci türev)
1	1925	13,434,327	183,651	0.0137	8,220
2	1930	14,462,412	229,047	0.0158	9,976
3	1935	15,740,332	283,755	0.0180	11,936
4	1940	17,316,919	348,621	0.0201	14,023
5	1945	19,244,057	423,968	0.0220	16,099
6	1950	21,573,217	509,245	0.0236	17,952
7	1955	24,350,123	602,638	0.0247	19,291
8	1960	27,607,500	700,714	0.0254	19,765
9	1965	31,356,462	798,256	0.0255	19,022
10	1970	35,577,862	888,447	0.0250	16,792
11	1975	40,215,771	963,549	0.0240	12,994
12	1980	45,175,621	1,016,071	0.0225	7,818
13	1985	50,329,018	1,040,216	0.0207	1,744
14	1990	55,525,580	1,033,163	0.0186	-4,537
15	1995	60,609,849	995,746	0.0164	-10,284
16	2000	65,439,439	932,250	0.0142	-14,885
17	2005	69,900,056	849,411	0.0122	-17,987
18	2010	73,914,289	755,001	0.0102	-19,526
19	2015	77,443,262	656,462	0.0085	-19,683

Tablodaki hesaplamaları sadece sayım yılları için yaptık. Bu zorunlu değildi, 1925'ten 2015'e herhangi bir yıl için hatta buçuklu bir yıl için bile tahmini nüfusu, mutlak ve nispi büyüme hesaplarını rahatlıkla yapabiliriz. Fonksiyon üzerinden bunu taşıma kapasitesine kadar da götürebiliriz. Fonksiyonel büyüme modelleri bu açıdan araştırmacılara büyük yararlar sağlar.

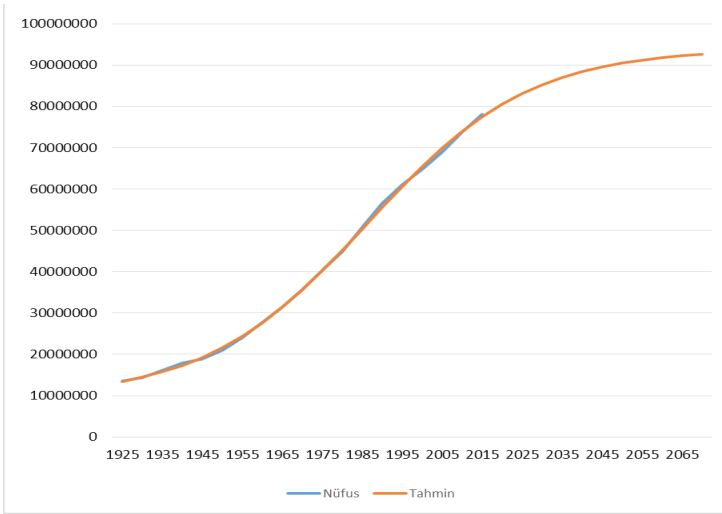
İlginç olan grafik aşağıda verdiğimiz nüfus, tahmin ve projeksiyon durumunu gösteren dokuzuncu grafik. Burada yıllara ait tahminler gerçek rakamlarla örtüşmektedir. Önemli olan 2015'ten sonraki projeksiyonun kapasite sınırına yaklaşım şekli ve zamanıdır.



Grafik 7. Türkiye nüfusu yıllık mutlak büyüme miktarları (lojistik eğri, birinci türev).

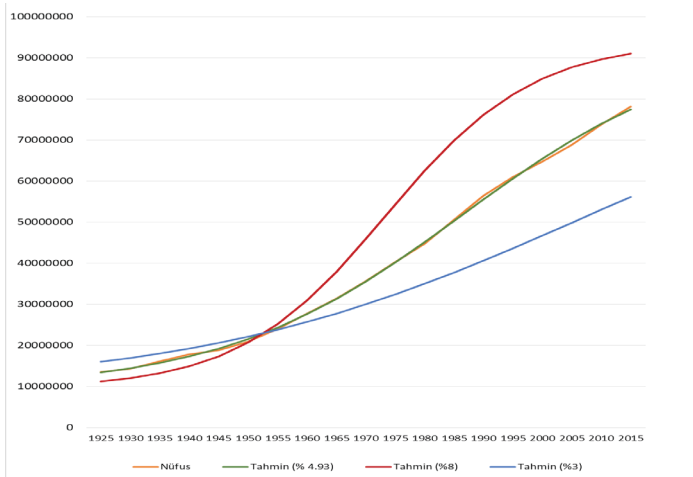


Grafik 8. Türkiye nüfusu yıllık nispi büyüme oranları (lojistik eğri, birinci türev/nüfus).



Grafik 9. Verhulst lojistik fonksiyonu: Türkiye nüfusu, tahminleri ve projeksiyonları.

Aşağıdaki onuncu grafikte içsel büyüme oranının büyüme fonksiyonlarında ne anlama geldiğini açıklamak için nüfus verilerimiz üzerinden bir benzetim yaptık. Grafikteki turuncu çizgi gerçek nüfus rakamları, onu izleyen yeşil çizgi de fonksiyonel tahminlerdir. Yeşil çizgiye göre içsel büyüme lojistik eğride %4,93'tür. Aynı dönemde aynı formülde diğer değerler aynı iken içsel büyümenin %8 ve %3 olması durumlarında oluşacak nüfus büyüme eğrilerini sırasıyla kırmızı ve mavi olarak ürettik. Dört eğri yaklaşık 1950-55 arasında aynı noktada kesişmektedir. Büyüme oranına göre taşıma kapasitesine ulaşım zamanı artmakta veya azalmaktadır. %8 büyüme gerçekleşmiş olsaydı bugün 90 milyona ulaşmış olacaktık, %3 büyümede ise henüz 60 milyonun altındaydık, %4,93 ile 80 milyona yaklaşmış durumdayız. Büyüme oranındaki değişimin fonksiyon üzerindeki etkilerini bu ara incelemede görmek mümkündür. Keza fonksiyonda yer alan diğer parametre değerleri de eğri üzerinde benzer etkiler yapmaktadır.



Grafik 10. Türkiye nüfusu 1925-2015, lojistik fonksiyonuna göre büyüme senaryoları.

Lojistik Fonksiyonlar.

Ricketts/Head Asimetrik Büyüme Fonksiyonu.

Fonksiyon 2'nin değerlerini yerine koyarsak:

$$Y_{(t-1940)} = 7000000 + \frac{(115000000 - 7000000)}{(1 + f_t A + (1 - f_t) B)^{1/3.6006}} \quad (9)$$

$$A = 57090.9e^{(-0.1219(t-1940))} \quad (9a)$$

$$B = 4507.06e^{(-0.1219(t-1940))} \quad (9b)$$

$$f_t = \frac{1}{1 + \bar{C}_f e^{(-0.1219(t-1940))}} \quad (9c)$$

$$\bar{C}_f = \frac{2 \cdot 57090.9 + 4507.06}{|57090.9 + 4507.06|} \quad (9d)$$

elde edilir.

Ricketts ve Head (1999) tarafından kalp ve kalp damarlarındaki ölçümler için geliştirilen ve BARO5 olarak adlandırılan büyüme formülünü ilginç bulduğumuz ve alometrik katsayının da ilavesiyle altı parametrelilik olarak Türkiye nüfusu büyüme ölçümlerinde iyi sonuçlar aldığımız için bu bölümde paylaşmayı uygun gördük. BARO5 formülü esasen iki safhalı bir lojistik büyüme eğrisidir ve yardımcı bir lojistik büyüme formülüyle ağırlıklar her iki safha arasında dağıtılmaktadır. Richards eğrisinden aldığımız alometrik katsayının ilavesiyle Türkiye nüfus fonksiyonunun tahmininde başarılı sonuçlar elde ettik. Formülün en önemli özelliği lojistik eğrinin taşıdığı simetrik özelliğini aşarak fonksiyonu asimetrik hale getirip verilere uygunluk sağladığı yüksek başarısıdır. Ricketts ve Head'ın (1999) yazdıkları yazının başlığından da konuya yaklaşımları hemen fark edilir: "A five-parameter logistic equation for investigating asymmetry of curvature in baroreflex studies". Çalışmalarında simetrik yapıların çıkardığı sorunları aşmak için bu modeli geliştirdikleri başlıktan anlaşılmaktadır¹⁸. Bizim çalışmamızdaki ilk Ricketts/Head Fonksiyonu sonuçlarında hata kareleri toplamı klasik lojistik eğrisine göre neredeyse yarı yarıya düşerek $2.46E + 12$ olarak bulunmuştur. Kareler toplamındaki payı %0.0063 olarak ziyadesiyle ihmal edilebilir düzeydedir. %95 güven sınırları iyice daralarak fonksiyonun temsiliyeti artmıştır. Alt asimptot 7 milyon olurken nüfusun ulaşacağı taşıma kapasitesi asimetrik yapının verdiği esneklikle 115 milyona çıkmıştır. Fonksiyonun içsel büyüme oranı 0.1282'dir. Oranın yüksek olması yapısından kaynaklanmaktadır. Bu oranı değerlendirirken alometrik katsayının 3.6006 olduğuna da dikkat etmek gerekir. İçsel büyüme oranının üzerinde (1/v) şeklinde alometrik katsayı yer almaktadır. Dolayısıyla alometrik katsayı büyümede etkindir. Keza fonksiyona sosyal gelişmişlik endeksi değişkenini ilave ettiğimizde nüfus büyümesi fonksiyonunun iki bağımsız değişkenle birlikte hata kareleri toplamı $1.83E + 12$ 'ye kadar gerilemiştir. Modelin kareler toplamı içindeki payı %0.00469 düzeyindedir. Sosyal gelişmişlik endeksi nüfus büyümesini açıklamada etkindir. Taşıma kapasitesi yine 115 milyondur, büyüme katsayısı ilkinin yakınıdır. İki bağımsız değişkene "sürekli ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi" ilave ettiğimizde hata kareleri toplamı $1.01E + 12$ ile modelin kareler toplamı içindeki payı %0.002593 olmuştur (son fonksiyon). İncelediğimiz fonksiyonlar içinde en küçük hata kareleri toplamını veren budur. Bu nedenle hiçbir fonksiyonda izah edilemeyen hata kareleri üzerinde durmaya değer görmedik. SAS NLIN çıktısındaki grafik tetkik edildiğinde gerçek nüfus çizgisinin ve tahminlerin üst üste gittiğini görmek mümkündür. Nüfus rakamlarının milyonlu mertebelerde olduğu dikkate alınır hata kareleri toplamı rakamının büyük olmadığı görülür. İlâveten diğer istatistiksel testlerden de iyi sonuçlar alınmıştır. Bu fonksiyonda 1925-2015 Türkiye nüfus gelişiminin fonksiyonel analizine göre varacağı seviye ilk

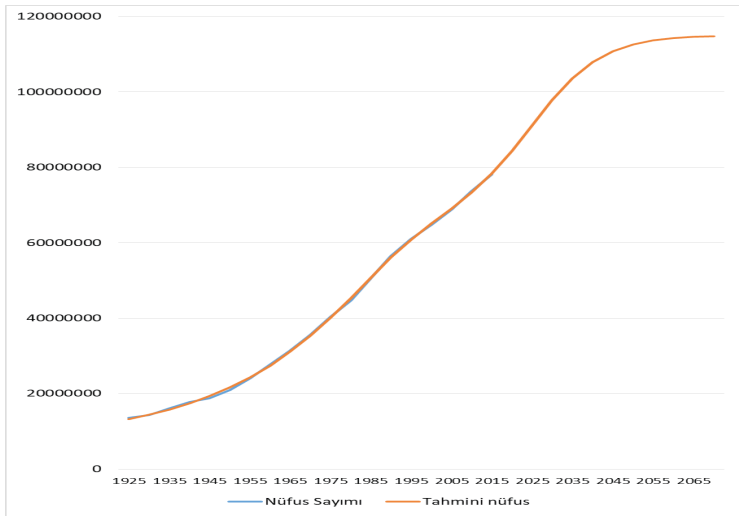
18 Anladığım bir konu değil ama herhalde yazarlar kalp ve kalp damarlarındaki ölçümlerde lojistik fonksiyonun simetrik yapısının getirdiği sorunlarla çok uğraşmış olmalı. Tıbbi olaylar gibi sosyal olaylarda da simetrinin oluşması kural değil istisnadır. Bu açıdan asimetrik fonksiyon bir ilerleme olarak kabul edilmelidir. Ancak neden Gompertz Fonksiyonunu kullanmadıkları da merakıma mucip olmuştur.

etapta 115 milyon kişidir. Aşağıda bu rakamların Gompertz Fonksiyonu tarafından da teyit edileceğini göreceğiz. Sonuç olarak Ricketts/Head Fonksiyonunun nüfus büyümesini ve 115 milyon kişilik taşıma kapasitesini açıklamada daha güvenli ve gerçekçi olduğunu belirtelim.

Bu fonksiyon ile ilgili olarak üzerinde durulması gereken teknik bir ayrıntı Q katsayıları (üstel $-EXP-$ fonksiyon çarpanları) ve istatistik çalışmada aldıkları değerlerdir. Bu iki çarpan Q_1 ve Q_2 eşit olsaydı fonksiyonun simetrik bir yapıya sahip olduğunu söyleyecektik. Ancak çalışmamızda bu katsayılar farklı, bu da Türkiye nüfusunun eğrisinin asimetrik durumunun ifadesidir. Esas fonksiyondaki dağıtım fonksiyonunu f_t ile çarpılan Q_1 , tahmin eğrisinin üst kısmının çarpanı ve belirleyicisi, $(1-f_t)$ ile çarpılan Q_2 ise eğrinin alt kısmının çarpanı ve belirleyicisidir. İlk fonksiyonumuzda Q_2 8.4 (logaritmik) olarak bulunmuştur. Bu rakamdan aşağıya veya yukarıya doğru, 1 'e doğru veya 16 'ya doğru, uzaklaşmalar rakamsal nüfus tahmin eğrisini gerçek nüfus rakamları eğrisinden aşağıya doğru uzaklaştırmaktadır. 8,4 olduğu zaman iki eğrinin alt kısmı çakışmaktadır. Keza Q_1 'in aldığı değerler de eğrinin üst kısmından başlayarak eğriyi etkilemektedir. Bu değer 1 'e yaklaştıkça eğrinin üst kısmı yukarı çıkmakta, $10,95$ 'den yukarı çıktıkça da tahmin eğrisi nüfus sayım eğrisinin altına yatay eksene doğru itilmektedir. İki safhalı tanımlamanın sağladığı bu esnekliklerle istatistik çalışmada bulunan değerler, hata kareleri toplamını önemli ölçüde azaltarak temsiliyeti artırmaktadır. Çalışma yaptığımız iki safhalı her üç fonksiyonda da katsayıların toplam içindeki payları Q_1 ve Q_2 için sırasıyla %93 ve %7'dir. Diğer bir deyişle her üç fonksiyon da asimetrik yapıyı aynı oranda taşımaktadır. Bu husus çalışılan modelin matematik üstünlüğüdür.

Üç fonksiyonda da alometrik katsayı sırasıyla 3,6; 3,4 ve 3,4 olarak bulunmuştur. Burada da bir tutarlılık vardır. Rakamın büyümesi tahmin eğrisini yukarıya atmakta küçülmesiye aşağıya doğru çekmektedir. Alometrik katsayının değeri bu fonksiyonda içsel büyüme oranını da etkilemektedir. Fonksiyonun başarı şansını artırdığı için bu katsayıyı fonksiyona ilave etmeyi faydalı gördük ve istatistiksel testlerden de olumlu sonuçlar aldık. Alometrik katsayıyı fonksiyondan çıkardığımız zaman yaptığımız nüfus fonksiyonu parametreleri tahmin denemelerinde başarılı olmadık, bu şekilde alometrik katsayının kuvvetli bir kontrol gücü olduğunu alometrik katsayı çıkarıldığı zaman SAS NLIN yönteminin bir veya birkaç kıstasının karşılanmadığını gördük.

11 numaralı grafikte nüfusun taşıma kapasitesi olan 115 milyona ulaşması durumunda eğrinin alacağı şekli görmekteyiz. Asimetrik yapı eğrinin tamamı gözle tetkik edildiğinde dahi görülmektedir.



Grafik 11. Ricketts/Head Fonksiyonu: Türkiye nüfusu, tahminleri ve projeksiyonları.

Not: Fonksiyon tahmini eğrisi 1990 yılında oluşan kambur yükselmeyi de başarıyla yakalamıştır.

Çalışmamın sonuna gelirken okuduğum ve ilgimi çeken yazıdaki (Chukwu ve Oyamakin, 2015) yaklaşımı buraya taşımanın getireceği sonuçları merak ettik ve bu amaçla Ricketts/Head Fonksiyonu üzerinden iki deneme yaptık. Ters hiperbolik sinh değişkenini ikincil değişken olarak fonksiyona ilave ederken sosyal gelişme endeksinin dışarı çıkardık, sonra buna sürekli ağırlıklandırılmış en küçük kareleri dâhil ettik. Aldığımız iki ayrı sonuç ta SAS NLIN kıstaslarının tamamını karşıladı. Bu açıdan bir sorun yoktur. Fonksiyonların büyüme değerleri öncekilerle hemen hemen aynıdır. Bu iki fonksiyonun öngördüğü nihai nüfus 120 ve 115 milyondur. Hata kareleri toplamı ziyadesiyle kabul edilir sınırlar içindedir ve fonksiyona boyut getirmiştir. Türkiye nüfus çalışmasında katkıları açıktır ve sonuç başarılıdır. Bu değişkenin lojistik büyüme eğrilerinde her olayda ayrı ayrı denenmesinde yarar vardır.

Gompertz Büyüme Fonksiyonları.

İstatistiksel sonuçların (fonksiyon 1) denkleme konmuş hali aşağıdaki gibidir.

$$Y_{(t-1950)} = 13538351 + (113800000 - 13538351)e^{-2.5773e^{(-0.0271(t-1950))}} \quad (10)$$

Gompertz Büyüme Fonksiyonu çalışmamızda başarılı sonuçlar vermiştir. İlk Gompertz Büyüme Fonksiyonuna göre hesapladığımız içsel büyüme oranı %2,71'dir, buna göre nüfus 113,8 milyona ulaşacaktır. Halen, 2015'te 78,1 milyonda isek yolun %68,6'sı gidilmiş demektir. Yaklaşık 35 milyon kişilik bir artış olması beklenmektedir.

Ek 4'teki Gompertz Fonksiyonuna ait çıktıda elde edilen sonuçlar istatistik olarak tam güvenlidir. İsabetli alınan başlangıç tahmin değerleriyle sekiz etapta iterative

Tablo 8

Gompertz Fonksiyonu Mutlak ve Nispi Büyüme Rakamları

Sayım sırası	Sayım yılları	Türkiye nüfusu (Gompertz tahmin)	Yıllık mutlak büyüme miktarı (birinci türev)	Yıllık nispi büyüme oranı (Birinci türev/nüfus)	Türevdeki artış miktarı (ikinci türev)
1	1925	14,167,592	86,385	0.006097	9,521
2	1930	14,734,072	143,372	0.009731	13,309
3	1935	15,633,162	219,377	0.014033	17,035
4	1940	16,956,815	312,674	0.018439	20,134
5	1945	18,781,490	418,857	0.022302	22,122
6	1950	21,156,239	531,523	0.025124	22,697
7	1955	24,095,288	643,338	0.026700	21,788
8	1960	27,576,238	747,165	0.027095	19,540
9	1965	31,543,519	837,000	0.026535	16,250
10	1970	35,915,658	908,552	0.025297	12,292
11	1975	40,594,511	959,449	0.023635	8,049
12	1980	45,474,705	989,132	0.021751	3,857
13	1985	50,451,997	998,550	0.019792	-21
14	1990	55,429,788	989,741	0.017856	-3,410
15	1995	60,323,545	965,425	0.016004	-6,214
16	2000	65,063,229	928,625	0.014273	-8,403
17	2005	69,594,070	882,383	0.012679	-9,998
18	2010	73,876,083	829,545	0.011229	-11,053
19	2015	77,882,754	772,636	0.009921	-11,639

süreç tamamlanmış, iyi t değerleri, skewness ve bias ölçüleri elde edilmiştir. Genel eğrisellik sonuçları sıfıra yakındır. Hata kareleri toplamı $4.80E + 12$ lojistik eğrinin-kine ($4.71E + 12$) yakındır. Tüm Gompertz fonksiyonlarında hata karelerinin toplam kareler içindeki payı, üzerinde durulmayacak kadar küçüktür. Birçok araştırmada (Fekedulegn ve Colbert, 1999) Gompertz Büyüme Eğrileri lojistik eğrilerden daha düşük büyüme oranları vermektedir. Burada da durum aynıdır. Lojistik eğride içsel büyüme %4,93 iken Gompertz eğrisinde bu değer %2,71 olarak bulunmuştur. Buna karşılık taşıma kapasitesi (üst asimptot) 113,8 milyon kişidir.

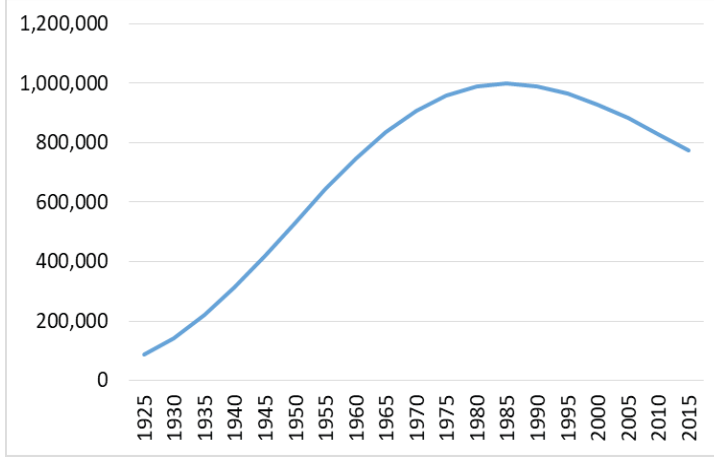
Tablo 7
Gompertz Büyüme Fonksiyonlarına Ait İstatistiksel Değerler

Fonksiyonun adı	Semboller	Fonksiyon 1	Fonksiyon 2	Fonksiyon 3	Fonksiyon 4
		Gompertz Büyüme Fonksiyonu	Gompertz Büyüme Fonksiyonu, iki bağımsız değişken ve sürekli ağırlıklandırılmış	Gompertz Hiperbolik Büyüme Fonksiyonu	Gompertz Büyüme Fonksiyonu, sürekli ağırlıklandırılmış
SAS / F ile referansı		Turkpop2b.sas	Turkpop2c.sas	Turkpop2arsinh.sas	Turkpop2arsinhwe.sas
Ek referansı		Ek 6	Ek 7	-	Ek 8
Dışsal Parametreler					
Temel yıl	T	1950	1950	1984	1984
Üst asimptot (taşıma kapasitesi)	K	113.800.000	115.000.000	115.000.000	115.000.000
Başlangıç miktarı	N	13.538.351	13.538.351	13.000.000	12.500.000
İçsel Parametreler					
Üstel fonksiyon çarpanı	Q	2.5773	2.6770	1.0273	1.0186
İçsel büyüme oranı	r	0.0271	0.0261	0.0247	0.0244
Sosyal gelişme katsayısı endeksi	s	-	0.0234	-	-
İnvers hiperbolik sinh katsayısı	c	-	-	0.0107	0.0119
Logaritmik değerler ln(Q)	Qe	-	0.9847	-	-
Logaritmik değerler ln(r)	re	-	-3.6443	-	-
Bağımsız değişkenler		Zaman	Zaman	Zaman ve sosyal gelişme endeksi	Zaman ve sosyal gelişme endeksi
Hata kareleri toplamı	ESS	4.797E + 12	2.763E + 12	3.0001E + 12	1.347E + 12
Toplam kareler toplamı	TSS	3.895E + 16	2.918E + 16	3.895E + 16	2.491E + 16
Hata kareleri toplamı / Toplam kareler toplamı (onbinde)		1.2316	0.9469	0.7705	0.5407
F-değeri	F	69,010.70	56,322.70	69,207.30	98,647.70

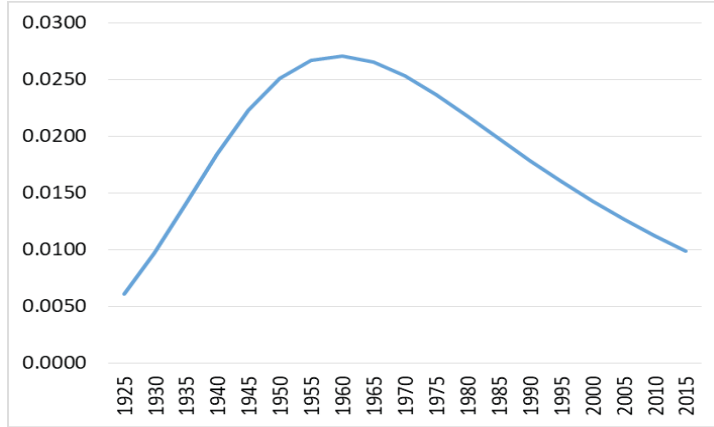
Şimdi Gompertz Büyüme Fonksiyonunda mutlak ve nispi büyüme rakamları üzerinde duralım.

Mutlak büyümenin en büyük olduğu yıl 1984'ün sonudur (lojistikte 1986.38), ikinci türev de 1985'te (84'ün sonu gibi) sıfır noktasındadır. Dönüm noktası $t_{inf} = \frac{rT + \ln(Q)}{r}$, formülden 1984.9711 (zaman) olarak bulunur. Bu rakamı formülde yerine koyarsak nüfus karşılığı 50.421.456 kişi olarak bulunur. Gompertz Büyüme Fonksiyonu simetrik olmadığı için bu rakamın tam ortada olma zorunluluğu yoktur. Nitekim taşıma kapasitesiyle başlangıç nüfusunu toplayıp ikiye böldüğümüzde çıkan rakam 63.669.176 dönüm noktası nüfus rakamından tamamen farklıdır. Gompertz eğrisinin dönüm noktası gerçek rakamlara daha iyi uyum göstermektedir.

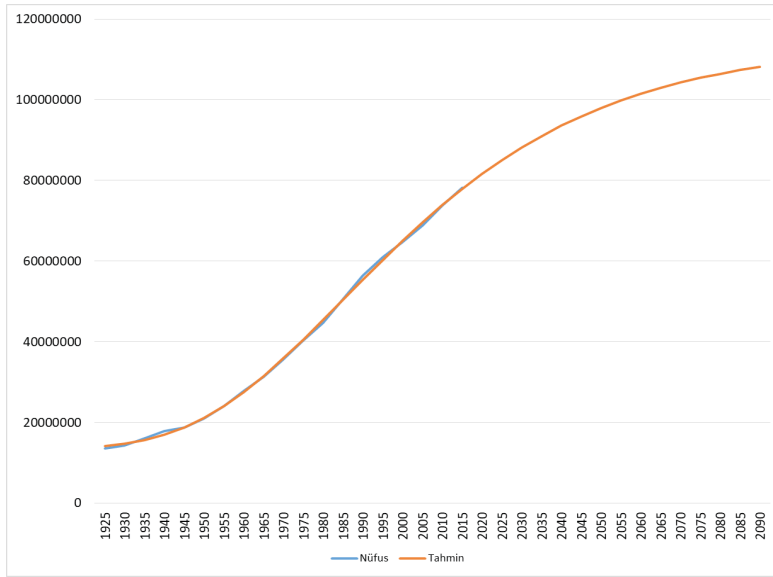
Nispi büyüme ise 1960 yılında %2,7 ile en üst seviyeye çıktıktan sonra sürekli gerileyerek 2015'te %1'in hemen altına gelmiştir. Tablo ve ilgili grafikler toplam olarak incelendiğinde yukarıda işaret ettiğimiz büyümenin ilk üç döneminin tamamlandığı rahatlıkla görülür. Bundan sonra da büyüme devam edecektir. Ancak sosyal değişim ilk üç dönemden daha az olacaktır.



Grafik 12. Gompertz Büyüme Fonksiyonu mutlak büyüme rakamları (birinci türev).



Grafik 13. Gompertz Büyüme Fonksiyonu nispi büyüme rakamları (birinci türev/nüfus).



Grafik 14. Gompertz Büyüme Fonksiyonu: Türkiye nüfusu, tahminleri ve projeksiyonları.

14 numaralı grafikteki projeksiyondan nüfus gelişiminin daha ağır ilerleyeceği dördüncü safhanın nasıl olacağını görmek mümkündür.

Bu bölümdeki ikinci Gompertz fonksiyonu, birinciye sosyal gelişme endeksi ve sürekli ağırlıklandırma yönteminin ilavesiye bulunmuş sonuçları kapsamaktadır. Taşıma kapasitesi, nihai nüfus 115 milyon kişi, içsel büyüme %2,61'dir. En önemlisi bu yöntemin uygulanmasıyla hata kareleri toplamı $2.76E + 12$ 'ye gerilemiş ve temsiliyet ve uyum artmıştır. Ancak bu rakamla bile tüm Ricketts/Head Fonksiyonlarının gerisinde kalmaya devam etmektedir.

Daha önce izahını yaptığımız hiperbolik büyüme fonksiyonunun şimdi istatistik sonuçlarını ele alacağız. Hiperbolik Gompertz Fonksiyonu da çalışmalarımızda nüfus sayım sonuçlarımız için başarılı olmuştur, gerekli istatistik testleri tamamlamıştır. Bu çalışmaların ikisinde de taşıma kapasitesi 115 milyon kişi, içsel büyüme oranı %2,4 olarak bulunmuştur. Daha da önemlisi, hata kareleri toplamının sırasıyla $3.00E+12$ ve $1.35E+12$ olarak ciddi gerilemeler göstermesidir. Özellikle Gompertz Fonksiyonu bir çalışmaya uygulandığında hiperbolik değişken ihmal edilmemeli ele alınan olayın niteliğine göre sonuçlarına bakılmalıdır. Tüm araştırmacılar hem fikirdir ki tek doğru fonksiyon ve tek doğru bağımsız değişken yoktur. Sabırla, ilgili olan fonksiyonlar değişkenleriyle birlikte gözlemler üzerinde denenmek zorundadır. Biz bu çalışmada bunu yaptık, yazımızda yer verdiğimiz dışında üzerinde çalıştığımız ama sonuçlarını ilginç bulmadığımız fonksiyonları buraya dâhil etmedik.

Yorumlar

İki temel büyüme fonksiyonu ve versiyonlarıyla birlikte on denemeyi buraya dâhil ettik. 1925-2015 dönemi için elimizde on dokuz yıla ait veri bulunan Türkiye nüfus sayım istatistiklerini kullandık, uyguladığımız fonksiyonların bu verilerle matematiksel modellemeyi başardığını düşünüyoruz. Denediğimiz başka matematik fonksiyonlar da oldu, ancak zaman ve amacımıza uygun olarak bu kadarını yeterli gördük. Keyfiyetin bu noktadan itibaren araştırılması gereken başka boyutları da vardır. Diğer ülke insan nüfusları için yapılmış çalışmalar ile karşılaştırmalar, şehirselleşme nüfus gelişimleri, kullanılabilir coğrafyanın tanımı ve nüfus ilişkileri, tarımsal araziler ve nüfus yayılmaları, tıbbi teknoloji ve ömür, ulusal gelir artışı ve sağladığı yaşamsal önem yeni araştırma konuları olarak sayılabilir. Adam Smith ‘Ulusların Zenginliği’ni yazarken insan ve ekonomi ilişkisi içinde zenginliğin getireceklerini ekonomi teorisi için esas almıştı. Kitabın adından başlayarak bu zenginliklerin nüfusu ayakta tutacağını çok iyi biliyordu. Zenginlik toplumların kapasite sınırıdır. Zenginliğin kaynakları ise işbölümü, sanayileşme üretim vs.dir. Konunun bu noktaya kadar gelmesi sürpriz değildir. Konumuz nüfus ama iktisat ile karşılaşmamak mümkün değil. Nüfusu sınırlayan kaynaklar ve nüfus ilişkisi esasen iktisadın ana konusudur. Sayın hocam Gülten Kazgan’ın İktisadi Doktrinler Tarihi’ne bakarsak iktisatçıların konuyu çokça irdelediklerini görürüz.

Lojistik eğrilerde %4,93 ve %12 içsel büyüme oranları elde ettik. Tanımladığımız taşıma kapasitesi kavramına göre nüfusumuzun 94, 115 ve 120 milyona kadar artabileceğini belirledik. Gompertz eğrilerinde %2,5 dolayındaki içsel büyüme oranlarıyla nüfusun 115 milyon olacağını gördük. Matematik modellemenin bize verdikleri bunlar. Taşıma kapasitesi daha az olur mu hayır olmaz, daha fazla olur mu evet, %3-5 fazla olabilir. Girişte saydığımız faktörlerin elverdiği ölçüde artışlar olabilir. Şüphesiz bugünden yarına değil. Yukarıda verdiğimiz taşıma kapasitesi tahminleri önümüzdeki yarım asrı kapsamaktadır. Bu çerçeve elli yıl sonra tartışılrsa daha doğru olur. Avrupa’nın Hollanda, Belçika, Danimarka, Avusturya, İsviçre ve Norveç vs. gibi nüfus sınırlarına ulaşmış eski ve yerleşik toplumlarını incelemekte yarar vardır. Bu ülkeler geçmiş yüzyıllarda nüfus ta ihraç etmiştir, bugün ise göç almak zorunda kalmaktadırlar. Bugün kendi özgün nüfuslarının sınırlarındadır, ancak kalitatif olarak toplumsal yükselişe devam etmektedirler. Üzerinde çalışma yapmadan tartışmayı daha fazla açmayı uygun bulmuyoruz. Bu safhada yukarıda tanımlanan modellerin tartışılmasını ve bu modellerin ortaya koyduğu taşıma kapasite sınırlarını değerlendirmek çok daha anlamlıdır.

Ele aldığımız fonksiyonların iki özelliği vardır. Birincisi uygulandıkları veriyi temsil etme kabiliyetleridir. İkincisi ise geleceğe dönük tahminlerde etkin olup olmadıklarıdır. Fonksiyonların Türkiye nüfusunu temsil kabiliyetini ispatlarken kullandığımız yöntem istatistiğin ileri bir safhasını teşkil eden doğrusal olmayan denklemlerin ilgili bilgisayar yazılımlarıyla test sonuçlarını elde etmektir. Yaptığımız

çalışmayla bunu başardığımızı düşünüyorum. Verhulst Lojistik Fonksiyonu ve devamı olan iki safhalı Ricketts/Head Fonksiyonu, Gompertz Büyüme Fonksiyonu ve bunların matematiksel özellikleri Türkiye nüfusunun analizinde beklenen sonuçları vermiştir. 1925-2015 dönemindeki doksan yıla ait on dokuz sayım verisi bu amaç için yeterli gözlem sayısıdır. Matematiksel temsiliyet ve istatistiksel ispattan sonra ele alınan geleceğe dönük tahminlerde de başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Türkiye nüfusunun 115-120 milyon seviyesinde karar kılması beklenmektedir. Esasen burada bu nicel rakamların araştırmacı açısından tek başına bir önemi yoktur. Devlet politikaları oluşturulurken kullanılırsa bir anlam ifade eder. Bizi ilgilendiren konunun teknik yönleridir. Araştırmacı açısından yapılması gereken ise 2020-2040 dönemi sayım sonuçları elde edildiğinde modellerin yeniden çalıştırılması ve bu çalışmayla olan farkların ortaya konmasıdır.

Bu yazıyı hazırlarken benzer bir çalışmaya internet taramalarında Türkiye kaynaklarında rastlamadık. Vardır ve ben rastlamamış da olabilirim. Amerika'ya ait Raymond ve Reed'in (1920) çalışmasından sonra 2011 tarihli Joseph M. Mahaffy'ye (2011) ait bir çalışmaya internet kaynaklarında rastladık. Yazar ayırık zaman modellemelerine dayanarak Birleşik Devletler için nüfus tahminlerinde bulunmaktadır. Üç ayrı yöntem göre: Malthusgil, bağımsız olmayan-Malthusgil ve lojistik modellere göre Birleşik Devletler nüfusunu elli yıl sonrası için sırasıyla 602,3, 378,4 ve 358,7 milyon kişi olarak tahmin ediyor (2010 sayımı 308,7 milyon kişi). John H. Mathews (1992) iki ayrı lojistik fonksiyona göre Birleşik Devletler nüfus tahminini elli yıl sonrası için 465,3 ve 499,1 milyon kişi olarak veriyor. Her iki çalışmada da uygulanan istatistiksel testlerin sonuçlarını göremedik. Yeterince tanımadığımız bir nüfusa ait çalışmaların ayrıntılı istatistik sonuçlarına da sahip olmadığımız için yorumda bulunmuyoruz, ama çabaları ilgi ve saygıyla karşılıyoruz. Aşağıda Amerika bahsinde konuyu ele alacağız. Umarım Türkiye'de de bu manada çalışmalar yapılır ve görüp okuruz.

Araştırmamızı sonlandırırken sonraki bölümde asırlık bir Amerikan hikâyesini burada özetlemeyi uygun bulduk. Hâlâ sıkılmadıysanız okumanızı öneririm. Yüz yıl önceki Amerika vizyonu için vaktim yok(!) diyenler, başka konularda tekrar görüşmek üzere, geldiğiniz için teşekkürler, hoşça kalın.

'Bir zamanlar Amerika'

Raymond Pearl (1879-1940), Johns Hopkins Üniversitesinde biyoloji profesörü, biyometri ve yaşam istatistikleri uzmanı ve Lowell Reed (1886-1966) aynı üniversitede biyo-istatistik uzmanı ve yönetici. Biyoloji, biyometri ve çevrebilim alanlarında uzman olan bu iki değerli bilim adamının konumuz açısından önemi ise beraberce 1920 yılında Amerika nüfusu ile ilgili olarak yazdıkları makale (Pearl ve Reed, 1920), makale ilklerden biri. Bugün dahi ilginçliğini koruyor ve referans olarak anılıyor. Yazarlar mükemmel bir İngilizce üsluba sahipler. Yazıyı henüz dün yazılmış gibi

okuyabilirsiniz. Yazının başlığı: “On the Rate of Growth of the Population of the United States Since 1790 and its Mathematical Representation”, ve ilk cümlesi şöyle:

Makul büyüklükteki bir toplulukta veya ülkede normal nüfus büyümesini tanımlayacak deneysel bir denklemi sıradan eğri uyarlama yöntemleriyle tayin etmek mümkündür.

Amaçlarının gerekçesini ayrıntılarıyla anlatarak, Amerikan nüfus sayımlarında elde edilen sonuçların eğri uyarlamasıyla istatistiğe dönüştürülmesini ve ekstrapolasyonla sayım ötesi yılların tahminen bulunmasını uygun ve mümkün görmektedirler. Keyfiyeti bu şekilde izah ettikten sonra, Amerika’da bu tarzda ilk girişimin A. S. Pritchett adlı yazar tarafından üçüncü derece parabol denklemiyle ve en küçük kareler yöntemiyle 1790-1910 Amerika nüfusu için yapılmış olduğunu belirtmektedirler. Müteakiben verdikleri bilgide, yazar Raymond Pearl’ün 1907’de yayınlanan bir makalesinde logaritmik parabol bir denklemi bitkilerin büyümesi için uyarladığından ve yapılan başka çalışmalarda da başarılı sonuçlar elde edildiğinden bahsedildikten sonra, insan nüfus artışının izahı için basit logaritmik üçüncü derece parabolden daha fazla matematiğe ihtiyaç olduğu sonucuna varılmaktadır.

Daha sonra yazarlar Amerika Nüfus Bürosunun derlediği 1790-1910 dönemine ait onar yıl aralıklı Amerika nüfusunu gösteren 13 adet rakama, bitkilerin büyümesinde kullandıkları logaritmik parabolik fonksiyonu uyarlayarak elde ettikleri tahmin sonuçlarını Pritchett’in tahminleriyle birlikte bir tablo haline getirdiklerinde, orijinal sayım sonuçlarına göre uyguladıkları logaritmik parabolik fonksiyonun Amerika nüfus tahmininde başarılı sonuçlar verdiğini, sapmaların makul ve kabul edilir seviyelerde olduklarını göstermektedirler. Gerçekten de tablo etkileyicidir. Yazının birinci bölümü budur.

İkinci bölümde ise yazarlar: yapılan bu çalışmanın teknik olarak başarılı olsa bile genel bir nüfus büyüme kanunu olarak kabul edilemeyeceğini belirterek, bu şekilde nüfus artışının süresiz devam edemeyeceği er ya da geç kıt kaynaklarla karşılaşacağına işaret etmekte, bir nüfus eğrisinin önce konveks (yukarıya doğru hızla yükselen) bir yapı gösterse de bir dönüm noktasından sonra x eksenine konkav bir yapıya dönüşeceğini (hızının yavaşlayacağını) ve giderek yatay asimptot bir hal alacağını anlatmaktadırlar. Uyguladıkları logaritmik parabolik eğrinin bu yapıya sahip olmadığını belirttikten sonra yeni bir matematiksel tanımlamanın gereği vurgulanmaktadır.

Nüfusun sınırlı bir alanda büyüyeceği gerçeği vurgulandıktan sonra artan nüfusun mevcut nüfusa oranı ve sınırlı sahada sahip olunan kaynakların nüfus büyümesini tayin edeceği tespit edilmekte ve doğal olarak karşımıza aşağıdaki lojistik fonksiyon çıkmaktadır.

$$y = \frac{be^{ax}}{1+ce^{ax}} \quad (11)$$

Fonksiyonun matematiksel özellikleri anlatıldıktan sonra sorun; bir taraftan bu fonksiyonun Amerika nüfusunun büyümesini temsil edip edemeyeceği, diğer taraftan gelecekte ülke nüfusu için bundan hangi sonuçların çıkarılabileceği olarak tanımlanmaktadır.

Yazarlar fonksiyonun parametrelerinin en küçük kareler yöntemiyle tahmin edilemeyeceğinin farkındadır, bunu açıkça belirtmektedirler. İlgili alıntımız aşağıdadır.

Bu haliyle denklemin en küçük kareler yöntemiyle gözlemlenen verilere uygulanamayacağı açıktır. Momental denklemler yazmak ve momental yöntemler (method of moments) ile uyarlama yapmak mümkündür, fakat şu sıra; bu metodu geliştirmeyi uygun görmüyoruz çünkü henüz yukarıdaki denklemi nüfusu temsil için bu tür denklemlerin nihai gelişmiş hali olarak görmüyoruz ve daha sonra gereksiz hale gelebilecek bir matematiksel tartışmayla konuyu bağışlamak ve boğmak arzusunda değiliz.

Gerçekten 1920'nin hesap imkânlarıyla böyle bir işe kalkışmanın bugünün bilgisayar olanaklarını da dikkate aldığımızda çok zor olduğunu görmek kolaydır. Buna karşılık yazarlar fonksiyonun matematiksel özelliklerinden hareketle eğrinin geçtiğini tespit ettikleri üç noktayı tanımlayarak (*lojistik eğrisinin en yalın hali-CI*),

$$y = \frac{b}{c+e^{-ax}} \quad (12)$$

fonksiyonun parametrelerini aşağıdaki şekilde belirlemiştir.

$$y = \frac{2,930.3009}{0.014854+e^{-0.0313395x}} \quad (13)$$

Ve Amerika 1790-1910 nüfus sayımları karşılıklarını çok başarılı sonuçlarla tahmin etmişlerdir. Elde ettikleri tahminlerin üç tanesi nüfus sayımlarıyla aynıdır. Bu şekilde nüfus büyüme kanununu karşılayan gerçekçi bir eğrinin ülke nüfus tarihini temsil etmede ne kadar başarılı olacağını vurgulamaktadırlar. Gerçekten de tahmin sonuçları etkileyicidir. Bu denklemden çıkardıkları bir diğer tespit Amerika nüfusunun dönüm noktasını (point of inflection: hızlı artıştan yavaşlayan artışa geçiş noktası) 1 Nisan 1914'te geçtiği şeklindedir. Amerika nüfusu hızlı büyüme dönemini geride bırakmıştır. Bu yazı yazılırken henüz 1920 nüfus sayımı sonuçları ortada yoktur ve yazarlar bunu merakla beklemektedir (1920 nüfusu daha sonra 106 milyon olarak sayılmıştır). Dönüm noktasında nüfusun 98,6 milyon olduğunu tahmin etmektedirler. En önemli bulgu da üst asimptotta nihai nüfus 197 milyon kişi olacaktır (1920'nin iki katı). 197 milyonluk nüfusun yoğunluğu iki katına çıkaracağını belirttikten sonra ortaya çıkacak beslenme sorunlarına da dikkat çekmişlerdir. Tabii ki, biyoloji kökeninden gelmektedirler ve bu ilgileri doğaldır. Hatta bu nüfus seviyesinin gerektireceği kalori miktarı dahi yazıda hesaplanmıştır.

Yazının son bölümünde, önerdikleri nüfus büyüme fonksiyonu biraz daha irdelenmektedir. Bu fonksiyon bir ilk yaklaşımdır. Yazarlara göre fonksiyonun çok sert ve inelastik özellikleri vardır. Tespit doğrudur. Dönüm noktasının eğrinin tam ortasında

olduğunu ilk ve ikinci yarısının simetrik olduğunu bu durumun arzu edilmeyen bir keyfiyet olduğunu ve tahminleri bozacağını belirtirler. Arzu edilen ise asimetrik bir yapıdır. Nüfus gelişiminde simetrisinin olacağını bir garantisi yoktur ve yazarlar bunun ciddiyetle farkındadır. Fonksiyon simetrik yapısından kurtarılmalıdır. Buldukları sayısal sonuçları önemsemezler, bir nüfus büyüme kuramı tespit etmenin peşinde olduklarını vurgularlar. Yazıdaki son cümleleri ise kıt kaynaklarla er ya da geç karşılaşılacağı şeklindedir. Yazarlarımız iktisat teorisine doğru yol almaktadır. Son olarak belirtelim yazının o tarih için zengin ve şık dipnotları da vardır.

1920 yılında yazılan bu yazının bugün dahi iktisat ve istatistik öğrencileri için rahatlıkla ders konusu olacağı yönündeki düşüncemi öncelikle belirtmek isterim. Şık bir yazı, sağlam bir mantık, özgün bir ele alış üslubu, güzel bir İngilizce ve harika bir yaklaşım. 1920 yılı Türkiye'nin yokluktan varlığa dönüm noktasıdır, ama görüldüğü gibi Yeni Dünya bilim yolunda ilerlemektedir. O tarihlerde her ne kadar bu düzeyde bir makale yazacak seviyede olmasa bile kıt kaynaklara sahip Türkiye Cumhuriyeti'nin kuruluşundan dört yıl sonra, 1927'de, ilk nüfus sayımını başarılı bir şekilde yaparak konuya verdiği önemi göstermesi ziyadesiyle takdir ve saygıya şayandır.

Bugünden bakarak yazıya birçok eleştiri getirmek mümkündür ve kolaydır. Mesela yazarlar Amerika nüfusunun 192 milyon olacağını tahmin ederken, 2010 nüfusunun 309 milyon olduğunu belirtelim. En kolay eleştiri olarak, Amerika Nüfus Bürosunun 1790-1910 dönemi için verdiği rakamların 120 yıl için çok az gözlem olduğunu belirtelim, sadece 13 gözlem değeri var. Amerika coğrafyası nedir, bu dönem içinde nasıl bir yol izlemiştir? Nerede başlar nerede biter? Amerika göç politikası 1920'den önce ve sonra nasıl olmuştur? Amerikan teknolojisinin ve tıbbi gelişmesinin taşıma kapasitesine yaptığı katkı çok önemlidir. 1910 yılında 92 milyon olan nüfus 2010 yılında 309 milyon olmuştur. Yazarların belirttiği 192 milyon üst sınır 1960-70 arasında aşılmıştır. Bu liste daha uzar gider. Bu soruların bir önemi yoktur. İşin aslı değişmemektedir. 1920 yılında eldeki veriler ne olursa olsun ortaya konan çalışma, takip edilen yöntem bilim ve bilimsel yaklaşım çok daha değerlidir ve saygıyla karşılanmalıdır. 2017 yılında Türkiye'de aynı şeyi yapma çabası içindeyiz. Aradan geçen yüz yıl insanı düşündürmeye fazlasıyla değer. Makaleyi yazanların, sahip olunan istatistiksel hesap imkânlarının azlığına rağmen ortaya koydukları çalışmayı ziyadesiyle takdirle karşılamak gerekir düşüncesindeyim. Biz bugünkü imkânlarla bunu yapmazsak hatanın o günlerde değil bugünlerde aranmasını söylemek kehanet değil malumun ilanı olur.

Yazarlar anlatılan düşüncelerine karşı 1920 sonrasında çok sayıda eleştiri almalarına rağmen teorik seviyede Amerika bilim dünyasında düşüncelerini savunmayı ölene kadar devam ettirmişlerdir. Bu da meselenin bir diğer boyutudur.

Kaynakça / References

- Allen, R. G. D. (1969). *Mathematical analysis for economists*, Macmillan and Co. Ltd.
- Berger, R. D. (1981). Comparison of the Gompertz and Logistic Equations to describe plant disease progress. *Phytopathology*, 71, 716–719.
- Burley, H. T. (1996). *Growth rate tables*. Cambridge University Press.
- Carey, E. (2009). Using Calculus to Model the Growth of *L. Plantarum* Bacteria. *Undergraduate Journal of Mathematical Modeling: One + Two*, 1(2), 1–11. <http://dx.doi.org/10.5038/2326-3652.1.2.2>
- Chukwu, A. U. & Oyamakin, S. O. (2015). On Hyperbolic Gompertz Growth Model. *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, 9(3), 189–193.
- Fekedulegn D. B. & Colbert, J. J. (1999). *Parameter Estimation of Nonlinear Growth Models in Forestry*, *Silva Fennica* 33(4), 327–336.
- Gebremariam, B. (2014). *Is Nonlinear Regression Throwing you a curve? New diagnostic and inference tools in the NLIN procedure*. Paper SAS384-2014, SAS Institute Inc. Retrieved from: <https://support.sas.com/resources/papers/proceedings14/SAS384-2014.pdf>
- Gompertz, B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 115, 513–583.
- Gottschalk, P. G. & Dunn, J. R. (2005). The five-parameter logistic: A characterization and comparison with the four-parameter logistic. *Analytical Biochemistry*, 343, 54–65. <https://dx.doi.org/10.1016/j.ab.2005.04.035>
- Kirkwood, T. B. L. (2015). Deciphering death: a commentary on Gompertz (1825). *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci.*, 370(1666). <https://dx.doi.org/10.1098/rstb.2014.0379>
- Lampl, M. (2012) *Perspectives on modelling human growth: Mathematical models and growth biology*, *Annals of Human Biology*, 39(5), 342–351. <http://dx.doi.org/10.3109/03014460.2012.704072>
- Mahaffy, J. M. (2011). Discrete Modelling- U. S. Population. *Math 636 - Mathematical Modeling Fall Semester*, Retrieved from: <http://jmahaffy.sdsu.edu/courses/f09/math636/lectures/uspoppop.html>
- Matsui, K. (2009), *Gompertz-Matsui Model for HCV Kinetics*, Ofuna Chuo Hospital, Kanagawa, Japan.
- Matsui, K. *Gompertz Curve. Kanagawa, Japan: Ofuna Chuo Hospital*. Retrieved from: <http://gompertz-matsui.la.coocan.jp/>
- Paine, C. E. T., Marthews, T. R., Vogt, D. R., Purves, D., Rees, M., Hector, A., Turnbull, L. A. (2012). How to fit nonlinear plant growth models and calculate growth rates: an update for ecologists. *Methods in Ecology and Evolution*, 3, 245–256, <https://dx.doi.org/10.1111/j.2041-210X.2011.00155.x>
- Pearl, R. & Reed, J. L. (1920). On the rate of growth of the population of the united states since 1790 and its mathematical representation, *Proceedings of The National Academy of Sciences*, 6(6), 275–288.
- Richards, F. J. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*, 10, 290–300.
- Ricketts, J. H. & Head, G. A. (1999). A five-parameter logistic equation for investigating asymmetry of curvature in baroreflex studies. *American Journal of Physiology - Regulatory, Integrative and Comparative Physiology*, 277(2), 441–454 Retrieved from: <https://www.physiology.org>.

[org/doi/pdf/10.1152/ajpregu.1999.277.2.R441](https://doi.org/10.1152/ajpregu.1999.277.2.R441)

SAS Documentation. *Affecting Curvature through Parameterization*. Retrieved from: https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63033/HTML/default/viewer.htm#statug_nlin_sect036.html

SAS/STAT. (2009). *SAS/STAT® 9.2 user's guide the NLIN procedure (Book Excerpt)* (2nd electronic book).

Tjørve K. M. C. & Tjørve, E. (2017). The use of Gompertz models in growth analyses, and new Gompertz-model approach: An addition to the Unified-Richards family. *PLoS ONE*, 12(6). <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0178691>

Tsoularis, A. & Wallace, J. (2002). Analysis of logistic growth models. *Mathematical Biosciences*, 179, 21–55.

Tsoularis, A. (2001). Analysis of logistic growth models. *Res. Lett. Inf. Math. Sci*, 2, 23–46. Retrieved from: <http://www.massey.ac.nz/~wiiims/~rlims>

Wikipedia, *Generalised logistic function*. Retrieved from: https://en.wikipedia.org/wiki/Generalised_logistic_function.

Winsor, P. C. (1932). The Gompertz Curve as a growth curve. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 18(1), 1–8.

Yamane, T. (1962). *Mathematics for economists*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc.

Ekler

Ek 1. Gompertz Fonksiyonu Üzerine Çeşitlemeler

Çalışmalarımız sırasında Gompertz'in özgün makalesiyle çok ayrıntılı olarak ilgilenecek zamanımız olmamıştı. Yazımız son halini aldıktan sonra zaman bulup Gompertz fonksiyonuna ayrıntılı olarak baktığımızda bu ekteki yazdıklarımızı ve daha fazlasını üretecek olanakları gördük.

518 *Mr. GOMPERTZ on the nature of the function*

the contrary appears to take place at certain periods) it would follow that the number of living out of a given number of persons at a given age, at equal successive increments of age, would decrease in a greater ratio than the geometrical progression, and then the chances against the knowledge of any one having arrived to certain defined terms of old age might increase in a much faster progression, notwithstanding there might still be no limit to the age of man.

Art. 5. If the average exhaustions of a man's power to avoid death were such that at the end of equal infinitely small intervals of time, he lost equal portions of his remaining power to oppose destruction which he had at the commencement of those intervals, then at the age x his power to avoid death, or the intensity of his mortality might be denoted by $a q^x$, a and q being constant quantities; and if L_x be the number of living at the age x , we shall have $a L_x \times q^x \cdot \dot{x}$ for the fluxion of the number of deaths $= -(L_x)^{\cdot}$; $\therefore a b q^x = -\frac{\dot{L}_x}{L_x}$, $\therefore a b q^x = -\text{hyp. log. of } b \times \text{hyp. log. of } L_x$, and putting the common logarithm of $\frac{1}{b} \times$ square of the hyperbolic logarithm of $10 = c$, we have $c \cdot q^x =$ common logarithm of $\frac{L_x}{d}$; d being a constant quantity, and therefore L_x or the number of persons living at the age of $x = d \cdot \overline{g}^x$; g being put for the number whose common logarithm is c . The reader should be aware that I mean \overline{g}^x to represent g raised to the power q^x and not g^q raised to the x power; which latter I should have expressed by $\overline{g^q}^x$, and which would evidently be equal to g^{qx} . I take this opportunity to make this observation, as algebraists are sometimes not sufficiently precise in their notation of exponentials.

Resim 2. Gompertz'in 1825 tarihli makalesinden.

Gompertz 1825 tarihli makalesinde esas itibariyle ilerleyen yaş ile ölümden kaçınma veya ölüm oranı arasındaki ilişkiyi araştırmak amacıyla geliştirdiği teoreme göre: her yaş grubunda yaşama devam edenlerin sayılarının logaritmalarının farklarını aldığımızda farklar eşitse bu durumda o yaş gruplarında yaşayanların sayısı geometrik olarak artmaktadır. Teoremi bu şekilde kurduktan sonra o yıllarda elde bulunan yaşam istatistiklerinden bu teoremi ispatlamaktadır. Çok iyi matematik ve logaritma bilmektedir. Tüm çalışma bu yönde devam etmektedir. Yaşam tablolarındaki verilerden teoremin ispatından sonra aktüerya hesaplarında kullanılacak genel kabul görmüş esasları tespit etmiş olacaktır.

Gompertz'in 1825 tarihli makalesinde Gompertz denklemi

$$L_x = d g^{q^x} \tag{14}$$

şeklinindedir. Formül yaşı ilerlemesiyle hayatta kalan nüfus arasındaki ters orantılı ilişkiyi tespit etmektedir.

Bizim bu yazıdaki notasyonumuza çevirdiğimizde:

$$L_x = Y_{(t-T)}, d = Y_0 + (K - Y_0), g = b \text{ ve } q^c = e^{(-r(t-T))} \text{ olmak üzere}$$

$$Y_{(t-T)} = Y_0 + (K - Y_0)b^{EXP(-r(t-T))} \quad (15)$$

denklemler elde edilir.

Bu değişiklikten sonra yaptığımız istatistiksel testlerin tamamında 10. fonksiyondaki (ilk Gompertz fonksiyonu) sonuçların aynısını elde ettik.

15 numaralı denklemde $b=0.076$ 'dır. 10 numaralı fonksiyonda $Q=2.5773$ 'tür ve $EXP(-Q)=b$ 'dir.

Keiji Matsui'nin [21]'deki makalesinden aldığımız aşağıdaki fonksiyon ile yaptığımız istatistiksel test çalışmasında $a=0.0698$ ve $r=0.0271$ bulduk. $EXP(-0.0698/0.0271)=0.076$ olarak 15. fonksiyondaki b 'ye eşittir.

$$Y_{(t-T)} = Y_0 + (K - Y_0)EXP(-a/r)^{EXP(-r(t-T))} \quad (16)$$

15, 16 ve 10 numaralı fonksiyon sonuçları birbirini teyit etmektedir. Keyfiyet aşağıdaki tablodan da görülebilir.

Y=	45,508,683	1	$Y=N+(K-N)*b$	$^{(EXP(-r*(t-T)))}$	Gompertz fonksiyonundan (15)
Y=	45,528,202	2	$Y=N+(K-N)*EXP(-a/r)$	$^{EXP(-r*(t-T))}$	Gompertz-Keiji Matsui (16)
Y=	45,504,740	3	$Y=N+(K-N)*EXP(-Q)$	$^{EXP(-r*(t-T))}$	Bu çalışmada kullanılan fonksiyon (10)
Y=	45,504,740	4	$Y=N+(K-N)*EXP(-Q)$	$^{EXP(-r*(t-T))}$	Bu çalışmada kullanılan fonksiyon (alternatif şekil) (10)
Not: 4.nolu fonksiyon 3'ün bir ile benzeşimli halidir.					
a	0.06980				
N	13538351	a/r	2.57565		
K	113800000	EXP(-Q)	0.07598		
Q	2.5773	EXP(-2.577329)	0.0761		
b	0.076	EXP(-a/r)	0.0761		
r	0.0271	b	0.076		
t	1980				
T	1950				

Çalışmalarımızda ilgimizi çeken logaritma esaslı bir Gompertz fonksiyon tanımı yine [20 ve 21]'deki yazılarda Japon yazar Keiji Matsui tarafından verilmektedir. Tıp kökenli olduğunu anladığımız yazar, internet üzerinden ulaşma imkânı bulunduğumuz iki yazısından birinde özgün Gompertz makalesindeki (1825) Carlisle mortalite tablosuna referansla rakamları kullanıp fonksiyon üzerinde çağdaş bir yorumda bulunmakta ve matematiksel bir yaklaşım getirmektedir. Japonların katkısı açıktır.¹⁹ Bu çalışma sırasında okuyup incelediğimiz başka hiçbir makalede Gompertz makalesinden alıntılara rastlamadık. Keiji Matsui ikinci makalesinde ise HCV (Hepatitis C virüsü)'nin büyümesi ve anti-viral terapi ile tedavi sürecinin Gompertz eğrisine uyumunu modellemiştir.

Yazarın çalışmasından esinlenerek matematiksel fonksiyonunu Türkiye nüfus verileri üzerinde kullanmayı uygun gördük. Yazar Keiji Matsui orijinal Gompertz fonksiyonuna göre aşağıdaki tanımları vermektedir. Yazara göre Gompertz fonksiyonu:

$$y = ab^{c^x}, \text{ veya } \ln G(t) = \ln G_{\max} * \exp(-a/k)^{\exp(-kt)}, \text{ bizim notasyonumuza göre ise}$$

$$\ln(Y_{(t-T)}) = \ln(Y_0) + (\ln(K) - \ln(Y_0))EXP(-a/r)^{EXP(-r(t-T))} \quad (17)$$

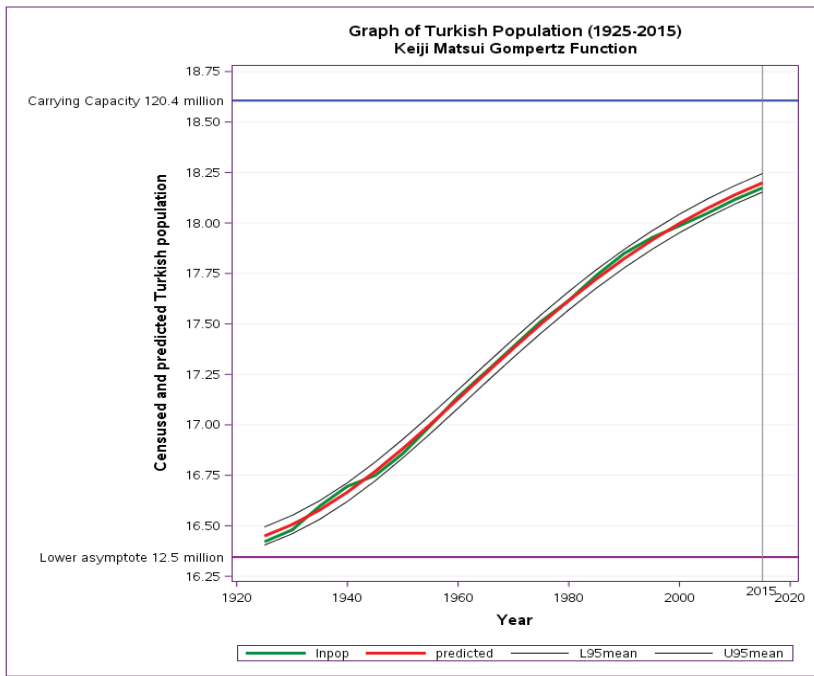
şeklinde. Model logaritmik değerler üzerinden çalışmaktadır. Esasen Gompertz de makalesinde

¹⁹ Michio Morishima matematiksel iktisat konusundaki eserlerini üniversite yıllarım ve sonrasında (1970'ler) okuyup faydalandığım önemli bir Japon iktisatçıdır. Morishima'nın matematiksel iktisatla yazılan birçok kitabıyla birlikte ünlü matematikçi John von Neumann'ın topoloji ile yazdığı 'Genel Ekonomik Denge Kuramını (1928)' günümüze aktaran yaklaşımı etkileyicidir. Keza Taro Yamane (Mathematics for Economists), Prentice-Hall Inc, 1962 yine gençlik yıllarımda okuma şansını bulduğum ve hâlâ istifade etmeye devam ettiğim kitabındaki sade ve öğretici üslubuyla hatırladığım bir Japon yazardır. Ünlü Japon iktisatçı ve matematikçi Hukukane Nikaido'yu da saygıyla anmam gerekir. Morishima gibi tüm Batılı iktisatçıların genel denge teoremlerini matematiksel modellerle ifade eden bir dâhidir. 'Convex Structures and Economic Theory' ve 'Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics' iki ebedi eseridir. Yıl 2017, anlaşılan öğrenme geleneği Keiji Matsui ile hâlâ devam ediyor.

tüm ispatlarını logaritma üzerinden yapmaktadır. Bu modele göre yaptığımız istatistiksel testlerin tamamında başarılı sonuçlar almış bulunuyoruz. ‘Yakınsama kıstası/yineleme süreci’ başarılı olmuş ve taşıma kapasitesi 120 milyon kişi olarak bulunmuştur. Diğer özet istatistikler aşağıdaki tablo ve grafiktedir.

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Approx Pr > F
Model	2	5722.5	2861.3	6732921	<.0001
Error	17	0.00722	0.000425		
Uncorrected Total	19	5722.5			

Parameter	Estimate	Approx Std Error	Approximate 95% Confidence Limits	Skewness	Bias	Percent Bias
a	0.0966	0.00265	0.0910	0.1022	0.1025	0.000049
r	0.0305	0.000346	0.0297	0.0312	0.0304	2.507E-6



Grafik notu: Grafiğin dikey eksenı logaritmik değerlerle ifade edilmektedir. Buna rağmen klasik nüfus gelişimini rahatlıkla yansıtmaktadır. Taşıma kapasitesi 120,4 milyon kişidir.

Gompertz’in özgün yazısını yazdığından beri 192 yıl geçmiştir. Konu iki asır boyunca çok ayrıntılı olarak işlenmiş ve hala genişletilerek işlenmeye devam etmektedir. Fonksiyon çeşitli şekillerde tadil edilmiş sayısız istatistiğe uygulanmıştır²⁰. Bu çalışmamız sırasında bunları gördük. Gompertz fonksiyonuna dayalı tanımlamalardan sıhhatli sonuçlar almak için dikkatli test çalışmaları yaptık bunların birinde yapılacak hatalı girişin sonuçları değiştireceğini gördük. Matematiksel modellerin istatistiksel çalışmaya oturtulmadığı sürece kendi başına bir anlamı olmamaktadır. Bu istatistiksel çalışma da tüm sonuçlarıyla testleri geçmiş olmalıdır. Çalıştığımız fonksiyonlar alıştığımız basit en küçük kareler yöntemini kullanmamaktadır. Fonksiyonlar doğrusal değildir istatistik uygulamaları farklıdır. Doğrusal olmayan fonksiyonların incelenmesi istatistik biliminde çok ayrı bir yere sahiptir ve gelişiminin önemli bölümünü son yarım asırda göstermiştir. Standart istatistik kitaplarında

20 Gompertz fonksiyonu tarihi, uygulamaları ve referanslarıyla ilgilenenler çok güzel bir çalışma olan [24]’e bakabilirler.

bu bahisler ele alınmaz, hatta standart üniversite müfredatında da bulunmaz. Doğrusal olmayan fonksiyonlar ile ilgili yayınlar Dünya’da çok özel yayınevleri tarafından basılmaktadır, fiyatları yüksektir. Ulaşmak kolay değildir, her kütüphanede bulunmaz. Bilim pahalı bir disiplindir. Bedelini ödemek sonuçlarını görmek gerekir. Hiç şüphem yok ki yazısını yazdığı zaman istatistik disiplini gelişmiş olsaydı Gompertz gibi bir dâhi teoremini desteklemek için başarılı bir şekilde istatistiği kullanacaktı. Gompertz’den iki asır sonra internette okuma şansını yakaladığımız araştırmalardan çok azında istatistiksel test sonuçlarını gördük, onlarda da sınırlı sayıda testler olduğunu gördük. Çoğunda testleri hiç göremedik. Sadece elde edilen parametre değerleriyle izah edilen sonuçlar gördük. Bu tür yaklaşımların zayıf olduğunu düşündüğümüzden Türkiye nüfusu fonksiyonel analiz çalışmalarımızda ileri düzeyde ayrıntının ele alınmasını uygun gördük ve esas yazımızdaki bulgulara ilaveten bu ekteki açıklamaları yaptık.

Ek 2: Ricketts/Head fonksiyonu ve nüfus büyümesi fonksiyonu uygulamasıyla farkları

Kan basıncıyla kalp atışları arasındaki ilişkiyi analiz ettiği makalede Ricketts ve Head fonksiyonu parametreleri itibarıyla bizim burada uyguladığımızdan farklı uygulamışlardır. Bizim sembollerimizle makaledeki fonksiyon şöyledir:

$$Y(t) = L + \frac{K}{1 + f_t A + (1 - f_t) B} \quad (18)$$

$$A = e^{(Q_1(r-t))} \quad (18a)$$

$$B = e^{(Q_2(r-t))} \quad (18b)$$

$$f_t = \frac{1}{1 + e^{(\bar{C}_f(r-t))}} \quad (18c)$$

$$\bar{C}_f = \frac{2Q_1 Q_2}{|Q_1 + Q_2|} \quad (18d)$$

Burada; t: kan basıncı, Y: kalp atış sayısıdır. L: minimum asimptot, K: maksimum asimptot ve eğim parametreleri ve r dönüm noktası değeri olarak adlandırılmaktadır. 0 ile 1 arasında değişen, fonksiyonun ortasında () merkezleşen lojistik bir ağırlıklandırma fonksiyonudur. ve aynı işareti taşımak kaydıyla ’nin ortalama eğriliği ile tanımlanmaktadır. Fonksiyon kan basıncındaki değişimle kalp atışı arasındaki ilişkiyi tanımlamaktadır. İlişki üst asimptottan (K) yüksek kalp atışı ve düşük kan basıncı olarak başlamakta, kan basıncının artmasıyla kalp atışı düşmeye devam ederek alt asimptota (L) yaklaşmaktadır. Kan basıncı ile kalp atış sayısı arasındaki fonksiyon tespit edilirken r içsel büyüme oranı olarak değil, dönüm noktasındaki basınç değeri olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu haliyle nüfus eğrisinin simetrik tersi bir görünümündedir. Yazarlar e üssü olarak ve ’yi almakta, e’ye bir katsayı vermemektedirler. Ağırlık dağıtım fonksiyonunda da e üssü olarak alınmaktadır. Fonksiyon analiz edilen tıbbi olayın mahiyetine göre tanımlanmıştır. Fonksiyonun bu haliyle nüfus analizinde uygulanamamaktadır. Bu nedenle nüfus analizimize başlarken Ricketts/Head formülünden hareketle Wikipedia’daki [13] “generalised logistic function” tanımlamalarına uygun olarak T: esas yıl ve v: alometrik katsayının ilavesiyle, ve ’yi e çarpanları olarak alıp - terimini e üstü olarak tanımladık. Bu değişikliklerle fonksiyon başarılı neticeler verdi. Rickett/Head makalesindeki tanımlanmış haliyle nüfus analizinde başarılı bir uygulama elde edilmemektedir.

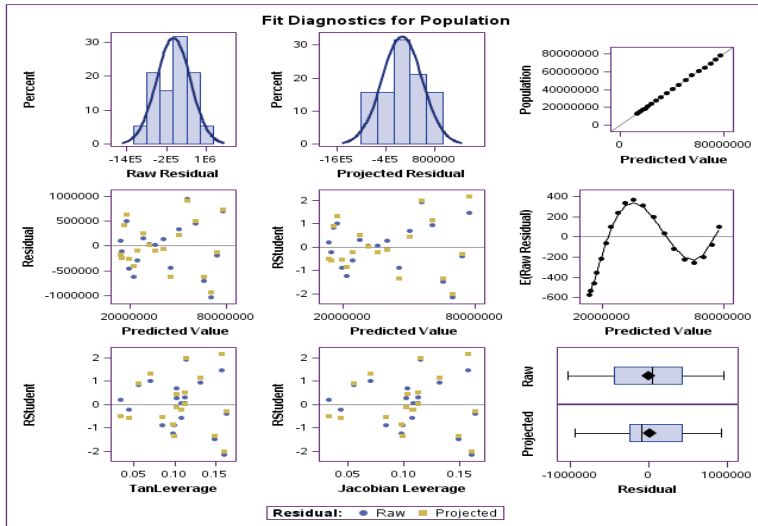
Ek 3: SAS NLIN Çıktısı, Verhulst Lojistik Fonksiyonu, Fonksiyon 1 (Turkpop1.sas)

**Nonlinear Curve Fitting for the Population of Turkey (1925-2015)
Verhulst logistic function**

The NLIN Procedure
Dependent Variable Population
Method: Newton

Iterative Phase			
Iter	r	Q	Sum of Squares
0	0.0470	21.7000	8.082E15
1	0.1092	21.7000	2.509E15
2	0.0599	6.6517	1.779E14
3	0.0483	5.0628	6.448E12
4	0.0493	5.2288	4.713E12
5	0.0493	5.2397	4.707E12
6	0.0493	5.2397	4.707E12

NOTE: Convergence criterion met.



Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Approx Pr > F
Model	2	3.895E16	1.947E16	70334.8	<.0001
Error	17	4.707E12	2.769E11		
Uncorrected Total	19	3.895E16			

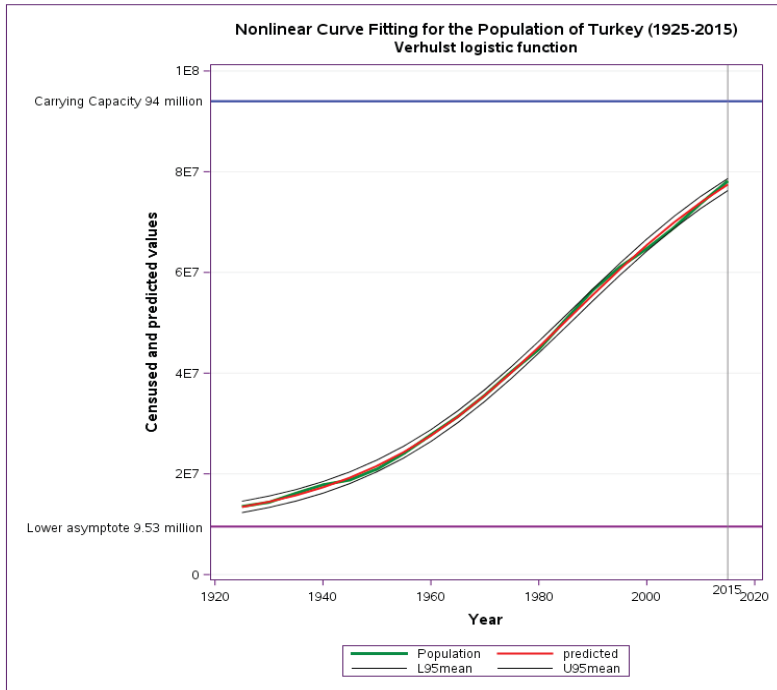
Parameter	Estimate	Approx Std Error	Approximate 95% Confidence Limits	Skewness	Bias	Percent Bias
r	0.0493	0.000420	0.0484 0.0502	0.0241	2.335E-6	0.005
Q	5.2397	0.0780	5.0751 5.4043	0.0714	0.000991	0.019

Approximate Correlation Matrix		
	r	Q
r	1.0000000	0.8462741
Q	0.8462741	1.0000000

Global Nonlinearity Measures	
Max Intrinsic Curvature	0.0087
RMS Intrinsic Curvature	0.0056
Max Parameter-Effects Curvature	0.0466
RMS Parameter-Effects Curvature	0.0284
Curvature Critical Value	0.5277
Raw Residual Variance	277E9
Projected Residual Variance	309E9

Nonlinear Curve Fitting for the Population of Turkey (1925-2015)
Verhulst logistic function

Obs	Year	Population	predicted	L95mean	U95mean	residuals
1	1925	13538351	13434093.29	12305974.23	14562212.36	104257.71
2	1930	14350591	14462146.53	13328283.70	15596009.35	-111555.53
3	1935	16158018	15740036.67	14599402.58	16880670.76	417981.33
4	1940	17820950	17316597.05	16168444.97	18464749.13	504352.95
5	1945	18790174	19243714.82	18087858.87	20399570.77	-453540.82
6	1950	20947188	21572866.40	20409965.62	22735767.17	-625678.40
7	1955	24064763	24349778.41	23181505.59	25518051.22	-285015.41
8	1960	27755532	27607181.49	26436112.56	28778250.42	148350.51
9	1965	31391421	31356192.55	30185274.14	32527110.97	35228.45
10	1970	35605176	35577666.31	34409264.52	36748068.10	27509.69
11	1975	40347719	40215671.93	39050483.60	41380860.27	132047.07
12	1980	44737321	45175636.11	44012029.39	46339242.83	-438315.11
13	1985	50664458	50329155.97	49163520.96	51494798.98	335302.03
14	1990	56473035	5525837.59	54354045.96	56697629.23	947197.41
15	1995	61066689	60610214.42	59429526.82	61790902.02	456474.58
16	2000	64729000	65439890.47	64250272.79	66629508.16	-710890.47
17	2005	68861000	69900567.36	68704776.26	71096358.45	-1039567.36
18	2010	73723000	73914831.55	72717419.22	75112243.88	-191831.55
19	2015	78152000	77443810.70	76249706.32	78637915.08	708189.30



Ek 4: SAS NLIN Çıktısı, Ricketts/Head büyüme fonksiyonu, Fonksiyon 2 (Turkpop6.sas)

**Nonlinear Curve Fitting for the Population of Turkey (1925-2015)
Ricketts/Head growth function**

**The NLIN Procedure
Dependent Variable Population
Method: Newton**

Iterative Phase					
Iter	Q1e	r	Q2e	v	Sum of Squares
0	11.9900	0.1621	9.7222	4.3000	2.4E15
1	14.4086	0.1621	9.7222	4.2742	6.483E14
2	12.9284	0.1621	9.7222	3.6609	1.849E14
3	13.7121	0.1621	10.3086	4.1589	3.707E13
4	14.2356	0.1621	10.8945	4.5087	1.33E13
5	11.5098	0.1299	8.7575	3.6856	4.634E12
6	10.9742	0.1225	8.4062	3.5863	2.583E12
7	10.9512	0.1219	8.4110	3.5989	2.462E12
8	10.9524	0.1219	8.4133	3.6005	2.461E12
9	10.9524	0.1219	8.4134	3.6006	2.461E12

NOTE: Convergence criterion met.

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Approx Pr > F
Model	4	3.895E16	9.737E15	59341.3	<.0001
Error	15	2.461E12	1.641E11		
Uncorrected Total	19	3.895E16			

Parameter	Estimate	Approx Std Error	Approximate 95% Confidence Limits		Skewness	Bias	Percent Bias
Q1e	10.9524	0.5702	9.7370	12.1678	0.0741	0.0345	0.32
r	0.1219	0.00592	0.1093	0.1345	0.0936	0.000391	0.32
Q2e	8.4134	0.4524	7.4492	9.3776	0.0870	0.0275	0.33
v	3.6006	0.1932	3.1888	4.0123	0.0951	0.0117	0.32

Global Nonlinearity Measures	
Max Intrinsic Curvature	0.0746
RMS Intrinsic Curvature	0.0324
Max Parameter-Effects Curvature	0.4462
RMS Parameter-Effects Curvature	0.1989
Curvature Critical Value	0.5721
Raw Residual Variance	164E9
Projected Residual Variance	972E8

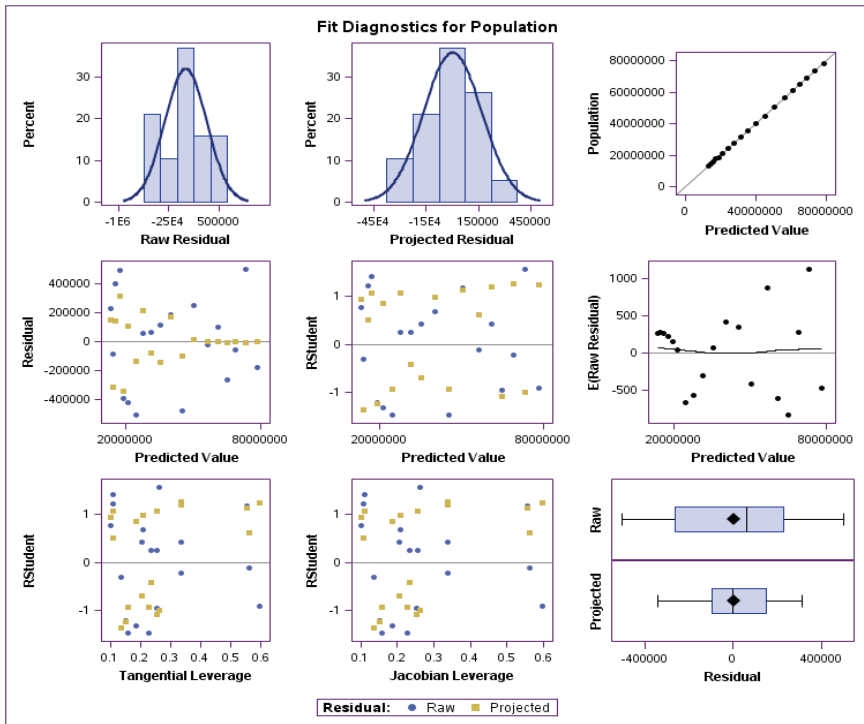
Ek 5: SAS NLIN Çıktısı, Ricketts/Head Büyüme Fonksiyonu, Fonksiyon 4 (Turkpop6b.sas)

**Nonlinear Curve Fitting for the Population of Turkey (1925–2015)
Ricketts/Head growth function (Two independent variable and iteratively reweighted)**

**The NLIN Procedure
Dependent Variable Population
Method: Newton**

Iterative Phase						
Iter	Q1e	r	Q2e	v	s	Weighted SS
0	11.9911	0.1121	9.7212	3.3541	0.0150	7.689E11
1	9.5356	0.0847	7.7592	2.6467	0.2261	8.075E11
2	9.9989	0.0895	8.0797	2.7593	0.2125	1.266E12
3	10.6820	0.0957	8.5873	2.9303	0.2184	1.231E12
4	11.2760	0.1018	9.0320	3.0829	0.2068	9.263E11
5	11.6536	0.1057	9.3282	3.1860	0.1979	1.038E12
6	12.0132	0.1099	9.6108	3.2912	0.1702	1.048E12
7	12.2500	0.1129	9.7969	3.3623	0.1477	1.024E12
8	12.3622	0.1143	9.8851	3.3966	0.1360	1.014E12
9	12.4059	0.1149	9.9194	3.4103	0.1310	1.011E12
10	12.4215	0.1151	9.9317	3.4153	0.1290	1.01E12
11	12.4270	0.1152	9.9360	3.4171	0.1283	1.01E12
12	12.4290	0.1152	9.9375	3.4178	0.1280	1.01E12
13	12.4297	0.1152	9.9381	3.4180	0.1279	1.01E12
14	12.4300	0.1152	9.9383	3.4181	0.1278	1.01E12
15	12.4301	0.1152	9.9384	3.4182	0.1278	1.01E12
16	12.4301	0.1152	9.9384	3.4182	0.1278	1.01E12
17	12.4302	0.1152	9.9384	3.4182	0.1278	1.01E12

NOTE: Convergence criterion met.



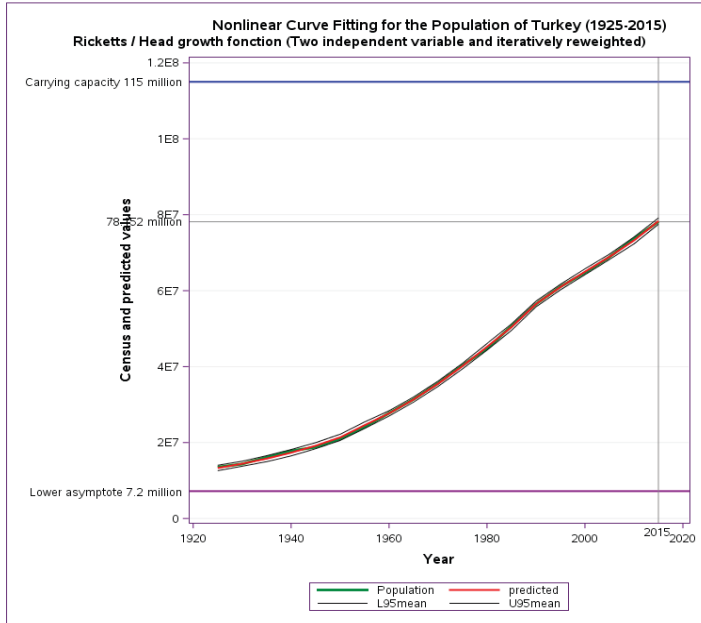
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Approx Pr > F
Model	5	2.858E16	5.717E15	79251.2	<.0001
Error	14	1.01E12	7.213E10		
Uncorrected Total	19	2.858E16			

Parameter	Estimate	Approx Std Error	Approximate 95% Confidence Limits		Skewness	Bias	Percent Bias
Q1e	12.4302	0.5128	11.3303	13.5300	0.0720	0.0298	0.24
r	0.1152	0.00519	0.1041	0.1263	0.1249	0.000303	0.26
Q2e	9.9384	0.4182	9.0415	10.8353	0.0831	0.0244	0.25
v	3.4182	0.1531	3.0898	3.7465	0.1091	0.00860	0.25
s	0.1278	0.0458	0.0296	0.2260	-0.0510	-0.00042	-0.33

Global Nonlinearity Measures	
Max Intrinsic Curvature	0.0745
RMS Intrinsic Curvature	0.0250
Max Parameter-Effects Curvature	0.3819
RMS Parameter-Effects Curvature	0.1491
Curvature Critical Value	0.5814
Raw Residual Variance	721E8
Projected Residual Variance	684E8

**Nonlinear Curve Fitting for the Population of Turkey (1925-2015)
Ricketts/Head growth function (Two independent variable and iteratively reweighted)**

Obs	Year	Population	der	der2	predicted	L95mean	U95mean	residuals
1	1925	13538351	1	1	13310680.72	12597317.22	14024044.21	227670.28
2	1930	14350591	1	1	14431794.93	13765660.68	15097929.18	-81203.93
3	1935	16158018	1	1	15758015.05	14968169.46	16547860.64	400002.95
4	1940	17820950	1	1	17326222.32	16485174.40	18167270.23	494727.68
5	1945	18790174	1	1	19179222.44	18379039.41	19979405.47	-389048.44
6	1950	20947188	1	1	21365914.08	20538961.95	22192866.20	-418726.08
7	1955	24064763	2	2	24569986.98	23705206.88	25434767.07	-505223.98
8	1960	27755532	2	2	27695265.62	27004935.97	28385595.27	60266.38
9	1965	31391421	2	2	31326944.91	30640232.76	32013657.07	64476.09
10	1970	35605176	2	2	35490579.59	34789878.63	36191280.56	114596.41
11	1975	40347719	2	2	40158635.79	39427090.93	40890180.64	189083.21
12	1980	44737321	2	2	45211430.22	44339421.42	46083439.02	-474109.22
13	1985	50664458	2	2	50410375.55	49549874.83	51270876.28	254082.45
14	1990	56473035	3	3	56494560.11	55747901.63	57241218.60	-21525.11
15	1995	61066689	3	3	60963180.32	60230300.89	61696059.75	103508.68
16	2000	64729000	3	3	64992501.86	64215934.43	65769069.30	-263501.86
17	2005	68861000	3	3	68914756.47	68205568.17	69623944.76	-53756.47
18	2010	73723000	3	3	73221116.00	72320245.77	74121986.24	501884.00
19	2015	78152000	3	3	78328483.64	77493569.31	79163397.97	-176483.64



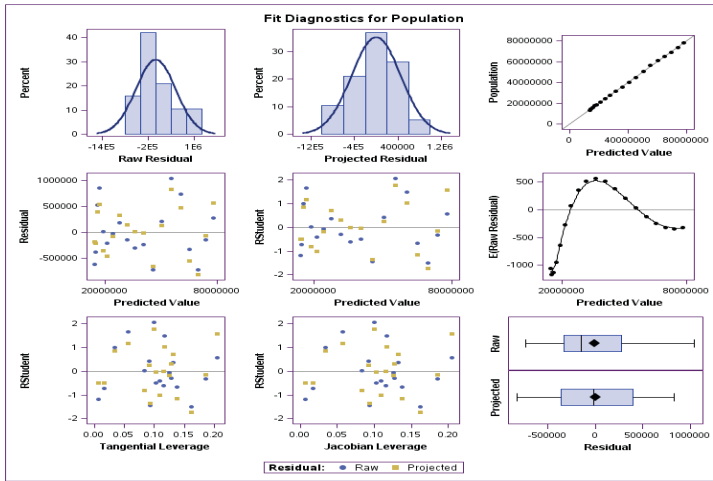
Ek 6: SAS NLIN Çıktısı, Gompertz büyüme fonksiyonu, Fonksiyon 1 (Turkpop2b.sas)

Nonlinear Curve Fitting for the Population of Turkey (1925-2015)
Gompertz growth function

The NLIN Procedure
Dependent Variable: Population
Method: Newton

Iterative Phase			
Iter	r	Q	Sum of Squares
0	0.0400	12.0000	9.052E15
1	0.0685	12.0000	3.15E15
2	0.0550	6.7546	1.962E15
3	0.0416	3.9281	8.49E14
4	0.0268	2.4012	6.20E13
5	0.0266	2.5256	6.291E12
6	0.0270	2.5741	4.603E12
7	0.0271	2.5773	4.797E12
8	0.0271	2.5773	4.797E12

NOTE: Convergence criterion met.



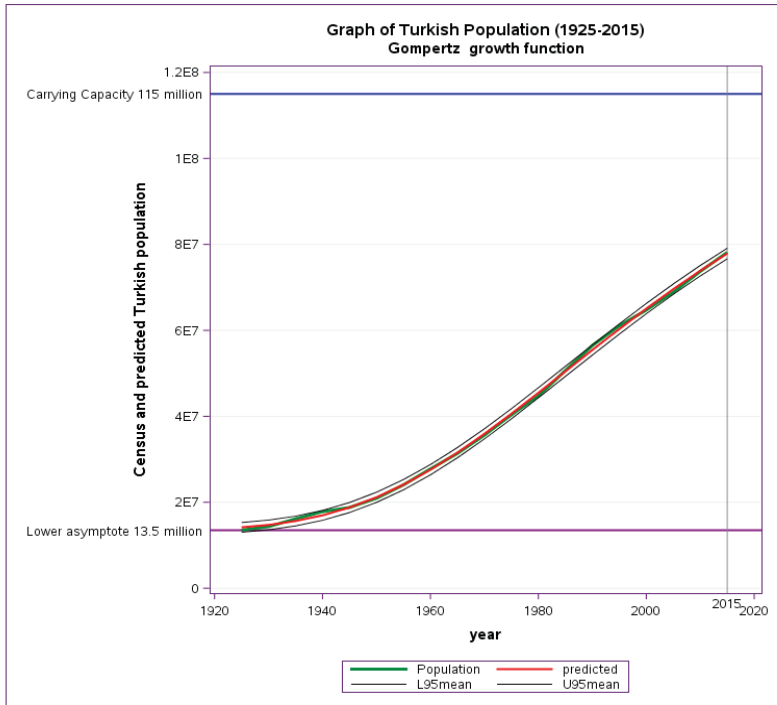
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Approx Pr > F
Model	2	3.895E16	1.947E16	69010.7	<.0001
Error	17	4.797E12	2.822E11		
Uncorrected Total	19	3.895E16			

Parameter	Estimate	Approx Std Error	Approximate 95% Confidence Limits		Skewness	Bias	Percent Bias
r	0.0271	0.000230	0.0266	0.0276	0.0236	1.226E-6	0.005
Q	2.5773	0.0230	2.5289	2.6258	0.0560	0.000227	0.009

Global Nonlinearity Measures	
Max Intrinsic Curvature	0.0148
RMS Intrinsic Curvature	0.0090
Max Parameter-Effects Curvature	0.0343
RMS Parameter-Effects Curvature	0.0210
Curvature Critical Value	0.5277
Raw Residual Variance	282E9
Projected Residual Variance	264E9

Nonlinear Curve Fitting for Turkey Population (1925-2015) Gompertz growth function

Obs	year	Population	predicted	L95mean	U95mean	residuals
1	1925	13538351	14167572.65	13042749.93	15292395.37	-629221.65
2	1930	14350591	14734038.13	13603742.47	15864333.79	-383447.13
3	1935	16158018	15633108.57	14493609.37	16772607.78	524909.43
4	1940	17820950	16956735.94	15804515.82	18108956.06	864214.06
5	1945	18790174	18781377.87	17614700.00	19948055.73	8796.13
6	1950	20947188	21156087.50	19976141.59	22336033.41	-208899.50
7	1955	24064763	24095091.04	22905995.68	25284186.40	-30328.04
8	1960	27755532	27575990.20	26383583.89	28768396.52	179541.80
9	1965	31391421	31543214.78	30353184.77	32733244.78	-151793.78
10	1970	35605176	35915293.23	34731416.68	37099169.77	-310117.23
11	1975	40347719	40594082.10	39417202.79	41770961.42	-246363.10
12	1980	44737321	45474210.07	44302220.80	46646199.35	-736889.07
13	1985	50664458	50451434.53	49280144.34	51622724.73	213023.47
14	1990	56473035	55429157.82	54253630.39	56604685.24	1043877.18
15	1995	61066689	60322846.83	59138707.09	61506986.57	743842.17
16	2000	64729000	65062465.01	63866799.02	66258131.00	-333465.01
17	2005	68861000	69593241.52	68384957.24	70801525.80	-732241.52
18	2010	73723000	73875192.01	72654918.75	75095465.26	-152192.01
19	2015	78152000	77881803.94	76651508.11	79112099.77	270196.06



Ek 7: SAS NLIN Çıktısı, Gompertz büyüme fonksiyonu, Fonksiyon 2 (Turkpop2c.sas)

**Nonlinear Curve Fitting for the Population of Turkey (1925-2015)
Gompertz growth function (Two variable and iteratively reweighted)**

**The NLIN Procedure
Dependent Variable Population
Method: Newton**

Iterative Phase				
Iter	Qe	Re	s	Weighted SS
0	1.1890	-3.3800	0.0500	2.037E12
1	1.0696	-3.5699	0.0500	4.605E12
2	0.9032	-3.6139	-0.0263	3.205E12
3	0.9489	-3.6263	-0.00008	3.057E12
4	0.9748	-3.6394	0.0170	2.789E12
5	0.9821	-3.6430	0.0217	2.764E12
6	0.9840	-3.6439	0.0230	2.763E12
7	0.9845	-3.6442	0.0233	2.763E12
8	0.9847	-3.6442	0.0234	2.763E12
9	0.9847	-3.6443	0.0234	2.763E12
10	0.9847	-3.6443	0.0234	2.763E12
11	0.9847	-3.6443	0.0234	2.763E12
12	0.9847	-3.6443	0.0234	2.763E12

NOTE: Convergence criterion met.

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Approx Pr > F
Model	3	2.918E16	9.725E15	56322.7	<.0001
Error	16	2.763E12	1.727E11		
Uncorrected Total	19	2.918E16			

Parameter	Estimate	Approx Std Error	Approximate 95% Confidence Limits		Skewness	Bias	Percent Bias
Qe	0.9847	0.0223	0.9375	1.0319	0.0111	0.000057	0.006
Re	-3.6443	0.0168	-3.6798	-3.6087	-0.0423	-0.00011	0.003
s	0.0234	0.0143	-0.00693	0.0538	0.00183	8.011E-6	0.034

Approximate Correlation Matrix			
	Qe	Re	s
Qe	1.0000000	-0.7056069	0.9404694
Re	-0.7056069	1.0000000	-0.8913110
s	0.9404694	-0.8913110	1.0000000

Global Nonlinearity Measures	
Max Intrinsic Curvature	0.0085
RMS Intrinsic Curvature	0.0077
Max Parameter-Effects Curvature	0.1114
RMS Parameter-Effects Curvature	0.0500
Curvature Critical Value	0.5557
Raw Residual Variance	173E9
Projected Residual Variance	73E9

Ek 8: SAS NLIN Çıktısı, Gompertz hiperbolik büyüme fonksiyonu, Fonksiyon 4 (Turkpo-

p2arsinhwe.sas)

Nonlinear Curve Fitting for the Population of Turkey (1925-2015)
Gompertz hyperbolic growth function (Iteratively reweighted)

The NLIN Procedure
Dependent Variable Population
Method: Newton

Iterative Phase				
Iter	r	Q	c	Weighted SS
0	0.0240	1.0100	0.0110	2.322E12
1	0.0239	1.0177	0.0136	1.507E12
2	0.0241	1.0188	0.0129	1.423E12
3	0.0242	1.0189	0.0124	1.389E12
4	0.0243	1.0189	0.0121	1.37E12
5	0.0243	1.0188	0.0120	1.36E12
6	0.0243	1.0187	0.0119	1.354E12
7	0.0244	1.0187	0.0119	1.351E12
8	0.0244	1.0187	0.0119	1.349E12
9	0.0244	1.0187	0.0119	1.348E12
10	0.0244	1.0186	0.0119	1.347E12
11	0.0244	1.0186	0.0119	1.347E12
12	0.0244	1.0186	0.0119	1.347E12
13	0.0244	1.0186	0.0119	1.347E12
14	0.0244	1.0186	0.0119	1.347E12
15	0.0244	1.0186	0.0119	1.347E12
16	0.0244	1.0186	0.0119	1.347E12
17	0.0244	1.0186	0.0119	1.347E12
18	0.0244	1.0186	0.0119	1.347E12

NOTE: Convergence criterion met.

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Approx Pr > F
Model	3	2.491E16	8.304E15	98647.7	<.0001
Error	16	1.347E12	8.418E10		
Uncorrected Total	19	2.491E16			

Parameter	Estimate	Approx Std Error	Approximate 95% Confidence Limits		Skewness	Bias	Percent Bias
r	0.0244	0.000410	0.0235	0.0252	0.0241	2.134E-6	0.009
Q	1.0186	0.00284	1.0126	1.0247	0.00824	6.365E-6	62E-5
c	0.0119	0.00240	0.00681	0.0170	-0.0107	-8.59E-6	-0.07

Global Nonlinearity Measures	
Max Intrinsic Curvature	0.0179
RMS Intrinsic Curvature	0.0081
Max Parameter-Effects Curvature	0.0165
RMS Parameter-Effects Curvature	0.0083
Curvature Critical Value	0.5557
Raw Residual Variance	842E8
Projected Residual Variance	123E9

**Nonlinear Curve Fitting for the Population of Turkey (1925-2015)
Gompertz hyperbolic growth function (iteratively reweighted)**

Obs	Year	Population	predicted	L95mean	U95mean	residuals
1	1925	13538351	13596379.67	12924998.17	14267761.16	-58028.67
2	1930	14350591	14352669.82	13702727.89	15002611.76	-2078.82
3	1935	16158018	15447493.54	14447470.18	16447516.91	710524.46
4	1940	17820950	16945758.87	15726464.87	18165052.86	875191.13
5	1945	18790174	18896668.82	18167719.77	19625617.88	-106494.82
6	1950	20947188	21327772.51	20502836.80	22152708.22	-380584.51
7	1955	24064763	24242157.00	23494567.42	24989746.58	-177394.00
8	1960	27755532	27619139.72	26888611.51	28349667.94	136392.28
9	1965	31391421	31418426.39	30725620.79	32111232.00	-27005.39
10	1970	35605176	35588167.01	34884047.72	36292286.30	17008.99
11	1975	40347719	40081259.66	39266494.13	40896025.19	266459.34
12	1980	44737321	44916238.95	44127994.23	45704483.66	-178917.95
13	1985	50664458	50825086.15	50083781.68	51566390.61	-160628.15
14	1990	56473035	56116460.99	55263795.56	56969126.42	356574.01
15	1995	61066689	60866444.11	60073436.71	61659451.50	200244.89
16	2000	64729000	65372430.83	64396419.32	66348442.35	-643430.83
17	2005	68861000	69650312.70	68547751.19	70752874.21	-789312.70
18	2010	73723000	73690197.34	72961839.54	74418555.14	32802.66
19	2015	78152000	77481303.72	76467298.30	78495309.15	670696.28

