

# Kovaryans Matrisi Tahmininin Portföy Seçimine Etkisi: İMKB’de Farklı Yatırım Ufukları için Uygulama

*The Effect of Covariance Matrix Estimation on Portfolio Selection Process: The Application for Different Investment Horizons in ISE*

Gülferen TUNA<sup>1</sup>

## ÖZET

Portföy seçim sürecinde; beklenen getiri vektörü ve kovaryans matrisinin tahmin edilmesi iki önemli girdidir. Bu çalışmada farklı tekniklerin kullanılması ile gerçekleştirilen kovaryans matrisi tahmininin; portföy riski üzerindeki etkisinin araştırılması odaklanılmıştır. Portföy seçim işlemi 1986:01-2009:12 dönemleri arasında gerçekleştirilmiştir. Veri seti olarak da bu dönem içinde İMKB’de işlem gören tüm hisse senetlerinin günlük kapanış fiyatları kullanılmıştır. Portföy seçim modeli olarak Markowitz Modeli kullanılmıştır. Yatırım ufku olarak bir gün, bir hafta, on beş gün, bir ay ve bir yıllık periyotlar tercih edilmiştir. Kovaryans tahmin edicileri olarak ise örnek kovaryans tahmin edicisi ile Ledoit ve Wolf(2004) tarafından geliştirilen küçülme tahmin edicisi kullanılmıştır. Araştırma sonucuna göre Ledoit ve Wolf (2004)’ün küçülme tahmin edicisi ile İMKB’de daha düşük riske sahip olan ve daha kolay yönetilebilir portföy seçeneklerine ulaşmak mümkün olmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Kovaryans tahmini, portföy seçimi, küçülme tahmin edicisi, örnek kovaryans tahmin edicisi, yatırım ufku.

## ABSTRACT

The expected return vector and covariance matrix estimation are important input on the portfolio selection process. In this study, the use of different techniques to estimate the covariance matrix have been focused on the research of impact on portfolio risk. Portfolio selection process is carried out the periods of 1986:01-2009:12. The daily closing price of all stocks listed on the ISE as data set in this period is used. Markowitz portfolio selection model is used as a model. Investment horizon of one day, a week, for fifteen days, one month and one-year periods were chosen. The sample covariance estimator with the shrinkage estimator developed by Ledoit and Wolf(2004) as covariance estimators is used. According to the research results, the ISE with a lower risk and more easily managed portfolio options have been able to achieve by shrinkage estimator of Ledoit and Wolf(2004).

**Keywords:** Covariance estimation, portfolio selection, shrinkage estimator, sample covariance estimator, investment horizon.

## 1. GİRİŞ

Sermaye piyasası yatırımcıları, etkin sınır üzerinde yer alan portföy seçeneklerine ulaşmayı hedefler. Çünkü bu portföyler, yatırımcısına minimum risk düzeyi için maksimum getiriyi sunmaktadır. Etkin portföy seti içine dahil edilecek olan menkul kıymetlerin belirlenmesinde ise yatırımcının üstlenilebileceği risk düzeyi en önemli etken olarak yatırımcı tercihlerine yön vermektedir. Bu çalışmanın uygulama kısmında yatırımcı tarafından tercih edileceği düşünülen portföyler, Harry Markowitz (1952) tarafından geliştirilen Ortalama-Varyans Modeli ile oluşturulmuştur. Bu modelde ihtiyaç duyulan bilgiler aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Ceylan ve Korkmaz, 1998:129):

1. Portföye alınacak her bir menkul kıymetin beklenen getirisinin hesaplanması,

2. Portföye alınacak her bir menkul kıymetin varyans veya standart sapmasının hesaplanması,

3. Portföye girebilecek bütün menkul kıymetler ikişer ikişer ele alındığında kovaryansları veya aralarındaki korelasyon katsayılarının hesaplanması gerekmektedir.

Model için ihtiyaç duyulan bilgilerden anlaşıldığı gibi beklenen getiri vektörü ve kovaryans matrisi tahmini portföy seçimindeki önemli optimizasyon girdileridir. Bu çalışmadaki amaç; farklı yöntemlerin kullanılması ile tahmin edilen kovaryans matrislerinin, oluşturulan portföylere ait risk değerlerini nasıl etkilendiğini açıklamaktır. Bu nedenle Standart Ortalama-Varyans Modeli’nden farklı olarak beklenen getiri vektörünün tahmin edilmesine ihtiyaç duymayan minimum varyanslı portföy seçim modeli esas alınmıştır.

Literatürde en çok kullanılan portföy seçim modeli Markowitz Ortalama-Varyans Modeli olup, kovaryans matrisinin tahmin edilmesinde kullanılan

<sup>1</sup> Yrd.Doç.Dr., Sakarya Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Finansal Ekonometri Bölümü, [geksi@sakarya.edu.tr](mailto:geksi@sakarya.edu.tr)

yöntem ise örnek kovaryans matrisi tekniğidir. Örnek kovaryans matrisi tekniğinin yaygın olarak tercih edilmesinin en önemli nedenleri arasında uygulama kolaylığı ve ileri bir bilgisayar programına ihtiyaç duyulmaması gösterilebilir. Oysaki yaygın kullanım alanı bulan bu teknik, büyük örneklem grupları için içerdiği tahmin hatasının fazlalığı nedeniyle sınıtlıdır. Bu nedenle araştırmacılar, tahmin hatalarını en düşük düzeye indirebilmek için örnek kovaryans matrisinden de yararlanarak, alternatif yöntemlerle yeni kovaryans matrisleri oluşturmaya çalışmaktadır. Kovaryans matrisinin tahmin edilmesinde kullanılan veri sayısı incelendiğinde, hisse senedi sayısı olan  $N$ , tahmin periyodu olan  $T$ 'den daha büyük olduğunda, tahmini gerçekleştirilen kovaryans matrisi büyük miktarlarda tahmin hatası içermektedir. Böyle bir durumda,  $N > T$  koşulunu sağlayan bir kovaryans matrisi; hata payı yüksek olarak tahmin edilmiş olacaktır. Bu problemi ortadan kaldırmak amacıyla Ledoit ve Wolf (2004), sabit korelasyon matrisine küçülme dönüşümünü uygulayarak yeni bir kovaryans matrisi elde etmiştir. Bu yeni yöntem ile kovaryans matrisindeki tahmin hatalarının minimum düzeye indirilmesi başarılmıştır. Yapılan bilimsel çalışmalara ait sonuçlar, bu tekniğin yaygın kullanım alanı bulan örnek kovaryans matrisi tekniğinden daha etkin sonuçlar verdiğini göstermiştir. Gerçekleştirilen literatür incelemesinde, ilk defa Ledoit ve Wolf (2004) tarafından geliştirilen sabit korelasyon matrisini kullanan küçülme tahmin edicilerinin başarı düzeyi dünya üzerindeki çeşitli piyasalar üzerinde test edilmesine rağmen, Türkiye'deki Menkul Kıymet Piyasaları için böyle bir tekniğin kullanılması ile portföy seçimine rastlanılmamıştır. Letaratürdeki bu boşluktan hareket ederek, İMKB'de 1986:01-2009:12 döneminde farklı yatırım ufkuna sahip yatırımcılar için en düşük riske sahip portföy seçenekleri belirlenmeye çalışılmıştır. Bu işlem gerçekleştirilirken, kullanılan en önemli optimizasyon girdilerinden biri olan kovaryans matrisi, iki farklı yöntem ile tahmin edilmiştir. Elde edilen bulgular doğrultusunda farklı tahmin ediciler ile oluşturulan portföylere ait riskler arasındaki ilişkinin incelenmesi için de; beş farklı yatırım ufkuna sahip yatırımcı için portföy seçim işlemi, ilgili dönem için birbirini takip edecek şekilde tekrar edilmiştir. Ayrıca kovaryans matrisinin tahmini ile ilgili olarak yapılan literatür incelemelerinde genel olarak aylık veri setinin kullanılması da dikkat çekici bir konudur. Bu çalışma, literatürdeki diğer çalışmalardan incelenen veri setinin sıklığı ile de farklılaşmaktadır. Çalışmadaki veri seti günlük, haftalık, on beş günlük, aylık ve yıllık olarak organize edilmiş, gerçekleştirilen tahmin-

ler bu veri setleri üzerinden yapılmıştır. Ayrıca kullanılan veri seti sıklığı yatırımcının bir sonraki dönem için gerçekleşen risk değerinin hesaplanmasında da yatırım ufkusu olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla bu çalışmanın literatüre üç önemli noktada katkı sağlaması beklenmektedir. İlk olarak kovaryans matrisinin tahmin edilmesi ile ilgili olarak literatürde gerçekleştirilen ilerlemelerin, Türkiye'deki Menkul Kıymet Piyasaları üzerindeki başarı düzeyinin incelenmesi ve genel bir değerlendirme yapılabilmesi açısından önemlidir. Çünkü yapılan literatür incelemelerinde portföy seçim sürecinde kovaryans matrisinin tahmin edilmesine odaklanılan herhangi bir çalışmaya Türkiye'de rastlanılmamıştır. İkinci olarak bu çalışma; portföy seçiminde alternatif tekniklerin kullanılması ile tahmini gerçekleştirilen optimizasyon girdilerinin, portföy riski üzerindeki etkilerinin ortaya konması açısından önemlidir. Son olarak ise portföy seçim modellerinde belirlenen yatırım ufkunun, optimizasyon girdilerinin farklı yöntemler ile tahmin edilmesi durumunda; yatırımcının gerçekleşen riskini nasıl değiştirdiğinin incelenmesi açısından önemlidir.

Çalışma; farklı kovaryans matrisi tahmin edicileri kullanılması ile oluşturulan kovaryans matrislerinin; İMKB'de farklı kısıtlar altında elde edilen minimum varyanslı portföyler üzerindeki etkilerini incelemek üzere beş bölümden oluşmaktadır. Bu şekilde portföy seçim modeline ilave edilen her yeni kısıtın, tahmin edilen risk değeri üzerindeki etkisi farklı kovaryans tahmin edicileri için incelenmeye çalışılmıştır. Bu doğrultuda kullanılan kovaryans tahmin edicileri; örnek kovaryans tahmin edicileri ile Ledoit ve Wolf (2004)'ün küçülme tahmin edicileridir. Ayrıca çalışma; araştırmada kullanılan iki farklı tahmin ediciden yararlanarak her dönem için elde edilen minimum varyanslı portföyleri, yatırımcının bir sonraki dönem sonuna kadar elinde tutması durumunda gerçekleşen risk değerlerinin ne olacağına da belirlenmesi açısından da önemlidir. Bu şekilde yatırımcının tercih ettiği portföy seçim modeline göre şekillendirdiği yatırım alternatifinden dolayı maruz kalacağı gerçek risk değerinin belirlenmesi de gerçekleştirilmiş olmaktadır. Bu hedefler doğrultusunda giriş bölümünün ardından ikinci bölümde literatür çalışmalarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde uygulama kısmında kullanılan araştırma yöntemleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Dördüncü bölümde farklı tekniklerin kullanılması ile elde edilen kovaryans matrisleri aracılığıyla hesaplanan minimum varyanslı portföylere ait olarak elde edilen risk değerlerine yer verilmiştir. Ayrıca farklı dönemler için hesaplanan portföy seçeneklerinin bir sonraki döneme kadar yatırımcının

elinde tutulması durumunda gerçekleşen risk değerlerinin neler olduğu belirlenmiştir. Son bölümde ise elde edilen bulgular, incelenen literatür doğrultusunda değerlendirilmiştir.

## 2. LİTERATÜR ÖZETİ

Beklenen getiri vektörü ve kovaryans matrisi, portföy seçim sürecinde kullanılan önemli gidilerdir. Optimizasyon girdilerinden biri olan ve çok yaygın olarak kullanılan örnek kovaryans matrisi, geçmişteki getiri verileri kullanılarak hesaplanır. Örnek kovaryans matrisi hesaplaması oldukça kolay olmasına rağmen optimizasyon sürecinde bir takım sorunları da beraberinde getiren bir tekniktir.

Elton ve Gruber (1973) örnek kovaryans matrisini kolay hesaplanmasına rağmen, içerdiği elemanlara ait tahmin hatalarının fazla olması nedeniyle eleştirmiştir. Ayrıca Elton, Gruber ve Urich (1978) ile Eun ve Resnick (1984)'de örnek kovaryans matrisi tekniğinin kullanımı ile gerçekleştirilen geleceğe yönelik tahminlerdeki, tahmin hataları ile ilgilenmiştir. Araştırma sonucunda her iki araştırmacı grubu da örnek kovaryans matrisinin yüksek tahmin hatası taşıdığını belirlemiştir.

Pafka ve Kondor (2004), hisse senedi sayısı ve kullanılan dönem sayılarının örnek kovaryans matrisine ait hesaplamalardaki etkisini incelemiştir. Araştırma sonucu; hisse senedi sayısı olan  $N$ , kullanılan periyot sayısı olan  $T$ 'den daha büyük olduğunda, örnek kovaryans matrisinin büyük tahmin hatalarına sahip olduğunu göstermektedir. Bu da yatırımcının portföyüne dâhil edilen hisse senetlerine ait ortalama getiri ve varyans değerleri ile tanımlanan fayda fonksiyonunun; hatalı tahmin edilmesine neden olmaktadır.

Örnek kovaryans matrisi tahmin edicilerinin karşılaştığı diğer önemli bir sorun ise hesaplanmak zorunda olunan parametre sayısıdır. Örnek kovaryans matrisi hesaplamalarında  $N$  tane hisse senedi için,  $[N \times (N-1)]/2$  adet kovaryans çifti hesaplamak gerekir. Küçük örneklem için bu durum sorun olarak görülmezken, büyük örneklem gruplarında bu hesaplamaları yapmak oldukça zor ve zaman alıcı bir iştir. Bu nedenle parametre sayısının fazlalığından dolayı ortaya çıkan problemleri ortadan kaldırmak için alternatif teknikler geliştirilmiştir. Ancak bu yeni teknikler parametre sayısını azaltırken, yapılan tahminlerde yeni hata değerlerinin ortaya çıkmasına da neden olmuştur.

Kovaryans matrisi tahmin edicilerinden olan küçülme metodu, Stein (1955)'in ilk çalışmaları ile ortaya çıkmıştır. Küçülme tekniğinin uygulanmasında-

ki temel amaç, örnek kovaryans tahmin edicilerinin tahmin hata düzeyini azaltmaktır. Bu hedefi gerçekleştirmek amacıyla küçülme tahmin edicileri; dönüştürülebilir kovaryans matrisi ile örnek kovaryans matrisinin optimal bir şekilde ağırlıklı ortalamasını alarak yeni bir kovaryans matrisini tahmin ederler.

Frost ve Savarino (1986) ile Jorion (1986) küçülme tahmin edicisinin performansını değerlendirmek amacıyla çeşitli durumlar için analizler yapmıştır. Bu araştırmacılar özellikle, hisse senetlerine ait olan gözlem sayısı, hisse senedi sayısını geçtiği durumlar için analiz yapmıştır. Araştırma sonuçlarına göre de hisse senedi sayısı, gözlem sayısını aştığı durumlarda bu teknik başarısız olmaktadır.

Jagannathan ve Ma (2000), portföy tahmin edicisi olarak adlandırılan farklı bir tahmin ediciyi, kovaryans matrisinin tahminlerinde kullanmıştır. Portföy tahmin edicileri, örnek kovaryans matrisi ve başka bir kovaryans matrisi tahmin edicisinin sonuçlarından eşit ağırlıklı olarak oluşan bir tahmin edicidir. Jagannathan ve Ma (2000) geliştirdiği bu tahmin edici ile örnek kovaryans matrisinden daha iyi sonuçlar elde etmiştir.

Bengston ve Holst (2002), 1977-1993 tarihleri arasında İsveç Piyasası'nda işlem gören hisse senetlerine ait getiri verilerini kullanarak temel bileşenler analizi ve bayesyen küçülmesi yöntemleri ile portföy optimizasyonunu, kısıtlı ve kısıtsız durumlar için gerçekleştirmiştir. Araştırma sonuçları örnek kovaryans matrisi tahmin edicilerinin tüm durumlar için en kötü sonucu verdiğini göstermektedir.

Jagannathan ve Ma (2003), küçülme tahmin edicilerine ait kısıtların bir araç olarak yorumlanabileceğini matematiksel olarak göstermiştir. Bunu yaparken tekli indeks modeli ve örnek kovaryans matrisinin eşit olarak ağırlıklandırılması ile elde edilen tahmin edicilerin, Ledoit ve Wolf (2003) tarafından geliştirilen tahmin edicilerinden daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir. Ayrıca oluşturulan portföylerde kısa satışa ait herhangi bir kısıt olması durumunda, Jagannathan ve Ma (2003) tarafından geliştirilen bu tahmin edicinin örnek kovaryans tahmin edicilerinden daha iyi sonuçlar verdiğini gösterilmiştir.

Ledoit ve Wolf (2003) faktör modellerin uygulanmasına alternatif bir yol olarak küçülme metodunu kullanmıştır. Çalışmasında NYSE ve AMEX için 1972:08-1995:07 dönemlerine ait verileri kullanılarak, portföy tahmin edicilerine karşılık uygulanan küçülme dönüşümünün portföy performansına etkisini test etmiştir. Burada küçülme tekniğinin kullanılması Sharpe'in Tekli Endeks Modeli'nden elde edilen

kovaryans matrisinin, ağırlıklı ortalama olarak örnek kovaryans matrisine dâhil edilmesi aracılığıyla gerçekleştirilmektedir. Araştırma sonuçları, elde edilen bu yeni kovaryans matrisi ile yapılan tahminlerin, geleneksel tahmin yöntemlerinden daha iyi sonuçlar verdiğini göstermektedir.

Ledoit ve Wolf (2004), sabit korelasyon matrisi ve örnek kovaryans matrisinin ağırlıklı ortalamasından faydalanarak elde edilen yeni kovaryans matrisinin tahmin sürecinde daha da başarılı olduğunu, 1983:02-2002:12 döneminde Amerikan hisse senetlerine ait aylık getiri verilerini kullanarak göstermiştir. Çalışmada sabit korelasyon matrisine küçülme adı verilen dönüşümün uygulanması sonucu elde edilen yeni matris aracılığıyla hesaplanan kovaryans matrisi ile elde edilen portföylerde, takip hatasının düşürülebileceğini göstermiştir. Bunu gerçekleştirirken aynı korelasyona sahip her bir hisse senedi çifti ile elde edilen sabit korelasyon matrisi, ağırlıklı ortalama olarak örnek kovaryans matrisine dahil edilmektedir. Ayrıca beklenen getiri tahmini ile ilgili olarak uygulanan yöntem neticesinde, elde edilen portföy seçeneklerine ait bilgi rasyosu değerinin de artış gösterdiği saptanmıştır. Bu da küçülme tekniğinin örnek kovaryans matrisi tekniğine göre daha iyi sonuçlar verdiğinin bir göstergesi olarak değerlendirilir.

Disatnik ve Benninga (2006) da portföy optimizasyonunda kovaryans matrisinin doğru tahmini ile ilgilenmiştir. Bunun için 1964:01-2003:12 döneminde NYSE’de işlem gören hisse senetlerine ait aylık getiri verilerini kullanmıştır. Mevcut tahmin edicilere ilave olarak “iki bloklu tahmin edici” diye adlandırdığı farklı bir yöntemi geliştirilmiştir. Geliştirilen bu yeni modelin çok başarılı sonuçlar vermesine rağmen, kovaryans matrisindeki çok küçük değişikliklere karşı hassas olması dikkat çekicidir. Çalışmada örnek kovaryans tahmin edicilere alternatif olarak geliştirilen küçülme tahmin edicilerinin portföy getirilerini önemli ölçüde etkilemediği belirlenmiştir.

Dünya üzerinde çeşitli menkul kıymet piyasalarında gerçekleştirilen portföy seçimlerinde; optimizasyon girdisi olarak kullanılan kovaryans matrisinin farklı teknikler ile tahmin edilmesinin etkisini inceleyen bir çok çalışma bulunmaktadır. Ancak Türkiye’deki Menkul Kıymet Piyasaları üzerinde yapılan literatür

araştırmalarında bu şekilde uygulamalı bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu nedenle de çalışmanın literatür incelemesi kısmında Türkiye ile ilgili çalışmalara yer verilememiştir. Çalışmanın, portföy seçim sürecinde düşük tahmin hatasına sahip kovaryans matrisi ile oluşturulan portföy setlerinin, gerçekleşen risk değerlerinin belirlenmesi açısından literatüre önemli katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca portföy seçim sürecinde optimizasyon girdilerinin karşılaştırmalı etkilerini göstermesi açısından bu çalışma ilk olma özelliğine sahiptir.

### 3. TAHMİN EDİCİLER İÇİN PORTFÖY SEÇİMİ: İMKB’DE FARKLI YATIRIM UFKU İÇİN UYGULAMA

#### 3.1. Araştırmada Kullanılan Veri Seti

Araştırmada kullanılan veri seti, İstanbul Menkul Kıymetler Borsası’nda, işlem gören tüm hisse senetlerine ait olan günlük, haftalık, on beş günlük, aylık ve yıllık getiri değerleridir. Farklı veri seti sıklıkları için ihtiyaç duyulan getiri verileri, günlük kapanış fiyatlarından faydalanarak oluşturulmuştur. Araştırma dönemi 1986:01-2009:12 tarihleri arasındadır. Hisse senetlerine ait olan tüm veriler, İMKB’den elde edilmiştir. Araştırma döneminde, İMKB’de işlem gören hisse senetlerine ait olan verilerin başlangıç tarihleri farklılıklar göstermektedir. Araştırma kapsamına alınan hisse senedi sayılarına ait olan verilere 1990:11 tarihinde başlanmasının nedeni ise, herhangi bir hisse senedinin optimizasyon sürecine dahil edilebilmesi için geriye dönük 60 adet kesintisiz veriye sahip olma şartıdır. Hisse senetlerine ait olan verilere 1986:01 tarihinden sonra ulaşılabildiği için, 60 adet veri şartı dolayısıyla optimizasyon sürecine de 1990:11 tarihinde başlanmaktadır. Geriye dönük olarak veri sayısının 60 adet olarak belirlenmesinin nedeni ise, daha önceden yapılan bilimsel çalışmalarda yaygın olarak bu değerin kullanılmasıdır. Yeterli veriye sahip olmayan hisse senetleri ise ilgili dönemin optimizasyon sürecine dahil edilmemiştir. Böylece araştırmada yanlıktan kaçınılarak, en düşük düzeyde tahmin hatası içeren portföy seçimlerinin gerçekleştirilmesi hedeflenmiştir. Buna göre optimizasyon sürecinde her ay için İMKB’de işlem gören ve optimizasyon sürecine dahil edilen hisse senedi sayılarına ilişkin olan değerler Tablo 1’de olduğu gibi gerçekleşmiştir.

Tablo 1:1990:11-2009:12 Döneminde İMKB'de İşlem Gören ve Optimizasyon İşlemine Dâhil Edilen Hisse Senedi Sayıları

YILLAR	OCAK		ŞUBAT		MART		NİSAN		MAYIS		HAZİRAN		TEMMUZ		AĞUSTOS		EYLÜL		EKİM		KASIM		ARALIK	
	İMKB'de İşlem Gören	Opt. İşlemine Dahil Edilen	İMKB'de İşlem Gören	Opt. İşlemine Dahil Edilen	İMKB'de İşlem Gören	Opt. İşlemine Dahil Edilen	İMKB'de İşlem Gören	Opt. İşlemine Dahil Edilen	İMKB'de İşlem Gören	Opt. İşlemine Dahil Edilen	İMKB'de İşlem Gören	Opt. İşlemine Dahil Edilen	İMKB'de İşlem Gören	Opt. İşlemine Dahil Edilen	İMKB'de İşlem Gören	Opt. İşlemine Dahil Edilen	İMKB'de İşlem Gören	Opt. İşlemine Dahil Edilen	İMKB'de İşlem Gören	Opt. İşlemine Dahil Edilen	İMKB'de İşlem Gören	Opt. İşlemine Dahil Edilen	İMKB'de İşlem Gören	Opt. İşlemine Dahil Edilen
1990	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1991	79	28	81	28	82	28	86	28	88	28	90	28	91	29	93	29	93	29	93	29	94	29	95	29
1992	96	29	96	29	97	29	97	30	97	32	97	36	98	36	100	36	100	37	102	37	102	37	102	37
1993	103	38	104	38	104	38	104	38	105	38	105	38	106	38	108	38	108	38	112	38	114	38	115	38
1994	117	39	119	40	120	41	120	41	122	41	122	41	123	42	124	43	124	45	129	48	133	49	134	53
1995	136	54	139	55	143	56	148	59	151	61	152	64	153	67	154	69	154	74	157	76	159	76	159	78
1996	160	80	160	81	163	85	164	87	167	89	168	90	169	92	170	92	170	92	177	93	177	94	179	95
1997	179	95	180	96	183	96	183	96	183	96	187	97	189	99	190	100	190	101	194	101	196	101	196	102
1998	196	103	199	103	201	103	202	104	206	104	209	105	213	107	214	111	214	111	214	113	214	114	215	116
1999	215	118	215	119	216	119	217	121	217	121	217	122	217	123	217	125	217	128	219	132	222	133	223	135
2000	229	138	233	142	234	147	238	150	241	151	248	152	251	153	251	156	253	156	255	158	255	158	255	159
2001	255	157	255	160	255	161	255	164	255	165	255	166	255	167	255	170	256	174	256	174	256	176	256	176
2002	259	179	259	182	259	182	259	182	259	186	261	188	261	189	261	192	261	193	261	195	261	195	261	195
2003	262	198	262	200	262	201	263	205	263	208	263	212	263	213	263	213	263	213	263	213	263	214	263	214
2004	265	214	266	215	266	216	268	216	271	216	272	216	273	216	273	216	273	218	276	222	276	223	276	229
2005	276	233	276	234	278	238	279	241	279	248	281	251	281	251	282	253	283	255	284	255	285	255	285	255
2006	287	255	287	255	289	255	292	255	297	255	298	255	300	255	300	255	301	255	302	255	303	254	303	255
2007	304	255	305	255	305	255	309	254	311	255	311	255	311	255	311	255	311	255	312	255	312	255	312	255
2008	312	255	312	255	312	255	314	255	314	255	314	255	314	255	314	255	314	255	314	255	314	255	314	255
2009	314	255	314	255	315	255	315	255	316	255	316	255	316	255	316	255	316	255	317	255	318	255	318	255



### 3.2. Araştırma Modeli

Araştırmada Markowitz Ortalama - Varyans Modeli'ne göre portföy seçim işlemi gerçekleştirilmiştir. Markowitz Modeli'nin esas alınması ile üç farklı durum için minimum varyanslı portföy seçim işlemi; yatırım ufku bir gün olarak belirlenen yatırımcılar için 4184 adet, yatırım ufku bir hafta olan yatırımcılar için 838 adet, yatırım ufku on beş gün olan yatırımcılar için 419 adet, bir ay olan yatırımcılar için 232 adet, yatırım ufku bir yıl olan yatırımcılar için ise 19 adet farklı dönemde gerçekleştirilmiştir. Buna göre portföy seçim modelleri aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

1. Model: Amaç Fonksiyonu	Min	$w^T \sum w$
Kısıtlar		$w^T 1 = 1$ $w > 0$
2. Model: Amaç Fonksiyonu	Min	$w^T \sum w$
Kısıtlar		$w^T 1 = 1$ $w > 0$ $w \leq \%3,33$
3. Model: Amaç Fonksiyonu	Min	$w^T \sum w$
Kısıtlar		$w^T 1 = 1$

Buradaki  $w$ ; her bir hisse senedinin portföy içindeki ağırlık vektörünü,  $w^T$ ;  $w$  vektörünün devriğini,  $1$ ; birler vektörünü,  $\sum$  ise kovaryans matrisini ifade etmektedir. Çalışmanın tüm modellerinde kullanılan amaç fonksiyonu (Min  $w^T \sum w$ ), oluşturulan toplam portföy riskinin en düşük düzeyde olmasını ifade etmektedir. Birinci modelde toplam portföy riskinin minimum olması şartı ile bütçe kısıtı ( $w^T 1 = 1$ ) ve her bir menkul kıymete pozitif yatırım yapma kısıtı ( $w > 0$ ) ilave edilmiştir. Bütçe kısıtı ile yatırımcının sahip olduğu toplam tutarın tamamının hisse senedi yatırımlarına gerçekleştirilmesi sağlanmıştır. Pozitif yatırım kısıtı ile de yatırımcının açığa satış yapması engellenmiştir. İkinci modelde ise birinci modele ilave olarak yatırım üst sınırı değeri  $\%3,33$  olarak belirlenmiştir. Bunun nedeni, oluşturulan minimum varyanslı portföylerin piyasa portföyü ile karşılaştırılabilir derecede büyük portföyler olma özelliğine sahip olmasını desteklemektir. Üçüncü modelde ise sadece bütçe kısıtı altında portföy seçim işlemi gerçekleştirilmiş olup, yatırımcının açığa satış yapmasına imkan tanınmıştır. Böylece bu kısıt ile yatırımcıya, gelecekte fiyatının

yükselmesini beklediği hisse senetlerine daha fazla yatırım yapabilmek için, gelecekte fiyatının düşeceği ni tahmin ettiği hisse senetlerini kısa satmasına imkan tanınmaktadır.

Çalışma kapsamında uygulanacak olan modeller aşağıda belirtilen varsayımlara bağlı kalınarak uygulanmıştır. Buna göre:

1. Bütün yatırımcılar İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda işlem gören hisse senetlerine yatırım yapmaktadır.

2. Yatırımcıların temel hedefi, portföy risklerini minimum yapmaktır. Bu nedenle de portföy seçimlerinde herhangi bir getiri kısıtı olmayan minimum varyanslı portföylere yatırım yaparlar.

3. Kovaryans matrislerinin tahmininde kullanılan veri sayısı; İMKB'de işlem gören tüm hisse senetleri için, yatırım ufkuna bağlı olarak 60 adet veridir.

4. Yatırımcıların, yatırım ufku bir gün, bir hafta, on beş gün, bir ay ve bir yıl olmak üzere beş farklı dönem olarak belirlenmiştir. Her yatırım ufku için ilgili dönemin başında hesaplanan minimum varyanslı portföylere yatırım yapılarak, dönemin sonuna kadar elde tutulur ve izleyen dönem sonunda tekrar revize edilir. Yani yatırım ufku bir gün olan yatırımcılar portföylerini her gün için revize ederken, yatırım ufku bir ay olan yatırımcılar ise her ay sadece bir defa portföylerini revize etmektedir.

5. Minimum varyanslı portföylere yatırım söz konusu olduğunda vergi ve işlem maliyetleri göz ardı edilmiştir.

### 3.3. Araştırmada Kullanılan Kovaryans Tahmin Edicileri

Araştırmada kullanılan Ortalama - Varyans Modeli'nin en önemli sorunlarından biri optimizasyon sürecinde kullanılan kovaryans matrisinin tekil olmasıdır. Kovaryans matrisinin portföy optimizasyon sürecinde tekil olması, yatırım yapılabilecek olan hisse senedi sayısının, kullanılan zaman periyodundan daha fazla olmasını ifade etmektedir (Clarke ve Silva, 2006:12). Örneğin yatırım yapılması planlanan hisse senedi sayısı  $N$  ve bu örnekleme ait olan gözlem sayısı  $T$  ile ifade edildiğinde,  $N > T$  olması durumunda oluşturulan matris; tekildir. Tekil matrislerin tahmin süreçlerinde kullanılması, kovaryans tahminlerinde de fazla miktarda tahmin hatasının yer almasına neden olmaktadır. Bu durum aynı zamanda optimizasyon sürecinin, normal sınırlardan daha fazla tahmin hatası içermesine neden olmaktadır. Tahmin hatası; kullanılan parametre sayısının ( $N$ ), örnekleme kullanılan gözlem sayısı ( $T$ ) ile karşılaştırıldığında,  $N$ 'in

yeterince büyük olmadığı zaman ortaya çıkan bir durumdur (Disatnik ve Benninga, 2006).

İkinci önemli sorun ise portföy optimizasyonunda oluşturulan amaç fonksiyonu ve bu fonksiyonu destekleyen kısıtlarda yer alan kısa satış durumunun olmasıdır. Kısa satış kısıtı maliyetlidir. Kısa satış durumunda yatırımcı; gelecekte fiyatlarının düşeceğini beklediği hisse senetlerini açığa satar ve gelecekte fiyatının yükselmesini beklediği hisse senetlerine ise yatırım yapar. Kısa satış kısıtının uygulanması, portföyde yer alacak hisse senedi ağırlıklarının belirlenmesi açısından oldukça önemlidir. Kısa satış kısıtının uygulanmadığı bir portföy seçim modelinde, hisse senedi ağırlıkları negatif olacaktır. Kısa satış kısıtının uygulandığı durumlarda ise hisse senedi ağırlıkları sıfır değerine ayarlanabilecektir. Portföy içinde ağırlıkları ayarlanabilen hisse senetleri söz konusu olduğunda da, bu durumda olan hisse senetlerinin kovaryans matrisini etkilemesi engellenmektedir (Disatnik ve Benninga, 2006).

### 3.3.1. Örnek Kovaryans Tahmin Edicisi

Örnek kovaryans matrisi yaklaşımına göre, hisse senedi getirileri birbirinden bağımsız ve benzer biçimde dağılım özelliği göstermektedir. Ayrıca hisse senedi gözlem sayısı değerleri sınırsız olmasına rağmen, piyasada işlem gören hisse senedi sayısı sabit ve sonludur. Oysaki piyasa koşullarında bu varsayımlar her zaman için geçerli değildir.

Örnek kovaryans matrisinin oluşturulması, alternatif kovaryans matrisi oluşturulma teknikleri ile karşılaştırıldığında oldukça basit bir tekniktir. Hesaplama açısından basit olmasına karşılık, örnek kovaryans matrisini kullanmanın bazı dezavantajları da bulunmaktadır. Bunlardan ilki kovaryans matrisi, yeteri kadar veriye sahip olmayabilir ve bu nedenle elde edilen değerler pozitif olmayabilir. Hisse senetlerine ait olan tarihi verilerin kullanılması nedeniyle örnek kovaryans matrisi, örnekleme temsil etmesine rağmen, yapılan tahminlerde çok zayıf kalabilir. Yani kovaryans matrisi, N tane hisse senedi verisi için,  $N \times (N-1)/2$  tane parametre çifti tahmin edilmesini gerektirir. Bu durumda kullanılacak olan veri sayısının fazla olması, tahmin hatalarının daha da fazla olmasına neden olmaktadır. Bu da bu tekniğin diğer bir dezavantajıdır. Ayrıca hisse senetlerine ait olan aylık getiri verilerini esas alan bu tekniğin en önemli problemlerinden biri matrise ait boyutlardır. Kovaryans matrisinin tahmin edilmesinde kullanılan hisse senedi getirilerine ait olan zaman serilerinin uzunluğu (T), hisse senedi sayıları (N) ile karşılaştırıldığında ye-

teri kadar büyük olmayabilir. Böyle bir durumda elde edilmiş olan kovaryans matrisi,  $N > T$  durumuna bağlı olarak büyük sayılabilecek derecede tahmin hatasının içermesine neden olabilir. Böyle bir durumda olan kovaryans matrisinin köşegen elemanlarına ait değerler son derecede büyük olarak gerçekleşir.

Farklı varlıkların geçmişteki getirileri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$R = r_1, r_2, \dots, r_n$  olmak üzere buradan örnek kovaryans matrisi (S) şu şekilde yazılabilir (Bengtsson ve Holst, 2002:4).

$$S = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})(r_t - \bar{r})^T = \frac{1}{T-1} R(I - \frac{1}{T} 11^T)R^T$$

I birim matrisi ifade eder. T her varlık için gözlemlenebilen veri sayısını verir.

### 3.3.2. Küçülme Tahmin Edicisi<sup>1</sup>

Araştırmada kullanılan küçülme tekniği, Ledoit ve Wolf (2004) tarafından önerilen bir yöntemdir. "Bu yöntemin en önemli noktası, son derece yüksek pozitif tahmin hataları içermeye eğilimi içerisinde olan örnek kovaryans matrisinde tahmin edilen katsayıların dolaylı olarak oluşacak olan tahmin hatalarını dengelemesidir" (Ledoit ve Wolf, 2004:2). Bu teknikte sabit korelasyon matrisi ve örnek kovaryans matrisinden faydalanarak, yeni bir kovaryans matrisi elde edilmiştir. "Küçülme yöntemi, yapısal tahmin edici F ile örnek kovaryans matrisi S'i kullanarak, konveks lineer kombinasyonunu hesaplayarak, hem yapısal tahmin edici, hem de örnek kovaryans matrisi arasında bir uzlaşma sağlamayı hedeflemektedir" (Ledoit ve Wolf, 2004:6). Buna göre yeni kovaryans matrisi<sup>2</sup>;

$$\delta F + (1-\delta)S$$

şeklinde hesaplanır.  $\delta$  ile ifade edilen değer, küçülme katsayısıdır. Küçülme katsayısı  $\delta$ , 0 ve 1 arasında değer alır. Yapısal tahmin edici olarak değerlendirilen kavram ise küçülme hedefi olup, Ledoit ve Wolf (2003) çalışmasında tekli indeks modele ait matris iken, Ledoit ve Wolf (2004)'te ise sabit korelasyon matrisi ile elde edilen matristir.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Araştırmada kullanılan iki farklı kovaryans matrisi tahmin edicisi ile üç farklı portföy seçim modeli için minimum riske sahip olan portföyler oluşturulmuştur. Bu portföylerin oluşturulmasında beş farklı yatırım ufku kullanılmıştır. Buna göre oluşturulan portföylere ait standart sapma değerleri Tablo 2'de olduğu gibidir.

**Tablo 2:** Yatırım Ufkuna Bağlı Olarak Oluşturulan Portföylerin Tahmin Ediciler İçin Risk Değerleri

MVP	TAHMİN EDİCİ	GÜNLÜK	HAFTALIK	15 GÜNLÜK	AYLIK	YILLIK
Model 1	Örnek Kovaryans	0,1086	0,543	1,0859	2,1718	7,5233
	Ledit ve Wolf (2004)	0,1076	0,5378	1,0755	2,1510	7,4515
Model 2	Örnek Kovaryans	0,1194	0,5968	1,1936	2,3872	8,2695
	Ledit ve Wolf (2004)	0,1156	0,5781	1,1561	2,3122	8,0100
Model 3	Örnek Kovaryans	0,0796	0,3979	0,7959	1,5918	5,5141
	Ledit ve Wolf (2004)	0,0930	0,465	0,9300	1,8599	6,4428

Elde edilen bulgular farklı yatırım ufukları dikkate alınarak incelendiğinde, kullanılan birinci ve ikinci modeldeki küçülme tahmin edicilerine ait standart sapma derecelerinin, örnek kovaryans tahmin edicilerinden daha düşük olduğu görülmektedir. Ancak açığa satış işlemine izin verilen üçüncü modelde ise küçülme tahmin edicisinin standart sapma derecesi, örnek kovaryans tahmin edicisinden beş farklı yatırım ufku durumunda da daha büyüktür. Dolayısıyla bu durumdaki portföyün performansının daha düşük olduğu düşünülebilir. Her iki tahmin edici için sadece bütçe kısıtı ile pozitif yatırım şartı altında oluşturulan birinci modeldeki portföylerin risk değerleri, yatırım üst sınırının ilave edildiği ikinci modele ait portföy risklerinden daha düşüktür. Böyle bir durumda; portföy seçim modeline eklenen her yeni kısıtın, tahmini yapılan portföyün risk değerini yükselttiği söylenebilir. Her iki tahmin edici içinde açığa satışa izin verilen üçüncü modelde de, en düşük portföy riskine ait seçeneklere ulaşılmıştır. Ancak bu portföy seçim modelinde küçülme tahmin edicisi ile değil; örnek kovaryans matrisi tahmin edicisi ile düşük riskli portföylere ulaşılabilmiştir.

Birinci modelde örnek kovaryans matrisi tahmin edicisine alternatif olarak tercih edilen yöntem ile oluşturulan portföylerin risk değeri; yatırım ufku bir gün olduğunda %0,92937, yatırım ufku bir hafta olduğunda %0,9669, on beş gün olduğunda %0,96699, bir ay olduğunda %0,96445 ve bir yıl olduğunda ise %0,96442'lik bir değer kadar azalmıştır. Bu durum Ledoit ve Wolf (2004) tarafından geliştirilen tahmin edici ile pozitif yatırım şartı ve bütçe kısıtı altında oluşturulan minimum varyanslı portföylerin; farklı yatırım ufkuna sahip yatırımcılar için dahi en düşük riski veren seçenek olarak değerlendirilmesine katkı sağlamaktadır.

İkinci modelde birinci modele benzer sonuçlar vermekte olup, örnek kovaryans matrisi tahmin edicisine alternatif olarak tercih edilen yöntem ile her yatırım ufku için en düşük riskli portföy seçeneğine ulaşmak mümkün olmuştur. Oluşturulan portföylerin risk değeri; yatırım ufku bir gün olduğunda %3,18258, bir hafta olduğunda %3,13338, on beş gün olduğunda %3,14176, bir ay olduğunda %3,13826 ve bir yıl olduğunda ise %3,13826'lık bir değer kadar azalmıştır. Bu durumda ikinci modele ilave edilen yatırım üst sınır kısıtının toplam portföy riskinin artmasına ancak, alternatif yöntem ile geleneksel yöntemle göre daha düşük riskli portföy seçeneklerine ulaşabilmenin mümkün olduğunu göstermektedir. Hatta alternatif tahmin edici ile elde edilen risk azaltımı, her yatırım ufku için birinci modele göre daha yüksek olarak gerçekleşmiştir.

Üçüncü modelde ise diğer modellerin aksine alternatif tahmin edici ile elde edilen portföy seçeneklerinin riski; örnek kovaryans tahmin edicisine göre daha yüksek bir düzeye çıkmıştır. Oluşturulan portföylerin risk değeri yatırım ufku bir gün olduğunda %16,83417085, bir hafta olduğunda %16,86353355, on beş gün olduğunda %16,84885036, bir ay olduğunda %16,84256816 ve bir yıl olduğunda ise %16,84257449'lık bir değer kadar artmıştır. Bu sonuçlar Jagannathan ve Ma (2003)'ün da çalışmalarını destekler niteliktedir.

Her dönem için oluşturulan minimum varyanslı portföylerin bir sonraki dönem sonuna kadar elde tutulması durumunda yatırımcının katlanacağı risk düzeyi ise farklı tahmin ediciler için Tablo 3'de olduğu gibi gerçekleşmiştir.

**Tablo 3:** MVP'lerin İzleyen Dönemde Elde Tutulması Durumunda Portföy Riskleri

MVP	TAHMİN EDİCİ	GÜNLÜK	HAFTALIK	15 GÜNLÜK	AYLIK	YILLIK
Model 1	Örnek Kovaryans	0,0991	0,4953	0,9906	1,9812	6,8631
	Ledit ve Wolf (2004)	0,0931	0,4657	0,9314	1,8628	6,4529
Model 2	Örnek Kovaryans	0,0451	0,2255	0,4511	0,9022	3,1253
	Ledit ve Wolf (2004)	0,0435	0,2175	0,4351	0,8701	3,0141
Model 3	Örnek Kovaryans	0,0779	0,3896	0,7793	1,5585	5,3988
	Ledit ve Wolf (2004)	0,0782	0,3909	0,7818	1,5637	5,4168



Optimizasyon işlemi sonunda elde edilen portföylerdeki hisse senetleri, her yatırım ufkunun dikkate alınması ile ilgili dönem sonuna kadar elde tutulmuştur. Dönem sonunda yatırımcıya ait risk değeri hesaplanmıştır. Bu işlem 2009:12 tarihine kadar; yatırım ufku bir gün olarak belirlenen yatırımcılar için 4184 adet, yatırım ufku bir hafta olan yatırımcılar için 838 adet, yatırım ufku on beş gün olan yatırımcılar için 419 adet, bir ay olan yatırımcılar için 232 adet, yatırım ufku bir yıl olan yatırımcılar için ise 19 adet farklı dönemde gerçekleştirilmiştir. Elde edilen bulgular beş farklı yatırım ufku dikkate alındığında; birinci ve ikinci modellerde Ledoit ve Wolf (2004)'e ait tahmin edicinin daha başarılı sonuçlar verdiğini ve dolayısıyla daha düşük riske sahip portföylere sahip olduğunu göstermiştir. Ancak açığa satış işleminin söz konusu olduğu üçüncü modelde, durum beklendiği gibi gerçekleşmemiştir. Örnek kovaryans tahmin edicisi yatırımcısını, Ledoit ve Wolf (2004) tahmin edicisine göre daha düşük riske maruz bırakan seçeneklere yöneltmede daha başarılı olmuştur.

Birinci modelde oluşturulan minimum varyanslı portföylerin günlük olarak elde tutulması ve her günün sonunda revize edilmesi sonucunda yatırımcı %6,054490414, bir hafta süre ile elde tutulması durumunda %5,976176055, on beş gün süreyle elde tutulması durumunda %5,976176055, bir ay süreyle elde tutulması durumunda %5,976176055 ve bir yıl elde tutulması durumunda ise %5,976890909 oranında daha düşük riske maruz kalmaktadır. Günlük yatırım ufkuna sahip ve birinci modele göre portföy seçim işlemini gerçekleştiren yatırımcı; risk azaltımı konusunda en başarılı olan yatırımcı durumundadır. Bu model kapsamında portföylere dahil edilen hisse senedi sayısı; risk azaltımı konusunda başarılı olan ikinci modele göre daha düşük olup, çok küçük miktarlarda yatırımın söz konusu olduğu hisse senetlerinin portföy içine dahil edilmediği görülmektedir. Bu

durum da yatırımcı açısından daha kolay yönetilebilir portföylerin oluşturulmasına olanak tanımaktadır.

İkinci modelde ise Ledoit ve Wolf (2004) tahmin edicisi ile elde edilen portföyleri tercih eden yatırımcının, günlük olarak elde tutması durumunda %3,54767184, bir hafta süre ile elde tutması durumunda %3,54767184, on beş gün süreyle elde tutması durumunda %3,546885391, bir ay süreyle elde tutması durumunda %3,557969408 ve bir yıl elde tutması durumunda ise %3,557948774 oranında daha düşük riske maruz kalacağı seçenekleri tercih etmiş olduğu görülmektedir. İkinci modelde de alternatif tahmin edici ile risk azaltımı yine gerçekleştirilmiştir. Ancak birinci modelde bir üstünlük olarak kabul edilen çok küçük oranlardaki hisse senedi yatırımları, bu alternatifte dikkat çekicidir. Yatırım üst sınırının olması oluşturulan portföylere dahil edilen hisse senedi sayısının artmasına neden olmuş ve çok sayıda hisse senedine çok küçük oranlarda yatırım yapıldığı görülmektedir. Bu durumda yönetilmesi zor portföylerin oluşturulmasına kaynaklık etmektedir.

Üçüncü modelde ise diğer iki modelin aksine risk azaltımı değil, risk arttırımı söz konusu olmuştur. Buna göre Ledoit ve Wolf (2004) tahmin edicisi ile elde edilen portföylerin, günlük olarak elde tutulması %0,385109114, bir hafta süre ile elde tutulması %0,333675565, on beş gün süreyle elde tutulması %0,320800719, bir ay süreyle elde tutulması %0,333654155 ve bir yıl elde tutulması durumunda ise %0,333332098 oranında yatırımcısını daha fazla riske maruz bırakmaktadır. Üçüncü modelde alternatif kovaryans tahmin edicisi literatürde olduğu gibi, İMKB'de de etkili sonuçlar vermemiştir. Bunun nedeni olarak da açığa satış işlemi gösterilebilir.

Farklı kovaryans matrisi tahmin edicileri ile oluşturulan minimum varyanslı portföy seçeneklerine ait olan aktif risk değerleri ise Tablo 4'de olduğu gibidir.

**Tablo 4:** Tahmin Ediciler için Oluşturulan Portföylere Ait Aktif Risk Değerleri

	AKTİF RİSK
MİNİMUM VARYANSLI PORTFÖY SEÇENEKLERİ (1. MODEL)	
Örnek Kovaryans Tahmin Edicisi	0,055696
Küçülme Tahmin Edicisi	0,052875
MİNİMUM VARYANSLI PORTFÖY SEÇENEKLERİ (2. MODEL)	
Örnek Kovaryans Tahmin Edicisi İle MVP	0,090237
Küçülme Tahmin Edicisi İle MVP	0,090207
MİNİMUM VARYANSLI PORTFÖY SEÇENEKLERİ (3. MODEL)	
Örnek Kovaryans Tahmin Edicisi	0,091199
Küçülme Tahmin Edicisi	0,091103

\*Sonuçlar % olarak ifade edilmiştir. Günlük veriler kullanılarak hesaplamalar yapılmıştır.

Piyasa portföyüne göre fazladan alınmış olan risk değerini oluşturulan portföylerde gösteren aktif risk dereceleri incelendiğinde ise alternatif tahmin edici olarak kullanılan Ledoit ve Wolf (2004) tekniğinin, her üç model içinde daha başarılı olduğu görülmektedir. Piyasa portföyü olarak İMKB 100 Endeksi kullanılmıştır. Piyasa portföyünden en az sapmalar birinci modelde gerçekleşirken, en fazla sapma açığa satışa izin verilen üçüncü modelde söz konusu olmuştur. Bu sonuçlarında gösterdiği gibi küçülme tahmin edicileri ile oluşturulan portföylerde, gösterge değer olarak kabul edilen piyasa portföyünden daha küçük sapmalar meydana gelmiştir. Bu durumda Ledoit ve Wolf (2004)'ün çalışmasını destekler niteliktedir. Dolayısıyla küçülme tahmin edicileri ile takip hatası düşürülebilmektedir, denilebilir.

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada, farklı tahmin ediciler için İMKB'de 1990:11-2009:12 tarihleri arasında beş farklı yatırım ufkuna sahip yatırımcı için, minimum varyanslı portföylerin risk değerleri incelenmiştir. Portföy seçiminde Markowitz Ortalama-Varyans Modeli'nin esas alınması ile üç farklı portföy seçim modeli oluşturulmuştur. Kullanılan tüm portföy seçim modellerinin amaç fonksiyonu aynı olup, toplam portföy riskinin minimum olması şeklinde belirlenmiştir. Birinci modelde bütçe ve pozitif yatırım şartı kısıt olarak belirlenirken, ikinci modelde bir de yatırım üst sınırı ilave edilmiştir. Üçüncü modelde ise yatırıma ait herhangi bir alt ya da üst sınır olmaksızın bütçe kısıtı kapsamında açığa satışa izin verilen durum için portföy seçim işlemi gerçekleştirilmiştir. Portföy seçim sürecinin iki önemli girdisinden biri olan kovaryans matrisi, hem örnek kovaryans matrisi tahmin edicisi, hem de Ledoit ve Wolf (2004) tarafından önerilen küçülme tahmin edicisi ile hesaplanmıştır. Yatırım ufkusu olarak da günlük, haftalık, on beş günlük, aylık ve yıllık periyotlar tercih edilmiştir.

Elde edilen bulgular üç farklı portföy seçim modelinin ilk iki tanesinde, Ledoit ve Wolf (2004) tekniğinin her yatırım ufkusunda en düşük riske maruz bırakan portföy seçeneklerine ulaşmada, örnek kovaryans tahmin edicisine göre daha başarılı sonuçlar verdiğini göstermiştir. Dolayısıyla bu çalışmadan elde edilen sonuçların; Ledoit ve Wolf (2004) çalışması ile benzer sonuçlar özellikler taşıdığını, sabit korelasyon matrisine uygulanan küçülme dönüşümünün; İMKB'de de daha düşük riskli olan portföylere ulaşmada etkili sonuçlar verdiğini söylemeye olanak tanımaktadır. Ancak açığa satış durumunda ise örnek kovaryans matrisi tahmin edicisi, düşük riske sahip

portföy seçeneklerine ulaşmayı mümkün kılmıştır. Kısa satış kısıtının uygulanması, portföy de yer alacak hisse senedi ağırlıklarının belirlenmesi açısından oldukça önemlidir. Kısa satış kısıtının uygulanmadığı bir portföy seçim modelinde, hisse senedi ağırlıkları negatif olacaktır. Kısa satış kısıtının uygulandığı durumlarda, hisse senedi ağırlıkları sıfır değerine ayarlanabilecektir. Portföy içinde ağırlıkları ayarlanabilen hisse senetleri söz konusu olduğunda da, bu durumda olan hisse senetlerinin kovaryans matrisini etkilemesi engellenmektedir (Disatnik ve Benninga, 2006). İkinci modele ilave edilen yatırım üst sınırı kısıtı ile elde edilen portföy seçeneklerindeki risk azaltımı, birinci modele göre çok daha fazla olmuştur. Bunun en önemli nedeni olarak  $N > T$  koşulunda alternatif tahmin edicinin daha güvenilir sonuçlar vermesi gösterilebilir. Çünkü portföy seçim işlemi gerçekleştirilirken dikkat edilen bu husus, ikinci modelde daha belirgin hale gelmiş ve tercih edilen portföy seçeneklerinde yer alan hisse senedi sayılarında ciddi artışlar görülmüştür. Bu durumda  $N > T$  koşulunda daha etkin sonuçlar verdiği kabul edilen Ledoit ve Wolf (2004) tahmin edicisi için İMKB'de oluşturulan portföy seçeneklerinin de; Bengston ve Holst (2002), Jaganathan ve Ma (2003), Ledoit ve Wolf (2003, 2004) çalışmalarındaki elde ettiği sonuçlara benzer özellikler taşıdığı belirlenmiştir.

Ayrıca Ledoit ve Wolf (2004) tekniği kullanılarak elde edilen portföylere yatırım yapılması durumunda; ilk iki portföy seçim modelinde yatırımcının daha düşük riske sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca oluşturulan portföylere ait aktif risk değerleri de Ledoit ve Wolf (2004) tekniğinin uygulandığı tüm portföy seçeneklerinde daha düşüktür. Böyle bir durumda da İMKB'de örnek kovaryans tahmin edicisi dışında alternatif tahmin ediciler ile daha etkin olan portföy seçeneklerinin oluşturulabileceği söylenebilir.

Portföy seçim modellerinde ilave edilen her yeni kısıt durumunda; tüm tahmin ediciler için farklı yatırım ufkuna göre oluşturulan portföylere ait risk değerleri de yükselmektedir. Bu durum Tablo 2' de elde edilen bulgular ile de gösterilmektedir. Model 2'nin esas alınması ile günlük olarak oluşturulan minimum varyanslı portföyler ile en fazla risk azaltımı Ledoit ve Wolf (2004) tahmin edicisi ile elde edilmiştir. Yaklaşık olarak bu tahmin edici ile örnek kovaryans tahmin edicisine göre %3,18258 oranında fazladan risk azaltımı sağlanmıştır. Elde edilen portföylere belirlenen yatırım ufkusu dikkate alınarak yatırım yapılması durumunda ise yatırımcısını en az riske maruz bırakan seçenek; Ledoit ve Wolf (2004) tahmin edicisi ile Model 1'e göre oluşturulan portföy seçenekleri olmuştur.

Yatırımcıların risk üstlenme derecelerine bağlı olarak belirlenen yatırım ufku sonuçlarına göre başarılı sonuçlar veren bu alternatif tahmin edicinin; günlük yatırım ufkunda daha da yüksek bir performans gösterdiğini söylemeyi mümkün kılmaktadır. Dolayısıyla hem portföy yöneticileri hem de yatırımcılar İMKB'de düşük riske karşılık daha fazla getiri olanağı sunan portföy seçeneklerini belirlerken, optimizasyon sürecinde kullanılan kovaryans matrisinin oluşturulmasında alternatif tahmin edicileri kullanabilir. Böylece yatırımcılar geleneksel yöntemlere göre daha düşük riske sahip piyasa portföyünden daha az sapmalar gösteren portföylere ulaşabilir.

Bu çalışma belli varsayımlar altında gerçekleştirilmiştir. Gelecekte yapılacak olan çalışmalarda vergi ve işlem maliyetlerinin dâhil edilmesi ile alternatif kovaryans tahmin edicilerinin performansı incelenebilir. Ayrıca oluşturulan portföylere dâhil edilen hisse senedi sayılarının ve hangi sektörlerde yer aldığının belirlenmesi de tahmin edicilere bağlı olarak nasıl değiştiği de incelenebilecek konular arasında değerlendirilebilir.

## SON NOTLAR

<sup>1</sup> Küçülme tahmin edicisine ait MATLAB program kodlarına [www.ledoit.net](http://www.ledoit.net) adresinden ulaşılmıştır.

<sup>2</sup> Küçülme tahmin edicisi ile oluşturulan kovaryans matrisine ait parametrelerin hesaplanması ile ilgili ayrıntılı bilgi için Ledoit ve Wolf(2004)'ün "Honey I Shrunk the Sample Covariance Matrix" isimli makalesini inceleyiniz.

## KAYNAKLAR

- Bengtsson, C. ve Holst I. (2002) "On Portfolio Selection: Improved Covariance Matrix Estimation For Swedish Asset Returns" Working Paper Series.
- Ceylan, A. ve Korkmaz, T. (1998) *Borsada Uygulamalı Portföy Yönetimi* 3. Baskı, Bursa, Ekin Kitapevi Yayınları.
- Clarke, R., H. Silva ve S. Thorley (2006), "Minimum Variance Portfolios in the U.S.. Equity Market" *Portfolio Management*, 33(1):10-24.
- Disatnik, D. J. ve S. Benninga (2006) "Estimating the Covariance Matrix for Portfolio Optimization" Working Paper Series.
- Elton, E. ve M. Gruber (1973) "Estimating the Dependence Structure of Share Prices Implications for Portfolio Selection" *Journal of Finance*, 28(5):1203-1232.
- Elton, E., M. Gruber ve T. Urich (1978) "Are Betas Best?" *Journal of Finance*, 33(5):1375-1384.
- Eun, Cheol S. ve Bruce G. Resnick (1984) "Estimating The Correlation Structure of International Share Prices" *The Journal of Finance*, 39(5):1311-1324.
- Frost, P. A. ve J. E. Savarino (1986) "An Empirical Bayes Approach to Efficient Portfolio Selection" *The Journal of Financial Quantitative Analysis*, 21(3):293-305.
- Jagannathan, R. ve T. Ma (2003) "Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing The Wrong Constraints Helps" *Journal of Finance*, 58:1651-1683.
- Jagannathan, R. ve T. Ma. (2000) "Three Methods for Improving the Precision in Covariance Matrix Estimation" Working Paper Series.
- Jorion, P. (1986) "Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis, Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis" *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21:279-292.
- Ledoit, O. ve M. Wolf (2004) "Honey I Shrunk the Sample Covariance Matrix" *Journal of Portfolio Management*, 31: 603-621.
- Ledoit, O. ve M. Wolf (2003) "Improved Estimation of the Covariance Matrix of Stock Returns With an Application to Portfolio Selection" *Journal of Empirical Finance*, 10:603-621.
- Markowitz H. M. (1959) *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Wiley, Yale University Press.
- Markowitz H. M. (1956) "The optimization of a quadratic function subject to linear constraints", *Naval Research Logistics Quarterly*, 3:111-133.
- Markowitz H. M. (1987) *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets* Blackwell Publishers.
- Markowitz, H. (1952) "Portfolio Selection" *Journal of Finance*, 1(7):7-91.
- Pafka, S. ve I. Kondor (2004) "Estimated Correlation Matrices And Portfolio Optimization", *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 343: 623-634.
- Stein, C. (1955) "Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of the Multivariate Normal Distribution" *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1:197-206.