Dumlupınar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Sayı: 5 Haziran 2001

ATLAMALI TAKSİTLİ BİR BORCUN PARÇALI GEOMETRİK VE ARİTMETİK DEĞİŞİMLİ TAKSİTLERLE ÖDENMESİ PROBLEMLERİNE ÇÖZÜM ÖNERİLERİ

Yard. Doç. Dr. Abdullah EROĞLU*

ÖZET

Formato , atlamalı taksitli (rasgele seçilen bazı devrelerde geri ödemelerin olmadığı durum) bir borcun devrelik eşit taksitlerle geri ödenmesi durumu için devrelik taksit miktarını veren formül türetti. Moon ise atlamalı taksitli bir borcun devrelik eşit taksitler yerine bir devreden diğerine geometrik değişimli (artan veya azalan) taksitler için ilk devrenin taksit miktarını veren formül türel ti. Bu çalışmada, Formato ve Moon' un formülleri wto=l ve $L_{S_v}=N$ (simgeler izleyen bölümde verilecektir) alınarak yeniden elde edilmiştir. Elde edilen formüllerin onlarınkine kıyasla daha yalın olduğu söylenebilir. Ayrıca atlamalı taksitli bir borcun, parçalı geometrik ve aritmetik değişim gösteren taksitlerle ödenmesi durumunda ilk taksit miktarlarım veren formüller türetilmiş ve sayısal örnekler verilmiştir.

1. GİRİŞ

Atlamalı taksitli borç , belli bir zaman süresinde (devre olarak), rasgele seçilen bazı devrelerde taksitlerin (geri ödemelerin) olmadığı, diğer devrelerdeki taksitlerle geri ödemelerin yapıldığı bir borçlanma türüdür. Atlamalı taksitli bir borcun devrelik eşit taksitlerle ödenmesi problemi ilk defa Formato fi992] tarafından ele alındı .[1] Bu tür bir borçlanma modeli şekil 1 ile verilmektedir. Formato ; borçlananların ödeme güçlerinin yıl içinde değişkenlik gösterebileceğine dikkat çekerek bu tür borçlanmanın avantajlı olduğunu belirtmektedir.

* SDÜ, İİBF. işletme Bölümü

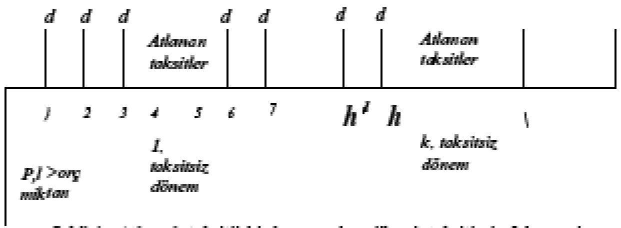
[1] TORMATO.R.A. "Generalized Formula for the Periodic Payment in a Skip Payment Loan with Arbitrary Skips" The Engineering Economist. Vol 37 Number 4 . Summer 1992

Formato tarafından türetilen formül aşağıda verilmektedir.

$$d = \frac{RP(\backslash + R)^{K}}{\imath + £ [(1+R)^{M_k+1} - 0+R)^{L_k}H\}(i + Rf - 1} \quad (D$$

Burada :

d = devrelik taksit miktarı,
P = borç miktarı,
N = geri ödeme süresindeki devre sayısı (taksitlerin olmadığı devreler de dahil),
R — devrelik faiz oranı,
S = taksitsiz dönem (taksitlerin olmadığı ardışık devrelerden oluşan zaman aralığı) sayısı,
L_k - k. taksitsiz dönemden önceki son taksitin devre numarası,
M_k = k. taksitsiz dönemden sonraki ilk taksitin devre numarası.



Şekil 1: Atlamalı taksitli bir borcun devrelik eşit taksitlerle ödenmesi

Moon f19941 ise geri ödemelerin devrelik eşit taksitler yerine geometrik değişim gösteren taksitler olması durumu için paranın zaman değerini kullanarak ;ilk taksit miktarını veren formül türetti.[2] Moon'nun yaklaşımı ;borcun şimdiki değerinin, taksitlerin şimdiki değerleri toplamına eşit olması esasına dayanmakta olup aşağıdaki gibidir.

$$P = d f_j (1 + g)^{"}(1 + R)^{j} + d \, £ \, (1 + g)^{\prime <"M_1+}>(1 + R)^{-J}$$

$$+ dJ£(l+g)^{L}>^{+L}>^{-M}>^{M_1+N}(j+R)^{-J} + \cdots + </X(1+g)^{T}-"-^{+/}(1+*r$$

Burada :
d = ilk taksit miktarı,
g = taksitlerin artış veya azalış oranı,

T = taksit sayısı, $T = £ (4 - M_k) + S + N$

[2] MOON, I. "Generali/.ed Foramla for the Periodic Geometric- Gradient Series Paymenl in a Skip Pajment Loan with Arbitrary Skips" The Engineering Economisl , Vol 39 Number 2 , Winter 1994

Buradan ilk taksit miktarını (d) veren formül aşağıdaki gibidir.[3]

$$d = {}^{P(R-g)} \backslash \qquad g \pm R \text{ için} \qquad (2)$$

Burada;

$$JT\text{-}1\text{-}\hat{}+j \; (l^{M_k}\text{-}^{\prime}\text{-}t^{"})(l + g)^{*+£(£,-\epsilon_k)} + h^{K}\text{-}^{i}\sim no+g)^{T}\text{-}^{N}l$$

$$\backslash + R$$

$g=R$ ve $g=0$ özel durumları için aşağıdaki formüller elde edilir.[4]

$$d = \frac{P}{-}, \qquad g=R \text{ için} \qquad (3)$$

Burada $X = i,_{(} \imath + \hat{} r' + I \; (4.-M,_{+1})(\imath_{+} i,f^{\wedge}\text{-}«^{(\prime}\bullet{}^{\prime\wedge\prime}$

$$+ \; [(N-M_s+l)(l \; + \; R)^{T}\text{-}^{N}\text{-}^{1}].$$

$$d = \frac{PR}{1+Zt^{1+R}y^{M\prime *\prime} \sim 0+{}^{R}Y^{Lt} \backslash\text{-}Q\text{-} +R)\sim} \qquad g = 0 \text{ için} \qquad (4)$$

Eğer taksitlerdeki geometrik değişim (g, artış veya azalış oranı) sıfır olursa, geometrik değişimli taksitler serisi, eşit taksitler serisine indirgenir. Dolayısıyla geometrik değişimli taksitler serisi, eşit taksitler serisinin genel halidir. Bu yüzden (4) eşitliği ile (1) eşdeğerdir..

Bu çalışmada, Formato ve Moon'un formülleri {(1), (2), (3) ve (4)}, $M_s = l$ ve $L_{s+1} = N$ alınarak ve paranın zaman değeri kullanılarak aşağıdaki gibi yeniden elde edilmiştir.[5]

$$d = \frac{P(R-g)}{\prod_{k=0} [(\hat{}-'-\hat{}')(1_{+} g)^{"}]} \qquad g \; ?s \; R \text{ için}$$

Burada $\hat{} =] £ (4 - \hat{} ,)$, ve $\imath = \frac{\ldots\text{-}\hat{}}{l + R}$.

$g = R$ ve $g = 0$ özel durumları için aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

[3] Ara işlemler için Bkz. MOON. I. "Generalized Formula for the Periodic Geometric- Gradient Series Payment in a Skip Payment Loan with Arbitrary Skips" The Engineering Economist. Vol 39 Number 2 . Winter 1994

[4] MOON. I. "Generalized Formula for the Periodic Geometric-Gradient Series Payment in a Skip Payment Loan wich Arbitrary Skips" The Engineering Economist, Vol 39 Number 2 , Winter 1994.

[5] Ayrıntılı bilgi için bkz. Ek 1.

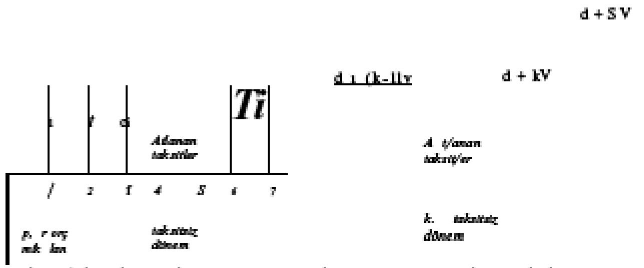
$$d= \frac{P}{f[(2*_{t1}-M_t+1)(H-*)^{M+r}]'} \quad g*R \quad için, \qquad (6)$$

$$rf = \frac{.P/*}{\sum_{k=0} [a+*)'-**-a+*)"**-]} \quad \# = 0 \; iç /*. \qquad (7)$$

(7) ile (4) dolayısıyla (1), (6) ile (3), (5) ile (2) formülleri birbirleriyle özdeştirler. Birbirleriyle karşılaştırıldıklarında (7), (6) ve (5) eşitliklerinin sırasıyla (4) veya (l)'den, (3)'den ve (2)'den daha yalın oldukları söylenebilir. Bu çalışmada aynı zamanda atlamalı taksitli bir borcun parçalı geometrik ve aritmetik değişimli taksitlerle ödenmesi durumu için taksit miktarlarını veren formüller elde edilmiştir.

2. PROBLEMİN TANIMI

Bir borcun devrelik taksitlerle geri ödenmesi problemi; borcun şimdiki değerinin devrelik taksitlerin şimdiki değerlerinin toplamına eşdeğer olması esasına dayanır.[6] Taksit miktarları serisi; genel olarak devrelik eşit miktarlı taksitler serisi, devrelik geometrik değişimli taksitler serisi, devrelik aritmetik değişimli taksitler serisi ve devrelik düzensiz taksitler olarak sınıflandırılabilir.[7] Taksit ödemelerinin yapıldığı ve yapılmadığı ardışık devrelerin oluşturduğu zaman aralıklarını sırasıyla **taksitli** ve **taksitsiz** dönem olarak adlandıralım. Bu çalışmada, her bir taksitli dönemdeki devrelik taksit miktarları birbirine eşit olup, birinden diğerine geometrik/aritmetik değişim göstermesi durumu **parçalı geometrik / aritmetik** değişim gösteren **taksitler** olarak önerilmektedir. Atlamalı taksitli bir borcun parçalı geometrik ve aritmetik değişimli taksitlerle ödenmesi durumları ilk defa bu çalışmada ele alınmaktadır. İlgili borçlanma modelleri şekil 2 ve 3 ile verilmektedir.

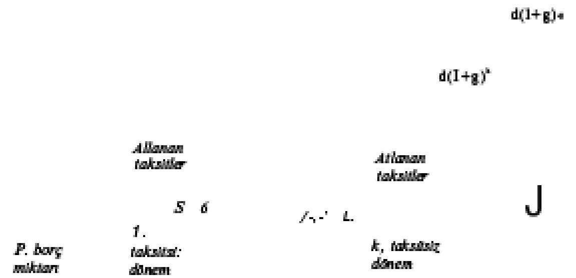


Şekil 2: Atlamalı taksitli bir borcun parçalı aritmetik değişimli taksitlerle ödenmesi

[6] IŞCİL. N. Ticari Aritmetiği ve Mali Cebir. Armağan Yayınevi, Ankara , 1997. s. 148-151 ve SHAO. S.P. ve L.P. SHAO. Mathematics for Management and Finance. Eighth Edition, South-Western College Pub. 1998, s.427-430.

[7] PARK, C.S. Contemporary Engineering Economics, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Com. Inc.,1997, s. 55-57 ve THUESEN, G.J. ve W.J. FABRYCKY, Engineering Economy, Seventh Edition , Prentice Hall International Inc. 1989

Borçlananların yıl içerisinde Ödeme güçleri değişkenlik gösterebilir. Örneğin yüksek enflasyona sahip ülkelerde özellikle aylık maaşla geçimini sağlayan kişilerin maaşları reel olarak her ay düşmekledir. Genel olarak allı aylık veya yıllık maaş artışlarıyla alım güçleri düzeltilmektedir. Bu tür kişilerin eşit veya geometrik değişimli veya aritmetik değişimli taksitlerle borçlanmaları durumunda .!taksit/ maaş' katsayısı giderek azalmaktadır. Bu durum, ilk aylardaki taksitlerin ödenmesini güçleştirmekte veya imkansız hale getirmektedir. Taksit / maaş katsayısı, aylık maaşın % kaçının takside ayrılacağını ifade eder. Bu katsayının borçlanma süresi boyunca devreler itibariyle yaklaşık olarak eşil (dolayısıyla dengeli) olması arzu edilir. Parçalı geometrik veya aritmetik değişim gösteren taksitler, geometrik veya aritmetik değişimli taksitlere göre 'taksit-/ maaş' katsayısı daha homojen olduğundan, bu borçlanma modellerinin daha cazip olduğu söylenebilir. Yanlış anlamaya meydan vermemek için şu noktayı belirtmemiz gerekir. Tüm borçlanma modellerinde borcun şimdiki değeri taksitlerin şimdiki değerleri toplamına eşittir. Bir modelin diğerine göre cazip olma durumu, taksit miktarlarının devreler itibarıyla dağılımı ile ilgilidir.



Şekil 3: Atlamalı taksitli bir borcun parçalı geometrik değişimli taksitlerle ödenmesi

3. PARÇALI GEOMETRİK TAKSİTLER İÇİN FORMÜL

Atlamalı taksitli bir borcun parçalı geometrik değişimli taksitlerle ödenmesi durumunda, $M_0=1$, $L_{s+1} = N$ v e 4 (^ = 0,1,.....,5 için) k. taksitli dönemin devrelik taksit miktarları olmak üzere :
$d_k = d(l+g)k$

biçimindedir. Paranın zaman değerini kullanarak, borcun şimdiki değerinin taksitlerin şimdiki değerlerinin toplamına eşdeğer olması esasına göre aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$F= \sum_{k=0;j=M_k} tk(i+Jtr \qquad \sum\sum «*(!+£)*(!+*)-$$

=dj^(i+g)^t[(i+Rr^{Mt}+(i+Ry^{l*Mo}+-+(i+Ry^{L'"}]

=<£(!+£)'(l + R)-^{Mt}-(l + R)' / R

ve

d = PR / j^il + gfid + Rt^-O + Rr'-" g^R için (9)

Özel olarak g = R olursa (9) eşitliği

£[(1+£)*^{+1}-"*-(1+/i)*-^{k}" g^R için (10)

olur. Diğer taraftan g = 0 için (9) eşitliği;

rf=^r PR / £ [a+*)'-'">-a+;?rH #*0 (11)

olur. Taksit, miktarlarında geometrik değişimin olmaması tüm taksitlerin eşit miktarlı olduğu sonucunu doğuracağından, (11) eşitliği ile (1) eşdeğer olmaktadır. (11) eşitliğinin (1) eşitliğine göre daha yalın olduğu söylenebilir.

4. SAYISAL ÖRNEK 1

Bir kredi kurumundan 8 000 000 000 TL. bir borç 48 ayda geri ödenmek üzere (bazı aylarda geri ödemeler yok) aylık % 3 faiz oranıyla alınıyor. Geri ödemelerin mevcut olduğu ve olmadığı aylar aşağıda verilmektedir.

Aylar	*Geri Ödeme*
1-9	Var
10-12	yok
13-21	var
22-26	yok
27-35	var
36-39	yok
40-48	var

Her bir taksitli dönemdeki aylık taksitler birbirine eşit olup, birinden diğerine % 12 artış (geometrik değişim) göstermektedir. Bu durumda taksit miktarlarını bulalım.

Veriler aşağıdaki gibi olur:

P = 8000 000 000 TL, g = 0.12, R = 0.03, S = 3, N = 48, L_1 = 9, L_2 = 21, L_3 = 35, L_4 = N = 48, M_0 = 1, M_1 = 13, M_2 = 27, M_3 = 40.

(9) eşitliğinden ilk taksitli dönemin taksit miktarları *d* - 365 542 000 TL elde edilir. Diğer taksitli dönemlerin taksit miktarları ise (8) eşitliğinden kolayca bulunur. Taksit miktarları aşağıdaki tabloda verilmektedir.

Aylar	*Taksit Miktarları (Tl)*
1-9	365 542 000
13-21	409 407 040
27-35	458 535 S85
40-48	513 560 191

5. PARÇALI ARİTMETİK TAKSİTLER İÇİN FORMÜL

Atlamalı taksitli bir borcun parçalı aritmetik değişimli taksitlerle ödenmesi durumunda d_k *(k=0,l,...,S),* k. taksitli dönemin devrelik taksit miktarları olmak üzere;

d_k=d + kV (12)

biçimindedir. Paranın zaman değerini kullanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

k=0-M,

R)-^J

k=OJ-M,

K£|>(I + ,R)- ;

k=0 j=M,

^dA + VB (13)

Burada[1] :

-(1 + R)-^L >*<]

^s k=0

B=±±k[a,R?-» -(1 + R)-^{LM}].

^s k=0

(13) eşitliğinden ;

d = P-VB / A (14)

[1] Ayrıntılı bilgi için bkz. Ek 2.

elde edilir. (14) eşitliğinde V=ü değeri yerine konursa,

,,.£_.,———TM——————— (15)
^[(l + R)ʲ-ᴹ-(l + Ryᴸᵏ₄]
k0

bulunur. Aritmetik değişimli taksitler serisi, eşit taksitler serisinin genel bir hali olduğundan, (15) eşitliği, atlamalı taksitli bir borcun eşit taksitler serisi ile geri ödenmesi için taksit miktarını veren formüldür. Dolayısıyla (15) eşitliği (1) ile eşdeğerdir.

6. SAYISAL ÖRNEK 2

Daha önceki örnekte bir taksitli dönemden diğerine taksit miktarlarındaki değişimin geometrik yerine aritmetik olduğunu farzedelim. Aritmetik artışın (V) 50 000 000 TL ve 75 000 000 TL olduğu iki durum için (14) ve (12) eşitliklerinden taksit miktarları aşağıdaki gibi **bulunur.**

	T ak s it	*Miktarları(TL)*
Aylar	*(V = 50 000 000 TL)*	*(V = 75 000 000 TL)*
1-9	362 245 800	336 286 400
13-21	412 245 800	411 286 400
27-35	462 245 800	486 286 400
40-48	512 245 800	561 286 400

7. SONUÇ

Atlamalı taksitli bir borcun devrelik taksitlerle geri ödenmesi problemleriyle ilgili literatürde iki çalışma mevcuttur. Bunlardan ilki Formato'nun çalışmasıdır. Formato, atlamalı taksitli bir borcun devrelik eşil taksitlerle geri ödenmesi durumu için devrelik taksit miktarını veren formül türetti. İkincisi ise Moon'nun çalışmasıdır. Moon ise atlamalı taksitli bir borcun devrelik eşit taksitler yerine bir devreden diğerine geometrik değişimli taksitler için ilk devrenin taksit miktarını veren formül türetti. Bu çalışmada. **Formato** ve Moon'un formülleri $M_0=l$ *ve* $L_{S+1}=N$ alınarak yeniden elde edilmiştir. Elde edilen formüllerin onlarınkine kıyasla daha yalın olduğu söylenebilir. Ayrıca atlamalı taksitli bir borcun parçalı geometrik ve aritmetik değişimli taksitlerle ödenmesi durumunda ilk taksit miktarlarını veren formüller türetilmiş ve sayısal örnekler verilmiştir. Oluşturulan borçlanma modelleri özellikle kredi kurumları için müşterilerine alternatif borçlanma imkanları verebilir.

KAYNAKLAR

FORMATO.R.A. **"Generalized Formula for the Periodic Payment in a Skip Payment Loan with Arbitrary Skips"** The Engincering Economist, Vol 37 Number 4 , Summer 1992

İŞCİL, N. **Ticaret Aritmetiği ve Mali Cebir** , Armağan Yayınevi, Ankara , 1997

MOON, I. **"Generalized Formula for the Periodic Geometric-Gradient Series Payment in a Skip Payment Loan with Arbitrary Skips"** The Engineering Economist, Vol 39 Number 2 , Winter 1994

PARK, C.S. **Contemporary Engineering Economics**, Second Edition, Addison-Weslcy Publishing Com. Inc.,1997

SHAO, S.P. ve L P. SHAO , **Mathematics for Management and Finance**, Eighth Edition, South-Western College Pub. 1998

THIIESEN, G.J. ve W.J. FABRYCKY, **Engineering Economy, Seventh** Edition, Prentice Hail International Inc. 1989

EKİ

$d_{k,j}$ (k=0,I...,S) k. taksitli dönemdeki /. devrenin sonundaki taksit miktarı olmak üzere aşağıdaki eşitlik yazılır.

$d_{k,j}$=d(l+g)i +M+.* için,

Burada; *Y = J^(L₁-M₁), Ai₀ = l, Lₙ=N.*

Borcun şimdiki değeri taksitlerin şimdiki değerleri toplamına eşit olacağından, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

k<=(ŋ=M)

=rfİ;[(ı+^)ᴶ¹⁺ⁿ⁺ᵀ(ı+J^)•ᴵ¹*+a+g)⁺ᴵ¹⁺ⁿᴹa+*)ⁿ⁺ᴶ¹

+......+0+*)⁴ⁿ**-⁴⁺ʳG+*)-ᶻⁿ]