

ISIL YÜK ALTINDA FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ EĞRİ EKSENLİ PANELİN ELASTİK SINIRI

Mehmet HASKUL *

Alınma:09.03.2018; düzeltme:30.07.2018; kabul:10.08.2018

Öz: Bu çalışmada, radyal doğrultuda ısı yüküne maruz kalan fonksiyonel derecelendirilmiş silindirik eğri eksenli panelin elastik davranışı analitik olarak incelenmiştir. Eğri eksenli panelin elastisite modülünün radyal doğrultuda üstel parametreye bağlı olarak değiştiği varsayılmıştır. Panelin düzlem şekil değiştirme durumunda olduğu göz önüne alınmıştır. Panelin malzeme özellikleri üstel parametredeki değişimin etkisi ve genel karışım kanunu ile birlikte ele alındığında; panelin bütün özellikleri (Poisson oranı hariç) radyal doğrultuda değiştiği hesaba alınarak detaylı bir çalışma yapılmıştır. Elastik sınırlar von Mises akma kriterine göre belirlenmiştir. Pozitif ve negatif sıcaklıkta akmanın; panelin iç yüzeyinde, dış yüzeyinde veya aynı anda her iki yüzeyde başladığı gözlemlenmiştir. Sayısal sonuçlar alüminyum/çelik fonksiyonel derecelendirilmiş panel için grafikler halinde sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: von Mises Kriteri, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM), Eğri Eksenli Panel

Elastic Limit of Functionally Graded Curved Panel Under Thermal Load

Abstract: In this study, the elastic behavior of a functional graded cylindrically curved panel subjected to thermal load in the radial direction is analytically investigated. It is assumed that the elasticity module of the curved panel changes in the radial direction depending on the exponential parameter. It is considered that the panel is in plane strain state. The material properties of the panel are considered together with the effect of the change in the exponential parameter and the general mixture law; all the characteristics of the panel (except for the Poisson ratio) has made a detailed study taking into account the changes in the radial direction. The elastic limit is determined according to the von Mises yield criterion. To yield in the positive and negative temperature; the panel inner surface, outer surface or both surfaces at the same time is observed to start. Numerical results are presented in graphical form for aluminum / steel functionally graded panel.

Keywords: von Mises Criterion, Functionally Graded Material (FGM), Curved Panel

1. GİRİŞ

Silindirik eğri eksenli paneller pek çok teknik yapılarda kullanılmaktadır. Bu paneller kullanıldıkları yerlere göre ısı yüküne maruz kalmakla birlikte aynı zamanda mekanik yüklemeye de maruz kalmaktadır. Farklı malzeme kullanarak oluşturulan eğri eksenli kiriş, panel ve kabuklarda değişik yükleme koşulları altında gerilme ve deformasyon analizi, çeşitli mühendislik dallarındaki önemi nedeniyle günümüzde hala araştırılmaya devam edilmektedir. Homojen malzemeden yapılmış eğri eksenli kirişin elastik deformasyon çözümü Timoshenko ve Goodier (1970) tarafından hesaplanmıştır. Shaffer ve House (1954) ideal plastik malzemeden

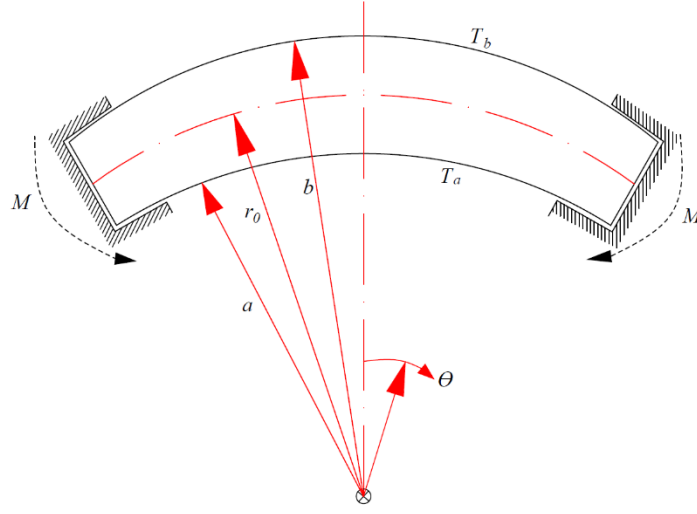
*Makine Mühendisliği Bölümü, Şırnak Üniversitesi, Şırnak, Türkiye, 73100
İletişim yazarı: Mehmet HASKUL (mehmethaskul@sirnak.edu.tr)

yapılmış basit eğilmeye maruz eğri eksenli çubuktaki açısız ve radyal yönde gerilme dağılımlarını elde etmek için analitik model geliştirmiştir. Aynı yükleme durumu için Shaffer ve House (1957) şekil değiştirme ve yer değiştirmeler için denklemler elde etmişlerdir. Dadras (2001) ile Eraslan ve Arslan (2008), yapmış oldukları çalışmalarda doğrusal pekleşen malzeme için elastik-plastik çözümü, Arslan ve Eraslan'ın diğer çalışmalarında (2010) doğrusal olmayan pekleşme davranışı gösteren malzeme için analitik çözüm elde etmiştir. Librescu ve ekibi (2000) ile Duc ve Tung (2010) klasik kabuk teorisini kullanarak basınç ve sıcaklık altında çalışan ince kabuklu eğri eksenli panellerin doğrusal olmayan davranışlarını incelemişlerdir. Kiani ve ark. (2012) ısı ve mekanik yüke maruz radyal doğrultuda fonksiyonel derecelendirilmiş panelin dinamik davranışını araştırmıştır. Arslan, Mack ve Gamer (2013) ısı yük altındaki eğri eksenli panelin elastik davranışını, Arslan ve Mack (2014) aynı durumdaki panelin elastik-plastik davranışları için analitik çözümler ortaya koymuşlardır. Haskul ve Arslan (2015) ısı ve mekanik yüke maruz genelleştirilmiş şekil değiştirme durumu için eğri eksenli homojen panelin elastik çözümünü, aynı yükleme durumdaki fonksiyonel derecelendirilmiş panelin elastik çözümü için Haskul, Arslan ve Mack (2017) tarafından analitik çözümler elde etmişlerdir.

Bu çalışmada, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM)'den üretilmiş panelin mekanik özellikleri (elastisite modülü, yoğunluğu, ısı genleşme katsayısı, ısı iletim katsayısı ve akma gerilmesi) radyal yönde üstel bir fonksiyona bağlı olarak değiştiği ve düzlem şekil değiştirme durumu altında analitik çözüm geliştirilmiştir.

2. MATEMATİKSEL MODELLEME

Bu çalışmada, radyal yönde sıcaklığa maruz kalan eğri eksenli panelde oluşacak elastik gerilme ve yer değiştirmeler için düzlem şekil değiştirme durumundaki fonksiyonel derecelendirilmiş panelin elastik sınırları için analitik bir model geliştirilmiştir. Şekil 1'de iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan eğri eksenli panelin geometrisi gösterilmiştir. Eğri eksenli panelin elastisite modülü radyal yönde üstel fonksiyona bağlı olarak değişmekte ve buna ek olarak panelin açısız doğrultuda (θ) rijit mesnetlerle sabitlendiği varsayılmaktadır. Bu mesnetler, uç yüzeylerde ($\theta = +\theta_s/2$ ve $\theta = -\theta_s/2$ için) açısız doğrultuda yer değiştirmeye müsaade etmekte fakat panelin orta yüzeyinin ($r = r_0 = (a+b)/2$) eğrilik yarıçapının sabit kalmasını sağlamaktadır. Eğri eksenli panele radyal doğrultuda ısı yük uygulandığında (homojen sıcaklık uygulansa da) mesnetlerin etkisiyle her iki uçta M eğilme momenti oluşmakta, böylece panel hem ısı hem de mekanik yük altında çalışmaya zorlanmaktadır. Silindirik simetri varsayımıyla radyal, açısız ve aksel gerilme ($\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$) ve şekil değiştirme ($\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$) bileşenleri sadece radyal koordinatın (r) fonksiyonu olur. Ayrıca panelde kayma gerilmesi $\tau_{r\theta}$ ve kayma şekil değiştirme $\gamma_{r\theta}$ bileşenlerinin oluşmadığı varsayılmıştır. Buna ilaveten söz konusu problem ve kabuller nedeniyle radyal yer değiştirme bileşeni (u) sadece radyal koordinatın bir fonksiyonu olurken, açısız yer değiştirme bileşeni (v) radyal ve açısız koordinatlara (r ve θ) bağlı bir fonksiyondur. Bu nedenle, problemin çözümü mümkündür ve von Mises akma kriterleri hesaba alınarak bu çalışma yapılmıştır.



Şekil 1:
Kullanılan koordinat sistemi ve eğri eksenli panel

2.1. Problemin Tanımı

Silindirik eğri eksenli panelin radyal doğrultuda iç ve dış yüzeylerinin serbest olduğu ve bu nedenle gerilme oluşmadığı ve matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\sigma_r|_{r=a} = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_r|_{r=b} = 0. \quad (2)$$

Radyal doğrultuda üstel olarak fonksiyonel derecelendirilmiş panel düzlem şekil değiştirme durumundadır ($\varepsilon_z = 0$) ve radyal yönde değişen $T = T(r)$ sıcaklık dağılımına maruz kalmaktadır. Panelin radyal yönde yer değiştirmesi;

$$r = r_0 : \quad u = 0 \quad (3)$$

burada $r_0 = (a+b)/2$ panelin orta yüzeyinden geçen eğrilik yarıçapıdır. Panelin açısal yönde sabit mesnetlerden dolayı panelde M momenti oluşacaktır (burada moment eksenel yönde birim uzunluğa etki etmektedir) ve denklem 4 eşitliğiyle verilmiştir ve bu nedenle FDM panel basit eğilme durumundadır

$$M = \int_a^b \sigma_\theta r dr \quad (4)$$

2.2. Temel Denklemler

Şekil değiştirme ve yer değiştirme arasındaki bağıntılar;

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad (6)$$

$$\gamma_{r\theta} = -\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0. \quad (7)$$

Denklem 7 FDM panelin sabit eğrilik yarıçapı için radyal deplasmanın sadece r 'ye bağlı bir fonksiyon olduğunu göstermektedir. Böylece, denge denklemi;

$$\sigma_\theta = \frac{d}{dr}(r\sigma_r) \quad (8)$$

Eğri eksenli fonksiyonel derecelendirilmiş panelde Poisson oranı (ν) sabit fakat, Elastisite Modülü $E = E(r)$ 'ye ve ısıl genleşme katsayısı $\alpha = \alpha(r)$ 'ye bağlı olarak değiştiği göz önüne alındığında, Hooke kanunu aşağıdaki gösterildiği gibi olur.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E(r)} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha(r)T, \quad (9)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E(r)} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r - \sigma_z)] + \alpha(r)T, \quad (10)$$

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E(r)} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha(r)T. \quad (11)$$

FDM panelin herhangi bir noktasındaki malzeme özelliklerini tarif etmek için genel lineer karışım kanunu kullanılmıştır.

$$\text{Pr}_{eff}(r) = \text{Pr}_0 V_0(r) + \text{Pr}_1 V_1(r) \quad (12)$$

Denklem 12'de Pr_{eff} etkin malzeme özelliklerini belirtmektedir ve $0 \leq V_i \leq 1$ ile V_i malzeme hacim değişimini göstermektedir. Bunu birlikte, FDM'de belirtilen ve $V_0(a) = 1$, örneğinde gösterilen 0 (sıfır) panelin iç yüzeyinde saf bileşeni ve 1 indeksi ise ikinci bileşeni temsil etmektedir. Aşağıdaki denklemde verilmiştir.

$$V_1(r) = 1 - V_0(r). \quad (13)$$

Elastisite modülü üstel parametreye bağlı olarak değişmektedir:

$$E(r) = E_0 \left(\frac{r}{a} \right)^m \quad (14)$$

Buradan 0 (sıfır) bileşenin hacim değişim katsayısındaki bağıntı; 12, 13 ve 14 verilen denklemler yardımıyla elde edilir.

$$V_0(r) = \frac{E_0 \left(\frac{r}{a}\right)^m - E_1}{E_0 - E_1}. \quad (15)$$

Denklem 12’de genel karışım kanunu; ısıl genleşme katsayısı $\alpha(r)$, yoğunluk $\rho(r)$, tek eksenli akma gerilmesi $\sigma_y(r)$ ve ısıl iletkenlik $k(r)$ uygulanarak her birisi için ayrı ayrı elde edilir.

$$Pr_{eff}(r) = A_{Pr} \left(\frac{r}{a}\right)^m + B_{Pr} \quad (16)$$

$$A_{Pr} = \frac{E_0 (Pr_0 - Pr_1)}{E_0 - E_1}, \quad B_{Pr} = \frac{E_0 Pr_1 - E_1 Pr_0}{E_0 - E_1} \quad (17)$$

Burada; sırasıyla Pr ; α , ρ , σ_y ve k temsil etmektedir. Bu özellikler radyal koordinata bağlıken Poisson oranı sabit olduğu Horgan ve Chan (1999) tarafından varsayılmaktadır. Woo ve Meguid (2001) çalışmalarında, ortak çalışma koşullarında malzeme özelliklerine sıcaklığın etkisinin olmadığı kabul etmişlerdir.

FDM panel için temel denklemler elde edilebilir. İlk olarak, 11, 14, 16 ve 17’de verilen denklemler kullanılarak, eksenel gerilme bulunabilir.

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E_0 \left(\frac{r}{a}\right)^m \left[\left(A_\alpha \left(\frac{r}{a}\right)^m + B_\alpha \right) T \right] \quad (18)$$

Denklem 7’de verilen integralin çözümü;

$$\nu = rf \quad (19)$$

denklem 19’da f sadece θ ’nın bir fonksiyonudur. Denklem 6’nın θ ’ya göre türevinin alınması, ε_θ ve u ’nun sadece r ’ye bağlı olarak hesaplanabilmesi ile aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \theta^2} = 0 \quad (20)$$

Denklem 20’nin çözümüyle aşağıdaki ifade elde edilir;

$$\nu = C_1 r \theta \quad (21)$$

C_1 integral sabitidir. Denklem 5 ve 6, Hooke kanunu 9 ve 10; denklemlerin r ’ye göre türevinin alınmasıyla radyal ve açılma gerilmeler, σ_r ve σ_θ ; u cinsinden ifade edilebilir;

$$\sigma_r = \frac{E_0 \left(\frac{r}{a}\right)^m}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{l} \frac{\nu u}{r} + (1-\nu)u' + \nu C_1 \\ -(1+\nu) \left(A_\alpha \left(\frac{r}{a}\right)^m + B_\alpha \right) T \end{array} \right] \quad (22)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E_0 \left(\frac{r}{a}\right)^m}{(1-2\nu)} \left[\begin{array}{l} \frac{(1-\nu)u}{(1+\nu)r} + \frac{C_1(1-\nu) + \nu u'}{1+\nu} \\ - \left(A_{\alpha} \left(\frac{r}{a}\right)^m + B_{\alpha} \right) T \end{array} \right] \quad (23)$$

Denklem 22 ve 23, denklem 8'de yerine konularak yer değiştirme için diferansiyel eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & r^{1+m}u'' + (1+m)r^m u' - \frac{r^{-1+m} [1-\nu(1+m)]u}{1-\nu} \\ &= \frac{r^m}{1-\nu} \left[\begin{array}{l} C_1 [1-\nu(2+m)] + m \left(2A_{\alpha} \left(\frac{r}{a}\right)^m + B_{\alpha} \right) \\ \times (1+\nu)T + r \left(A_{\alpha} \left(\frac{r}{a}\right)^m + B_{\alpha} \right) (1+\nu)T' \end{array} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Denklem 24'ün çözümü ile u yer değiştirme eşitliği bulunur.

$$\begin{aligned} u &= C_2 r^{(-m+S)/2} + C_3 r^{(-m-S)/2} + \frac{C_1 r [1-\nu(2+m)]}{m} \\ & \frac{1+\nu}{2S(1-\nu) a^m r^{(m+S)/2}} \\ & \times \left[\begin{array}{l} (2-m-S)r^S \left(a^m B_{\alpha} \int_a^r \xi^{(m-S)/2} T d\xi + A_{\alpha} \int_a^r \xi^{(3m-S)/2} T d\xi \right) \\ - (2-m+S) \left(a^m B_{\alpha} \int_a^r \xi^{(m+S)/2} T d\xi + A_{\alpha} \int_a^r \xi^{(3m+S)/2} T d\xi \right) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

burada C_2 ve C_3 integral sabitleridir ve

$$S = \sqrt{4+m^2 - \frac{4m\nu}{1-\nu}} \quad (26)$$

Buradan denklem 22 ve 23 yeniden düzenlenerek;

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{C_1 E_0 \left(\frac{r}{a}\right)^m}{m(1+\nu)} + \frac{E_0 r^{(-2+m-S)/2}}{2a^m(1+\nu)(1-2\nu)} \\ & \times \left\{ C_3 [(2+m+S)\nu - m - S] + C_2 r^S [(2+m-S)\nu - m + S] \right\} \\ & + \frac{E_0 r^{(-2+m-S)/2}}{2Sa^{2m}(1-\nu)} \left[\begin{array}{l} (2+m-S)r^S \left(a^m B_{\alpha} \int_a^r \xi^{(m-S)/2} T d\xi + A_{\alpha} \int_a^r \xi^{(3m-S)/2} T d\xi \right) \\ - (2+m+S) \left(a^m B_{\alpha} \int_a^r \xi^{(m+S)/2} T d\xi + A_{\alpha} \int_a^r \xi^{(3m+S)/2} T d\xi \right) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\sigma_\theta = \frac{C_1 E_0 (1+m) \left(\frac{r}{a}\right)}{m(1+\nu)} - \frac{E_0 \left\{ C_3 r^{(-2+m+S)/2} [(2+m+S)\nu - 2] + C_2 r^{(-2+m-S)/2} [(2+m-S)\nu - 2] \right\}}{2(1+\nu)(1-2\nu)a^m} + \frac{E_0 r^{(-2+m-S)/2}}{4S(1+\nu)(1-2\nu)a^{2m}} \times \left\{ r^S [(m+S-2)(2+(S-m-2)\nu)] \left(a^m B_\alpha \int_a^r \xi^{(m-S)/2} T d\xi + A_\alpha \int_a^r \xi^{(3m-S)/2} T d\xi \right) \right. \\ \left. + [(m-S-2)(-2+(2+m+S)\nu)] \left(a^m B_\alpha \int_a^r \xi^{(m+S)/2} T d\xi + A_\alpha \int_a^r \xi^{(3m+S)/2} T d\xi \right) \right\} - 4Sr^{(2+m+S)/2} (a^m B_\alpha + r^m A_\alpha) (1-2\nu) T \tag{28}$$

ve σ_z denklem 18’den elde edilir.

Yukarıdaki temel denklemlerde C_1 , C_2 , ve C_3 olmak üzere üç tane integral sabiti mevcuttur.

Bu sabitlerin hesaplanması için gerekli sınır şartları Denklem 1-3 kullanılarak elde edilebilir.

$$C_1 = \frac{m(1+\nu)(1-2\nu)}{a^m L_1 (1-\nu) S} \tag{29}$$

$$\times \left\{ 2L_3 (a^S - b^S) + L_2 \left[a^S (m-S - (2+m-S)\nu) - r_0^S (m+S - (2+m+S)\nu) \right] \right\}$$

$$C_2 = - \frac{(1+\nu)}{2a^m L_1 (1-\nu) S \left\{ a^S [m-S - (2+m-S)\nu] - r_0^S [m+S - (2+m+S)\nu] \right\}} \times \left\{ [m+S - (2+m+S)\nu] L_1 L_3 + 2 \left[2a^{(2+m+S)/2} (1-2\nu) + r_0^{(2+m+S)/2} [1 - (2+m)\nu] \right] [m+S - (2+m+S)\nu] \right\} \tag{30}$$

$$\times (1-2\nu) \left\{ 2L_3 (a^S - b^S) + L_2 \left[r_0^S [m+S - (2+m+S)\nu] - a^S [m-S - (2+m-S)\nu] \right] \right\}$$

$$C_3 = \frac{a^{(-2+m+S)/2} (1+\nu)}{2SL_1 (1-\nu) \left\{ a^S [m-S - (2+m-S)\nu] - r_0^S [m+S - (2+m+S)\nu] \right\}} \times \left\{ a^{S/2} [m-S - (2+m-S)\nu] L_1 L_3 - 2r_0^{S/2} \left[2a^{(2+m)/2} (1-2\nu) + a^{S/2} [1 - (2+m)\nu] \right] [m-S - (2+m-S)\nu] \right\} \tag{31}$$

$$\times (1-2\nu) \left\{ 2L_3 (a^S - b^S) + L_2 \left[a^S [m-S - (2+m-S)\nu] - r_0^S [m+S - (2+m+S)\nu] \right] \right\}$$

Burada;

$$\begin{aligned}
L_1 = & \left\{ b^S [m - S - (2 + m - S)\nu] - r_0^S [m + S - (2 + m + S)\nu] \right\} \\
& \times \left\{ 2a^{(2+m+S)/2} (1 - 2\nu) + r_0^{(2+m+S)/2} (1 - (2 + m)\nu) [m + S - (2 + m + S)\nu] \right\} \\
& - \left\{ a^S [m - S - (2 + m - S)\nu] - r_0^S [m + S - (2 + m + S)\nu] \right\} \\
& \times \left\{ 2b^{(2+m+S)/2} (1 - 2\nu) + r_0^{(2+m+S)/2} (1 - (2 + m)\nu) [m + S - (2 + m + S)\nu] \right\}
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
L_2 = & b^S (2 - m - S) \left[a^m B_\alpha \int_a^b r^{(m-S)/2} T dr + A_\alpha \int_a^b r^{(3m-S)/2} T dr \right] \\
& - (2 + m + S) \left[a^m B_\alpha \int_a^b r^{(m+S)/2} T dr + A_\alpha \int_a^b r^{(3m+S)/2} T dr \right]
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
L_3 = & r_0^S (2 - m - S) \left[a^m B_\alpha \int_a^{r_0} r^{(m-S)/2} T dr + A_\alpha \int_a^{r_0} r^{(3m-S)/2} T dr \right] \\
& - (2 - m + S) \left[a^m B_\alpha \int_a^{r_0} r^{(m+S)/2} T dr + A_\alpha \int_a^{r_0} r^{(3m+S)/2} T dr \right]
\end{aligned} \tag{34}$$

Buna ilaveten, Denklem 28’de verilen açısıl doğrultudaki gerilme σ_θ ve Denklem 4’te yerine konularak eğilme momenti M ; aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
M = & \frac{E_0}{a^m (1 + \nu)} \left\{ \frac{C_1 (1 + m)}{m(2 + m)} (b^{2+m} - a^{2+m}) + \frac{C_2 [(2 + m - S)\nu - 2]}{(2 + m + S)(1 - 2\nu)} \right. \\
& \times \left. \left(a^{(2+m+S)/2} - b^{(2+m+S)/2} \right) - \frac{C_3 [(2 + m + S)\nu - 2]}{(2 + m - S)(1 - 2\nu)} \left(a^{(2+m-S)/2} - b^{(2+m-S)/2} \right) \right\} \\
& + \frac{E_0}{2Sa^{2m} (1 - \nu)^2} \left\{ [m + S - 2 + (2 + m - S)\nu] \right. \\
& \times \left[a^m B_\alpha \int_a^b r^{(m+S)/2} \left(\int_a^r \xi^{(m-S)/2} T d\xi \right) dr + A_\alpha \int_a^b r^{(m+S)/2} \left(\int_a^r \xi^{(3m-S)/2} T d\xi \right) dr \right] \\
& + [2 - m + S - (2 + m + S)\nu] \\
& \times \left[a^m B_\alpha \int_a^b r^{(m-S)/2} \left(\int_a^r \xi^{(m+S)/2} T d\xi \right) dr + A_\alpha \int_a^b r^{(m-S)/2} \left(\int_a^r \xi^{(3m+S)/2} T d\xi \right) dr \right] \left. \right\} \\
& - \frac{E_0}{a^{2m} (1 - \nu)} \left(B_\alpha \int_a^b r^{1+m} T dr + A_\alpha \int_a^b r^{1+2m} T dr \right)
\end{aligned} \tag{35}$$

2.3. Sıcaklık Alanı

Sıcaklık değişimi kararlı durum olarak ele alındığında iç veya dış yüzeylerin sıcaklık artışı yavaşça arttığı düşünülmüştür ve zamandan bağımsız olarak hesaplanmıştır. Peng ve Li (2010) tarafından elde edilen sıcaklık denklemi kullanılmaktadır ve Denklem 36’da verilmiştir.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[rk(r) \frac{dT(r)}{dr} \right] = 0 \quad (36)$$

Radyal yönde ısı iletkenlik katsayısı $k(r)$ ve Denklem 16, 17'deki denklemlerin çözümüne aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$T(r) = \frac{D_1 \left\{ m \ln(r) - \ln \left[A_k \left(\frac{r}{a} \right)^m + B_k \right] \right\}}{mB_k} + D_2 \quad (37)$$

burada D_1 ve D_2 integral sabitleridir. Denklem 37'de verilen sıcaklık denkleminde iç yüzey sıcaklığı için T_a ve dış yüzey sıcaklığı T_b tanımlanması yapılır;sa;

$$T(a) = T_a \quad T(b) = T_b \quad (38)$$

Denklem 39 elde edilmiş olur.

$$T(r) = \frac{\left\{ m \ln(r/b) + \ln \left[A_k (b/a)^m + B_k \right] - \ln \left[A_k (r/a)^m + B_k \right] \right\} T_a}{-m \ln(b/a) - \ln \left[A_k + B_k \right] + \ln \left[A_k (b/a)^m + B_k \right]} + \frac{\left\{ -m \ln(r/a) + \ln \left[A_k (r/a)^m + B_k \right] - \ln \left[A_k + B_k \right] \right\} T_b}{-m \ln(b/a) - \ln \left[A_k + B_k \right] + \ln \left[A_k (b/a)^m + B_k \right]} \quad (39)$$

2.4. Gerilme Dağılımı ve Üstel Derecelendirme Etkisi

Yukarıda elde edilen denklemler ile gerilmeler hesaplanabilir hale gelmiştir. Elastik sınırları belirlemek için von Mises akma kriteri kullanılmıştır ve akma denklemi;

$$\sigma_M(r) = \sigma_y(r), \quad \sigma_M = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 \right]} \quad (40)$$

şeklinde verilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar için aşağıdaki boyutsuz ifadeler kullanılmıştır.

$$\bar{k} = \frac{k}{k_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{E} = \frac{E}{E_0}, \quad \bar{M} = \frac{M}{a^2 \sigma_{y,0}} \quad (41)$$

$$\bar{T} = \frac{\alpha_0 E_0 T}{\sigma_{y,0}}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad \bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_{y,0}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (42)$$

FDM paneldeki üstel dereceleme indeksi m_{ext} aşağıdaki gibidir.

$$m_{ext} = \frac{\ln(\bar{E}_1)}{\ln(b)} \quad (43)$$

Buradan; sırasıyla $m_{ext} \leq m < 0$ veya $0 < m \leq m_{ext}$ bağıntısıyla $\bar{E}_1 > 1$ veya $\bar{E}_1 < 1$ ilişkilidir.

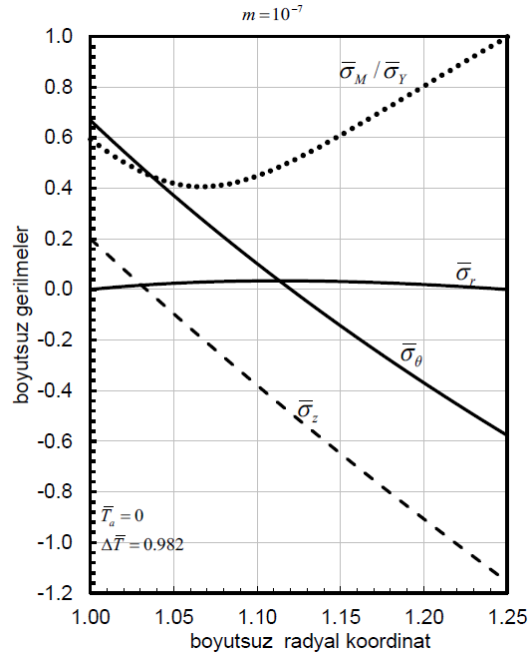
Sıcaklık alanı dağılımı özellikle yüzey sıcaklık farkları $\Delta T = T_b - T_a$ üstel dereceleme indeksi m değerine göre uygun olarak alınır. İç yüzey ve dış yüzey sıcaklığı daima referans sıcaklık değerinde tutulmaktadır.

2.5. Sayısal Sonuçlar

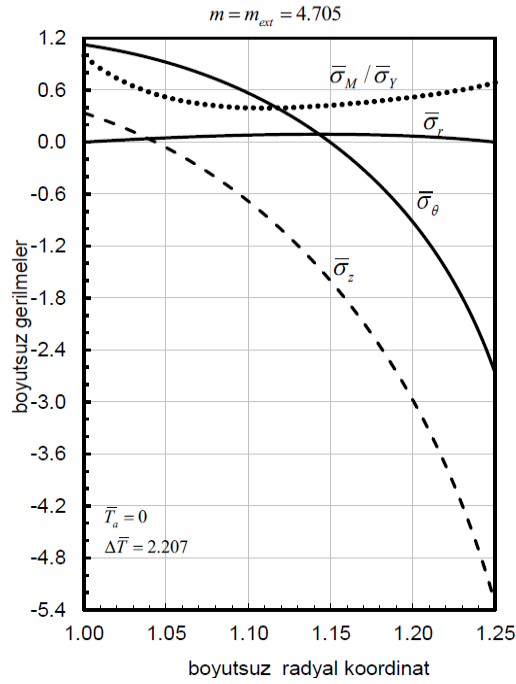
Silindirik eğri eksenli Alüminyum/Çelik FDM panelin farklı sıcaklık durumu için elastik gerilmeler analitik olarak incelenmiştir. Bu denklemleri sayısal olarak hesaplamak için, malzeme özellikleri ve yüzey yarıçap oranları belirtilmiştir. Panel yarıçap oranı $b/a=1,25$, $\nu=0,3$, $E_1/E_2=2,86$, $\alpha_1/\alpha_2=0,72$, $k_1/k_2=0,21$, $\sigma_{y,1}/\sigma_{y,0}=6,67$, $\rho_1/\rho_2=2,86$ değerleri alüminyum/çelik panel için (iç yüzeyi alüminyum ve dış yüzeyi çelik) boyutsuz ifadelerdir. Burada Denklem 43 kullanılarak maksimum FDM üstel dereceleme indeksi $m_{ext}=4,705$ elde edilir. Gerilme dağılımları farklı yüzey sıcaklık durumuna göre hesaplanmıştır. Bu yüzey sıcaklık farkları ($\Delta T = T_b - T_a$) m üstel parametresine uygun şekilde $\Delta T > 0$, $\Delta T < 0$ ve $\Delta T = 0$ üç farklı sıcaklık durumu incelenmiştir. Öncelikle $m=10^7 \approx 0$ dereceleme indeksine göre homojen malzemenin gerilme ve elastik sınır değeri incelenmiş olup Şekil 2’de gösterilmektedir. Homojen malzeme Al’den oluşmaktadır ve eğri eksenli homojen paneli pozitif sıcaklık altında dış yüzeyde akmaya başladığı görülmektedir.

Şekil 3’de $m=m_{ext}=4,705$ üstel dereceleme indeksine göre eğri eksenli panelde ki gerilme dağılımının pozitif sıcaklık etkisi altındaki elastik akma sınırını göstermektedir. Bu sıcaklık etkisi panelin iç yüzey sıcaklığı $T_a=0$ ’da sabit tutulup T_b sıcaklığı ise yavaş bir şekilde artırılarak panelin elastik akma sınırına $\Delta T = 2,207$ (plastik akma başlamadan önceki durum) kadar ısıtılması ile oluşan gerilme dağılımları elde edilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi akma panelin iç yüzeyinde başlamıştır. Şekil 4’de homojen sıcaklık etkisi altında panelin iç ve dış yüzey sıcaklıkları $T_a=T_b=1,018$ olup eğri eksenli panelin gerilme dağılım grafiği görülmektedir. Negatif sıcaklık etkisi altında $T_b=0$ ve $T_a=0,881$ değerindedir (Şekil 5’e bakınız). Bu durumda panelin dış yüzey sıcaklığı sabit tutulup iç yüzey sıcaklığı yavaş artırılarak elastik sınıra kadar ısıtılır. Şekil 5’te görüleceği gibi akma panelin iç yüzeyinde meydana gelmiştir. Verilen gerilme dağılım grafiklerinde, akma oranı von Mises akma kriterine göre ele alınıp elastik sınır $\bar{\sigma}_M / \bar{\sigma}_y \leq 1$ olduğunda, FDM panelde elastik sınırın tespit edildiği asıl gerilmelere ek olarak $\bar{\sigma}_M / \bar{\sigma}_y$ oranı da gösterilmektedir.

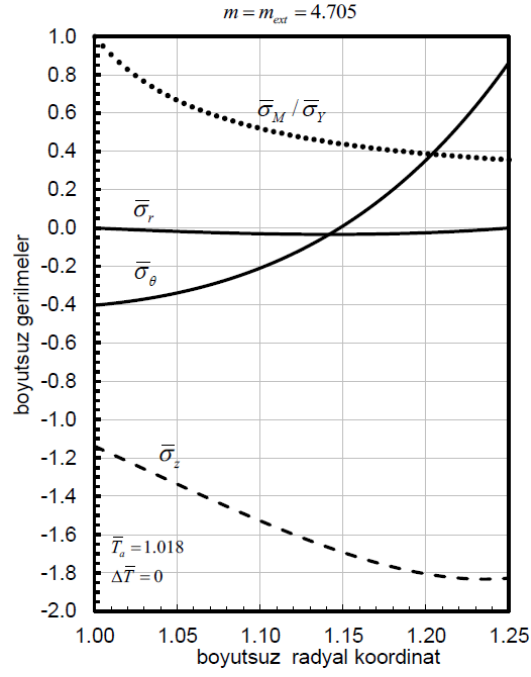
Şekil 6’da FDM panelde farklı sıcaklık durumu için radyal ve yer değiştirmeler verilmiştir ve radyal yönde yer değiştirme Denklem 3’te verilen sınır şartını sağlamaktadır. Şekil 7’de eğri eksenli FDM paneldeki çeşitli m değerine göre sıcaklık dağılımı verilmektedir. Burada pozitif ve negatif sıcaklık etkisi altındaki FDM panelin elastik sınırlarını belirlemektedir. Şekil 7’de üstel dereceleme indeksi $m=m_{cr}=1,535$ değerinde ve pozitif sıcaklık etkisi altında FDM panel aynı anda hem iç hem de dış yüzeylerde akma meydana gelmekte fakat bu durum negatif sıcaklıkta karşılaşılmamaktadır. Negatif sıcaklıkta sadece panelin iç yüzeyinde akma oluşmaktadır.



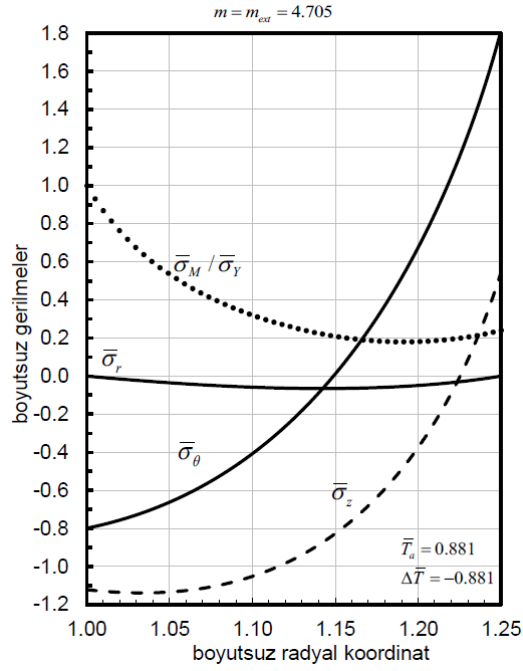
Şekil 2:
 $m=10^{-7}$ üstel dereceleme indeksine göre $\Delta T=0,982$ sıcaklığındaki gerilme dağılımları



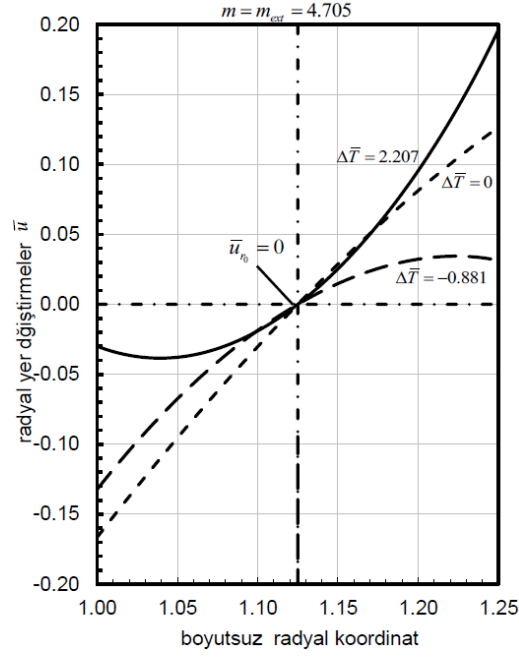
Şekil 3:
 $m=m_{ext}=4,705$ üstel dereceleme indeksine göre $\Delta T=2,207$ sıcaklığındaki gerilme dağılımları



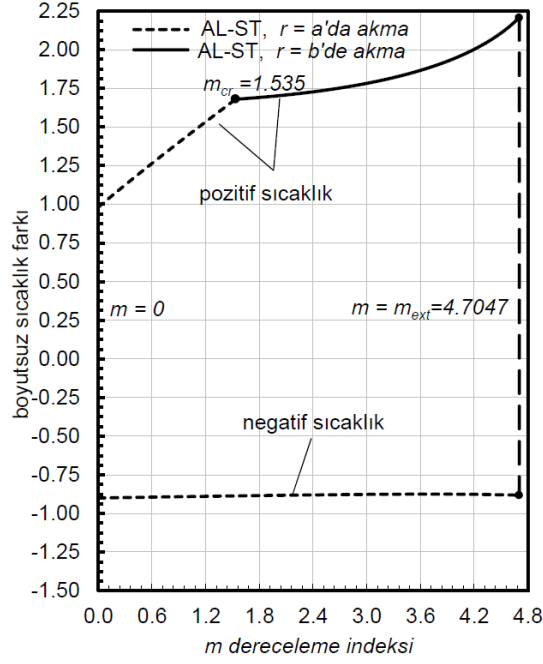
Şekil 4:
 $m = m_{ext} = 4,705$ ve $\Delta T = 0$ sıcaklığındaki gerilme dağılımları



Şekil 5:
 $m = m_{ext} = 4,705$ ve $\Delta T = -0,881$ sıcaklığındaki gerilme dağılımları



Şekil 6:
 $m=m_{ext}=4,705$ ve farklı ΔT sıcaklıklarındaki radyal yer değiştirmeler



Şekil 7:
Çeşitli m parametresine bağlı sıcaklık dağılımı

3. SONUÇ

Bu çalışmada, radyal sıcaklık değişimi altında alüminyum/çelik silindirik eğri eksenli düzlem şekil değiştirme durumundaki FDM panel için elastik davranışı ve gerilmelerin bir analitik çözümü elde edilmiştir.

Özellikle üstel kanun derecelemesindeki değişimin etkisi, karışım kanunu, bütün malzemelerin uygun özellikleri (Poisson oranı hariç) radyal koordinat özellikleri hesaba alınarak detaylı bir çalışma yapılmıştır. FDM eğri eksenli panelin; iç yüzeyi, dış yüzeyi ve aynı anda her iki yüzeyinde de sıcaklık artışı olduğunda elastik sınır noktası von Mises akma kriterine göre incelenmiştir.

FDM panel Al/Çelik olarak ele alınmış olup $m=m_{ext}=4,705$ üstel dereceleme indeksine göre (panelin iç yüzeyi alüminyum ve dış yüzeyi çelik) farklı sıcaklıklardaki elastik sınır incelenmiş ve panelin iç kısmında akma olduğu görülmüştür. Bunun nedeni olarak panelin Al/Çelik ve aynı zamanda açısız yönde bulunan mesnetlerin etkisi; panelde plastik akmanın iç bölgede olmasının sebeplerinden biri olarak düşünülmektedir.

Yapılan çalışmada sadece panelin elastik sınırları incelenmiştir. Çalışma elastik-plastik akma sınırları için analitik olarak incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Arslan, E., Mack, W., ve Gamer, U. (2013). Elastic limits of a radially heated thick-walled cylindrically curved panel. *Forschung im Ingenieurwesen*, 77(1-2), 13-23. doi.org/10.1007/s10010-013-0162-6
2. Arslan, E., ve Eraslan, A. N. (2010). Analytical solution to the bending of a nonlinearly hardening wide curved bar. *Acta Mechanica*, 210(1-2), 71-84. doi.org/10.1007/s00707-009-0195-y
3. Arslan, E., ve Haskul, M. (2015). Generalized plane strain solution of a thick-walled cylindrical panel subjected to radial heating. *Acta Mechanica*, 226(4), 1213-1225. doi.org/10.1007/s00707-014-1248-4
4. Arslan, E., ve Mack, W. (2014). Elastic-plastic states of a radially heated thick-walled cylindrically curved panel. *Forschung im Ingenieurwesen*, 78(1-2), 1-11. doi.org/10.1007/s10010-014-0170-1
5. Dadras, P. (2001). Plane strain elastic-plastic bending of a strain-hardening curved beam. *International journal of mechanical sciences*, 43(1), 39-56. doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00102-2
6. Duc, N. D., ve Van Tung, H. (2010). Nonlinear response of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels with temperature effects. *Composite Structures*, 92(7), 1664-1672. doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.11.033
7. Eraslan, A. N., ve Arslan, E. (2008). A concise analytical treatment of elastic-plastic bending of a strain hardening curved beam. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 88(8), 600-616. doi.org/10.1002/zaam.20060037
8. Haskul, M., Arslan, E., ve Mack, W. (2017). Radial heating of a thick-walled cylindrically curved FGM-panel. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 97(3), 309-321. doi.org/10.1002/zamm.201500310
9. Horgan, C. O., ve Chan, A. M. (1999). The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials. *Journal of Elasticity*, 55(1), 43-59. doi.org/10.1023/A:1007625401963

10. Kiani, Y., Shakeri, M., ve Eslami, M. R. (2012). Thermoelastic free vibration and dynamic behaviour of an FGM doubly curved panel via the analytical hybrid Laplace–Fourier transformation. *Acta Mechanica*, 223(6), 1199-1218. doi.org/10.1007/s00707-012-0629-9
11. Librescu, L., Nemeth, M. P., Starnes Jr, J. H., ve Lin, W. (2000). Nonlinear response of flat and curved panels subjected to thermomechanical loads. *Journal of thermal stresses*, 23(6), 549-582. doi.org/10.1080/01495730050143134
12. Peng, X. L., ve Li, X. F. (2010). Thermal stress in rotating functionally graded hollow circular disks. *Composite Structures*, 92(8), 1896-1904. doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.01.008
13. Shaffer, B. W., ve House Jr, R. N. (1957). Displacements in a wide curved bar subjected to pure elastic-plastic bending. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 24, 447-452.
14. Shaffer, B. W., ve House, R. N. (1954). The elastic-plastic stress distribution within a wide curved bar subjected to pure bending. *New York Univ Bronx School of Engineering and Science*.
15. Timoshenko S.P ve Goodier J.N., (1970). "Theory of Elasticity" McGraw-Hill Book Company.
16. Woo, J., ve Meguid, S. A. (2001). Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells. *International Journal of Solids and structures*, 38(42-43), 7409-7421. doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00048-8

