

# Ortaokul Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Şemaları ve Bu Şemaları Ortaya Koyan İfadelerinin İncelenmesi \*

Emine Gaye Çontay<sup>a</sup> ve Asuman Duatepe Paksu<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Denizli/Türkiye (ORCID: 0000-0002-6446-9217); <sup>b</sup>Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Denizli/Türkiye (ORCID: 0000-0003-2504-6294)

**Makale Geçmişi:** Geliş tarihi: 20 Şubat 2018; Yayına kabul tarihi: 17 Ekim 2018; Çevrimiçi yayın tarihi: 23 Ekim 2018

**Öz:** Mevcut çalışma ile ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarının neler olduğunu ve bu şemaları nasıl ortaya koyduklarını araştırmak amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının belirlenebilmesi için klinik yöntem kullanılmıştır. Bu amaçla öğretmen adaylarıyla sayılar alanında görev temelli görüşmeler ve ispatın doğasına ilişkin klinik görüşmeler yapılmıştır. 3 kız öğretmen adayına tek bir oturumda Görev Temelli Görüşme Formu ve İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu yöneltilmiştir. İçerik analizi yöntemi kullanılarak öğretmen adaylarının en çok dışsal, daha sonra analitik ve en az deneysel ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler verdikleri belirlenmiştir. Çalışmada daha yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının daha düşük başarı düzeyindeki öğretmen adayına göre analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkileri daha sık gösterdikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının dışsal kaynaklı fikirlerinin, çoğunlukla onların dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarını ortaya çıkaran özellikleri ile ilişkili olduğu belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel fikirleri ile onların ispatı yapılandırırken dönüşüm yapmalarına engel olan fikirlerinin ilişkili olabileceği belirlenmiştir.


**Anahtar Kelimeler:** Ortaokul matematik öğretmeni adayları, sayılar, görev temelli görüşmeler, ispat şeması, ispatın doğası

**DOI:** [10.16949/turkbilmat.397109](https://doi.org/10.16949/turkbilmat.397109)

**Abstract:** The aim of this study is to investigate preservice middle school teachers' proof schemes and how they presented their proof schemes. Clinical method was used to identify the proof schemes of preservice teachers. For this purpose, clinical interviews about the nature of proof and task based interviews were conducted with the participants in the field of numbers. The Task Based Interview Questions Form and Interview Questions Form about the Nature of Proof were conducted with three female preservice teachers in a single session. Using the content analysis report, it was found that preservice teachers used external proof schemes more frequently than analytical proof schemes, and they used empirical proof schemes less often. It was determined that showing responses on analytical proof schemes was higher in those preservice teachers when compared to the ones with lower level achievements. It was found that the external based opinions of the preservice teachers were found to be related with their characteristics which revealed external based proof scheme. It was also noticed that there could be a relationship between already acquired opinions which were memorized and superficial and the ones which block transforming ideas while making proofs.

**Keywords:** Preservice middle school mathematics teachers, numbers, task based interviews, proof scheme, nature of proof

[See Extended Abstract](#)

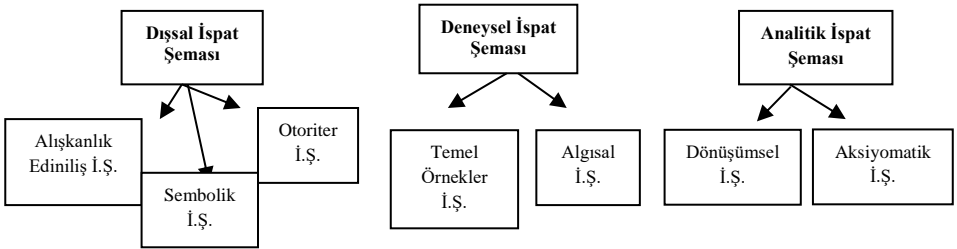
**Sorumlu yazar:** Emine Gaye Çontay  e-posta: [gayeermec@gmail.com](mailto:gayeermec@gmail.com), [germec@pau.edu.tr](mailto:germec@pau.edu.tr)

\* Bu çalışma 3. Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu'nda sunulan bildirinin genişletilmiş halidir. Bu çalışma ilk yazarın doktora tez çalışmasının bir parçasıdır ve anılan doktora çalışması PAÜBAP 2016EGBE001 no'lu proje kapsamında desteklenmiştir.

**Kaynak Gösterme:** Çontay, E. G. ve Duatepe-Paksu, A. (2019). Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları ve bu şemaları ortaya koyan ifadelerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10(1), 59-100.

## 1. Giriş

Harel ve Sowder (1998) ispatı informal açıdan ele alarak hem öğrencilerin bilişsel süreçlerini ele alan hem de toplumsal kuramlarla şekil alan bir süreç olarak nitelendirmişlerdir. Bu bakış açısı öğrencilerin ispat yaparken ne yazdıklarına değil ne düşündüklerine odaklanmalarını ve *ispat şeması* terimini ortaya atarak kavramsallaştırmalarını sağlamıştır. Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve Harel (1998) çalışmalarında ispat şemalarını gruplandırarak yeni bir teorik çatı ortaya atmışlardır. Bu teorik çatı daha sonra Harel (2007) tarafından revize edilmiştir. Harel ve Sowder (1998) *ispatlama*'yı “aslını anlama” (ascertaining) ve “ikna etme” (persuading) olarak tanımlanabilecek iki sürece ayırmıştır. “Aslını anlama” bir iddianın doğruluğu hakkında bireyin kendi şüphelerini ortadan kaldırmak olarak tanımlanırken “ikna etme” süreci bir iddianın doğruluğu hakkında diğerlerinin şüphelerini ortadan kaldırmak olarak tanımlanmaktadır. Bu iki süreç beraber ele alındığında, Harel ve Sowder (1998) tarafından ispat şeması “*Bir bireyin ispat şeması o birey için aslını anlama ve ikna etmeyi oluşturan şeyleri içerir*” (s. 241) olarak kavramsallaştırılmıştır. Sowder ve Harel (1998) ispat şemalarını dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana grupta sınıflandırmışlardır:



\*İ.Ş.: İspat Şeması

**Şekil 1.** Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması sınıflandırması

### 1.1. Dışsal ispat şemaları (Externally based proof schemes)

Bu ispat şemalarını sergileyen öğrencilerin aslını anlama ve diğerlerini ikna etme durumları dışsal kaynaklıdır. Bu kaynaklar öğretmen ya da bir kitaba dayanan bir otorite (otoriter ispat şeması), bir argümanın biçimi ya da görünümü (alışkanlık edinilmiş ispat şeması) veya sembollerin anlamsız manipülasyonu (sembolik ispat şeması) olarak ortaya çıkabilir (Harel, 2014; Sowder & Harel, 1998).

Otoriter ispat şemasına ilişkin tepkiler gösteren öğrenciler bir sonucu gerekçelendirirlerken sadece kitaba, öğretmenlerinin ifadelerine veya sınıf arkadaşlarının ifadelerine başvururlar. Bu durumlar “hatırlamıyorum”, “kitaba bakmak gerekir” gibi ifadelerle ortaya çıkabilir (Sowder & Harel, 1998).

Öğrenciler argümanın doğruluğunu araştırırken argümanın doğruluğu yerine görüntüsünden, ispatın alışlagelen formatlarından etkilenerek karar verdiklerinde (Martin & Harel, 1989) alışkanlık edinilmiş ispat şemasının özelliklerini sergiledikleri söylenebilir.

Öğrenciler sembollerini anlamlardan uzak ve durum içerisindeki nicelikleriyle ilişkilendirmeden ele aldıklarında sembolik ispat şemasını ortaya koyan özellikler göstermiş olurlar (Sowder & Harel, 1998).

### 1.2. Deneysel ispat şemaları (Empirical Proof Schemes)

Bu ispat şemalarına ilişkin özellikler sergileyen öğrenciler varsayımların doğruluğunu ya da yanlışlığını fiziksel kanıtlara veya duyuşal deneyimlere dayanarak gösterirler (Harel & Sowder, 1998).

Algısal ispat şemasına ilişkin özellikler sergileyen öğrenciler bir durumun doğru ya da yanlış olduğunu hisleriyle sezinlerler fakat buna ilişkin güçlü bir kanıt bulamazlar, başkalarını ikna ederken çizimlere başvururlar (Mejia-Ramos & Tall, 2005; Sowder & Harel, 1998).

Örnek temelli ispat şemasına ilişkin özellikler sergileyen öğrenciler belirli kavramları oluştururlarken matematiksel durumları anlamada veya bu durumların doğruluğunu kontrol etmede önceden öğrendikleri örnekleri ispat olarak kullanırlar (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016; Sowder & Harel, 1998)

### 1.3. Analitik ispat şemaları (Analytical Proof Schemes)

Bu ispat şemalarına ilişkin özellikler sergileyen öğrenciler, matematiksel durumların doğruluğunu gösterirken veya geçerliğini sağlarken mantıksal tündengelim kullanırlar. Bir durumun doğruluğunu gösterme sürecinde ortaya konan nedenler aksiyom ve teoremlerden oluşmakla beraber akıl yürütme de içerir (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016).

Dönüşümsel ispat şeması özellikleri sergileyen öğrencilerin gerekçelendirmeleri durumların genel yönleriyle ilişkilidir ve akıl yürütmeleri varsayımlarının genel bir analitik çatıya yerleşmesine yöneliktir (Sowder & Harel, 1998). Bu ispat şemalarındaki genel yapı sayma stratejileri ile örüntü bulmadan ziyade akıl yürütmeyi içerir. Dönüşümsel ispat şemasının sınırlayıcı bir analitik ispat şeması, aksiyomatik ispat şemaları için gerekli bir alt yapı olarak gibi görülebilir (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016; Sowder & Harel, 1998).

Aksiyomatik ispat şemasına ilişkin özellikler sergileyen öğrenciler bir matematiksel gerekçelendirmenin başlama noktasının tanımsız terim ve aksiyomlar olduğunu farkındadırlar ve böyle bir sistemde rahat biçimde çalışabilme yetisine sahiptirler (Harel & Sowder, 1998; Sowder & Harel, 1998).

Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve Harel (1998) çalışmalarında, “*ispat şeması*” gruplandırması öğrencilerin matematiksel gelişimlerdeki bir bilişsel düzeyi ve zihinsel beceriyi temsil etmektedir. Dolayısıyla bu gruplandırma bir ispat içeriği ya da bir ispat yöntemi olmamakla beraber bireyin sosyal bağlamdaki şüphelerinden, doğrularından ve görüşlerinden oluşur (Harel & Sowder, 1998; Sowder & Harel, 1998). Harel ve Sowder’ın (1998) ispat şeması gruplandırmasındaki üç ana kategori ayrıışık değildir ve bireyler aynı anda birden fazla ispat şemasına ilişkin özellikler sergileyebilirler ve kısa bir zaman aralığında çeşitli ispat şeması özellikleri gösterebilirler (Harel & Sowder, 1998).

---

Alanyazın incelendiğinde birçok çalışmada (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Flores, 2006; Güner, 2012; Haverhals, 2011; Harel, 2001; Housman & Porter, 2003; İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu, Baki & İskenderoğlu, 2010; Ören, 2007; Plaxco, 2011; Sarı, Altun ve Aşkar, 2007; Stylinou, Chae & Blanton, 2006; Şen ve Güler, 2015; Şengül ve Güner, 2013) öğretmen adaylarının dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç temel kategorideki ispat şemalarını ortaya çıkaran tepkiler verdikleri belirlenmiştir.

Alanyazındaki bazı çalışmalar ortaokul (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003, Liu & Manouchehri, 2013; Ören, 2007; Şen ve Güler, 2015) ve lise (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003) öğrencilerinin büyük bölümünün dışsal ispat şemalarının belirleyicisi olan tepkiler ortaya koyduklarını belirlemiştir. Oflaz, Bulut ve Akcakin (2016) ise sınıf öğretmeni adaylarının ispat şemalarını belirlemeyi amaçladığı ve nitel yöntemlerle yürüttüğü çalışmada, çalışmaya katılan düşük, orta ve yüksek başarı düzeylerindeki öğretmen adaylarından en başarılı olan öğretmen adayının deneysel ispat şeması yaklaşımına sahip olduğunu, orta düzeyde başarıya sahip olan öğretmen adayının dışsal sembolik ispat şemasına, en düşük başarıya sahip öğretmen adayının ise dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması yaklaşımına ilişkin tepkiler ortaya koyduğunu belirlemiştir.

İlköğretim ve/veya ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını (Güner, 2012; İskenderoğlu, 2010; Şengül ve Güner, 2013), ispata ilişkin tutum ve inançlarını (İmamoğlu, 2010), veya ortaokul öğrencilerinin ispat anlayışlarını (Knuth, Chopin & Bieda, 2009) nitel ve nicel veri analizi yöntemleriyle ortaya çıkarmayı amaçlayan bir grup çalışma ise sınıf düzeyi arttıkça ispat şemalarının dışsal düzeyden analitik düzeye değiştiğini ya da gerekçelendirme biçimlerinin dışsal ve deneysel argümanlar yerine analitik argümanlara doğru değiştiğini belirlemiştir.

Alanyazındaki bazı çalışmalar ise (CadwalladerOlsker, 2007; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010; Koichu, 2009; Plaxco, 2011) öğrenci ve öğretmen adaylarının analitik aksiyomatik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiklerini belirlemiştir. İskenderoğlu ve diğerleri (2010) öğretmen adaylarının matematik problemlerinde çözümlerini nasıl gerekçelendirdiklerini araştırmayı amaçladıkları ve 40 ilköğretim matematik öğretmeni adayıyla gerçekleştirdikleri, nicel ve nitel analiz yöntemlerini kullandıkları çalışmalarında öğretmen adaylarının üç temel kategorideki ispat şemalarını ortaya çıkaran tepkiler verdiklerini belirlemiştir. Öğretmen adayları bu üç temel kategori altında analitik ispat şemasına ait verdikleri yanıtların çoğunda aksiyomatik ispat şemasına ilişkin tepkiler vermişlerdir. Benzer olarak Plaxco (2011) çalışmasına katılan matematik öğretmeni adaylarının tüm temel kategorideki ispat şemalarına ve analitik kategorisi altında analitik aksiyomatik ispat şemasına ilişkin tepkiler ortaya koyduklarını belirtmiştir. CadwalladerOlsker'ın (2007) çalışmasında yüksekokul öğrencilerinin ispat şemaları dönem başı ve sonunda karşılaştırılmıştır ve bir dönem boyunca ispat şemalarının nasıl geliştiği incelenmiştir. 77 öğrenciyle yürütülen ve nitel yöntemlerle analiz edilen çalışmada öğrencilerin büyük çoğunluğunun analitik dönüşümsel ve aksiyomatik argümanları ikna edici buldukları söylenmiştir.

Sarı ve diğerleri (2007) ise yüksek, orta ve düşük düzeyden üç matematik öğretmen adayını ile yürüttükleri çalışmalarında öğretmen adaylarının ispatlama sürecindeki

başarılarının analiz dersinde gösterdikleri başarıya paralel olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Çalışmada yüksek başarılı öğretmen adayının analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler verdiği, orta başarı düzeyindeki öğretmen adayının ise yönlendirmeler sonucunda analitik dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler ortaya koymaya başladığı belirtilmiştir. En düşük başarı düzeyindeki öğretmen adayının dışsal ve deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği söylenmiştir.

#### 1.4. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Bu çalışmanın amacı ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarının neler olduğunu ve bu şemaları nasıl ortaya koyduklarını inceleyerek ispat şemalarının ne gibi farklılıklar gösterdiğini belirlemek ve bu konuda öneriler geliştirmektir. Bu amaçla araştırmanın problemi “Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ortaya koydukları ispat şemaları nelerdir ve bu şemaları nasıl ortaya koymaktadırlar?” olarak belirlenmiştir. Bu probleme yanıt ararken daha özel olarak öğretmen adaylarının sayılar alanında ispat yaparken ve ispatları incelerken; ispatın doğasına ilişkin görüşlerini açıklarken ortaya koydukları ispat şemalarının neler olduğu ve bu ispat şemalarını nasıl ortaya koymakta oldukları sorularına yanıt aranmıştır. Bunun yanında öğretmen adaylarının ispat yaparken ve ispatları incelerken ve ispatın doğasına ilişkin görüşlerini açıklarken ortaya koydukları ispat şemaları arasında nasıl bir ilişki olduğu sorusuna da yanıt aranmıştır.

Öğretmenlerin çoğunun matematiksel ispat hakkındaki bilgileri sınırlıdır (Knuth, 2002a) ve eğitim reformlarının tavsiye ettiği yolla matematiksel ispatları öğretmek için yetiştirilmemişlerdir (Yoo, 2008). Öğretmenler ispata ilişkin uygun olmayan pedagojik görüşe ve matematiksel argümanları geçerli kılacak sınırlı beceriye sahiptirler (Yoo, 2008). Dolayısıyla öğretmenler, öğrencilerin sınıf içindeki matematiksel etkinliklere seyrek olarak katılabildikleri geleneksel yaklaşımlarla derslerini yürütmekte ve yeniliklere uyum sağlayamamaktadırlar (Knuth, 2002a; Yoo, 2008). Çalışmalar öğretmen ve öğrencilerin ispatı anlamalarında yetersizlikleri ve kavram yanılgıları olduğunu göstermektedir (Güner, 2012; Knuth, 2002a; Morali, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Norby, 2013; Riley, 2003). Öğretmen adayları, Ortak Temel Standartlar (2010) (Common Core Standards, 2010) ve NCTM (2000) standartları ve ülkemizde Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2017) tarafından önerilen alanlarda ispat ve akıl yürütmeyi anlayabilmeli ve öğretebilmelidir. Norby’e (2013) göre öğretmen adayları ispatın, akıl yürütmenin ve argümantasyonun önemini anlamalıdır. Öğretmen adayları bu sayede hem bu konuları öğretmek üzere hazırlanmış olarak kendi bilgilerini geliştirmiş olurlar hem de öğrencilerin ispat, akıl yürütme ve argümantasyon becerilerini değerlendirmek ve öğrenci argümanlarını geliştirmek için fırsat yakalarlar (Norby, 2013).

Öğretmenlere verilen hizmet içi eğitimler yoğun olsa da kısa ve yetersizdir. Geleneksel öğretim yöntemlerine sahip, sınırlı hizmet içi eğitim almış ve ağır öğretim yüküne sahip öğretmenlerden matematik eğitimindeki yenilik çabalarına yönelmelerini beklemek yerine ispatı öne ve merkeze alan matematik öğretimi yaklaşımına daha tanıdık olan geleceğin öğretmenlerine odaklanmanın daha verimli olacağı söylenebilir. Üniversite öğretmen yetiştirme programları matematiksel yenilikleri uygulamada uygun bir yere sahiptir (Varghese, 2007). Bu yüzden bu çalışmada geleceğin öğretmenleri olan ortaokul

matematik öğretmen adaylarıyla çalışılması önemli görülmektedir. Matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarının belirlenmesi, ileride öğretmen olacak bu adayların öğrencilere vereceği ispat eğitimi hakkında bilgiler verebilir, öğretmen adaylarının ispat hakkındaki bilgi eksikliklerinin tespit edilmesi için ve konuyla ilgili öneriler sunulması için ortam sağlayabilir.

İlgili alanyazında aynı teorik çatıyı kullanan çalışmalar mevcut bulunmakta iken, bu çalışmaya olan ihtiyacın sebepleri aşağıda ayrıntılı olarak açıklanmaktadır:

İlgili alanyazın incelendiğinde, üniversite öğrencilerinin ispat şemalarının gelişimini inceleyen boylamsal araştırmalara (CadwalladerOlsker, 2007; Haverhals, 2011; Martin, Soucy McCrone, Wallece Bower, & Dindyal, 2005; Recio & Godino, 2001; Soucy Mccrone & Martin, 2004; Sowder & Harel, 2003); ispat şemalarını farklı değişkenlerle ilişkileriyle beraber inceleyen araştırmalara (Housman & Porter, 2003; Ören, 2007; Plaxco, 2011; Stylinou ve diğerleri, 2006; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014); bulgularında ispat şemalarını ve özelliklerini barındıran deneysel araştırmalara (Grigoriadou, 2012; Ellis, 2007; Harel & Rabin, 2010; Harel, 2001; Soto, 2010) rastlanmıştır. Fakat bu çalışmaların hiçbiri ispat şemalarını kendi özellikleriyle doğrudan betimsel olarak ortaya koymamıştır. Bu çalışmada, matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları ve bu şemaları nasıl ortaya koydukları, hem ispat yapma süreçleri hem de ispatın doğası hakkındaki görüşleri incelenerek ve alıntılarla örneklendirerek ortaya konmuştur. İspat şemalarını ayrıntılı biçimde ele alınabilme durumu ise görev temelli görüşmeleri kullanarak gerçekleşmiştir. Bu anlamda bu çalışmanın öğretmen adaylarının ispat şemalarını kendi özellikleriyle doğrudan ilişkilendirerek ortaya koyma bakımından özgün olduğu düşünülmektedir. Öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde verdikleri yanıtlar ve bu yanıtlardaki tepkileri ayrıntılı analiz edilmiş, hangi ispat şemasına ilişkin tepkiler verdikleri ve bu tepkileri nasıl verdikleri örneklerle ayrıntılı biçimde açıklanmıştır. Dolayısıyla okuyucu bu çalışmada her alt şemaya ilişkin öğretmen adaylarının tepkilerini süreç bağlamında ayrıntılı inceleme olanağı bulmaktadır. Bunun yanında bu çalışmada öğretmen adaylarının hem ispat yaparken hem de ispatın doğasına ilişkin görüşlerini açıklarken ortaya koydukları şemaların birbirleriyle ilişkileri ayrıntılı olarak incelenmiş ve o ispat şemasına ilişkin belirli göstergelerle detaylandırılmıştır. Bu anlamda bu çalışmanın alanyazında önemli ve özgün bir yere sahip olduğu düşünülmektedir.

İspat şemalarını kendi özellikleri açısından inceleyen çalışmalara (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Güner, 2012; Flores, 2006; Gholamazad, Liljedahl, & Zazkis, 2004; Heinze & Reiss, 2003; İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010; Koichu, 2009, Liu & Manouchehri, 2013; Oflaz ve diğerleri, 2016; Sarı ve diğerleri, 2007; Şen ve Güler, 2015; Şengül ve Güner, 2013; Weber, 2010) bakıldığında ise bu çalışmaların çok azının ispat şemalarını deneysel olmayan bir yaklaşımla başka değişkenler olmadan matematik öğretmeni adayları üzerinde incelediği görülmüştür. İspat şemalarını deneysel olmayan bir yaklaşımla başka değişkenler olmadan matematik öğretmeni adayları üzerinde inceleyen bu çalışmalardan (İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010; Sarı ve diğerleri, 2007) ikisi (İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010) klinik görüşmeler kullandıklarını belirtirken, diğeri (Sarı ve diğerleri, 2007) sadece görüşmeler

kullandıklarını belirtmişlerdir. Ancak bu çalışmalardan hiçbiri matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını görev temelli görüşmeler yardımıyla belirleme yoluna gitmemiştir. Görev temelli görüşmeler, öğretmen adaylarının ispat şemalarını ayrıntılı inceleme olanağı sunmaktadır. Böylece öğretmen adaylarının hangi şemaya ilişkin hangi tepkiler sergiledikleri ortaya konulabilmektedir. Yurtdışında ise ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını bu bağlamda inceleyen çalışmaya rastlanmamıştır. Bu yüzden bu çalışmanın hem ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını başka değişkenlerle ilişkilendirmeden deneysel olmayan bir yaklaşımla belirlemede; hem de bu belirleme durumunu görev temelli görüşmeler yardımıyla yapmada özgün bir çalışma niteliği taşıdığı ve dolayısıyla ilgili alanyazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

## 2. Yöntem

Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmanın analiz birimi matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarıdır. İspat şemaları Sowder ve Harel (1998) tarafından geliştirilen kuramsal çatıya göre üç temel ve bunların altındaki toplam yedi kategoride değerlendirilmiştir. Yin'e (2003) göre durum çalışması birden fazla analiz birimini içerdiğinde; bir durum içerisinde alt birim ya da alt birimlere yoğunlaşmaktadır. Bu ise iç içe geçmiş durum çalışmalarında ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmada ispat şemaları birden fazladır, bu yüzden bu çalışma iç içe geçmiş durum çalışması olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmadaki durumlar ise farklı başarı düzeylerindeki ortaokul matematik öğretmeni adaylarıdır. Çalışmadaki yüksek, orta ve en alt düzeyde başarılı olan ortaokul matematik öğretmeni adayları çoklu durumları oluşturmuştur. Dolayısıyla bu çalışmanın deseni iç içe geçmiş çoklu durum deseni olarak tanımlanmaktadır (Yin, 2003).

Durum çalışması olarak yürütülen bu çalışmada öğretmen adaylarının ispat şemalarının belirlenebilmesi için klinik yöntem kullanılmıştır. Klinik yöntem tıp alanında kullanılan klinik görüşme yöntemine benzer olarak çocukların düşünceleri üzerinde uygulanan tanılayıcı bir yöntemdir ve çocukların bilgi yapılarını ve akıl yürütme süreçlerinin biçimlerini araştırmak için Piaget tarafından ortaya atılmıştır (Clement, 2000; Opper, 1977). Piaget klinik yöntemi klinik görüşmeler aracılığıyla yürütmüştür. Bu görüşmeler ile öğrencilerin belirli bilişsel yapılarının varlığını ya da yokluğunu ortaya çıkarılarak bu yapılarının gelişiminin anlayışını geliştirmek amaçlanmıştır (Opper, 1977; Schoenfeld, 2002). Çalışmada klinik yöntemi yürütmek için öğretmen adaylarıyla görev temelli görüşmeler (task based interviews) ve ispatın doğasına ilişkin klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu çalışmadaki görev temelli görüşme formları, yarı yapılandırılmış biçimde hazırlanmıştır. Görev temelli görüşmeler, kökleri Piaget'nin klinik görüşmelerine dayanan görüşmeler olup, matematik eğitimindeki nitel araştırmalarda araştırmacılar tarafından bireylerin akıl yürütmeleri, problem çözme davranışları, matematik bilgileri ve anlayışları hakkında bilgi edinmek için kullanılmaktadır (Koichu, 2009; Maher & Sigley, 2014). Görev temelli görüşmelerin klinik görüşmelerin bir biçimi olduğu söylenebilir. Matematik eğitiminde birçok araştırmacı tarafından kullanılan görev temelli görüşmeler (Koichu & Harel, 2007) matematiksel bilgi ve problem çözme davranışlarını ölçmek için hazırlanır (Maher & Sigley, 2014) ve katılımcı ve görüşmeci/görüşmeciler ile yapılır (Goldin, 2000; Houssart & Evens, 2011; Koichu & Harel, 2007). Bu çalışmada bir katılımcı ve bir

görüşmeciyile yapılan görev temelli görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görev temelli görüşmelerde görüşmeci tarafından katılımcıya bir ya da birden fazla görev (task) yöneltilir (Goldin, 2000; Maher & Sigley, 2014). Bu görüşmeler katılımcının problemi çözerken veya hemen sonrasında görüşme boyunca konuşarak bu görevlerle etkileşim içerisinde bulunduğu görüşmelerdir. Görevler katılımcıların daha önce gördükleri ya da görüşmede ilk kez rastladıkları sorular, problemler ya da etkinliklerden oluşabilir (Goldin, 2000; Houssart & Evens, 2011; Koichu & Harel, 2007; Maher & Sigley, 2014). Koichu ve Harel'a (2007) göre "*Görev temelli görüşmeler, görüşmecinin ve katılımcının açık ya da örtük normlar tarafından düzenlenen bir görev üzerinde etkileşim içerisinde bulunduğu bir durum olarak görülebilir*" (s. 349).

## 2.1. Çalışma grubu

Çalışmada amaçlı örnekleme çeşitlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile örneklem seçilme yoluna gidilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının ortaya çıkarılması için içeriğinde sayılar alanında ispat uygulamaları bulunan "Elemantar Sayı Kuramı" dersini almış olma ölçütüne ve bu derse ilişkin yüksek, orta ve düşük başarı düzeylerinde olma ölçütlerine göre örneklem seçimine gidilmiştir. Görüşmeler 2015-2016 eğitim öğretim yılı bahar döneminde bir devlet üniversitesinin Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı'nda dördüncü sınıfta öğrenim gören üç kız öğretmen adayıyla gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının hepsiyle klinik görüşme yöntemiyle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Çalışma raporlaştırılırken katılan öğretmen adaylarının gerçek isimleri kullanılmamıştır. Bu öğretmen adaylarının isimleri çalışmada Semiha, Derya ve Hamra olarak belirlenmiştir. Öğretmen adayları, Elemantar Sayı Kuramı dersi dönem sonu not ortalamaları yukarıdan aşağıya doğru sıralandığında en yüksek, en düşük ve tam ortada kalan notları alan üç öğretmen adayının seçilmesi yoluyla belirlenmiştir. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının mezun oldukları lise türü, lise ve lisans öğrenimleri boyunca akademik not ortalamaları, mezun olup olmama durumları gibi açılardan veri çeşitliliği sağladıkları düşünülmüştür. Bunun yanında tüm öğretmen adayları çalışmaya gönüllü olarak katılmışlardır. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının cinsiyetlerinin aynı olmasının veri çeşitliliğini ve çalışmanın verimini ve özgünlüğünü sağlamada sorun teşkil etmeyeceği düşünülmüştür. Bunun yanında pilot uygulama sonrasında çalışma grubu sayısının öğretmen adaylarının ispat şemaları hakkında ayrıntılı bilgiye sahip olma konusunda (görev temelli görüşmeler kullanılmasına karar verildiği için) yeterli olacağı kanısına varılmıştır. Uygulamanın klinik görüşmeler yerine görev temelli görüşmeler ile yürütülme sebepleri pilot uygulama veri toplama sürecinde (2.3.1) açıklanmıştır. Görev temelli görüşmelerle daha az sayıda öğretmen adayından daha ayrıntılı ve zengin veri toplanacağı düşünülmüştür.

Elemantar Sayı Kuramı dersinde en yüksek not ortalamasına sahip olan Semiha bu dersi 2014-2015 güz döneminde almıştır ve bu dersten 100 puan ile geçmiştir. Bu öğrencinin 2016 yılı güz dönemi Mart ayında belirlenen genel not ortalaması ise 3.77'dir. Semiha Denizli'de bulunan özel bir Anadolu lisesinden 90.92 not ortalamasıyla, Pamukkale Üniversitesi matematik eğitimi programından 2015-2016 yılında 3.78 genel akademik not ortalamasıyla mezun olmuştur. Öğretmen adayı üniversite öğrenciliği



boyunca Denizli’de ailesiyle birlikte yaşamıştır. Semiha çok konuşkan bir öğretmen adayı olmamakla beraber çalışmaya katılmaya gönüllü olmuştur ve soruları yanıtlamıştır.

Elemanter Sayı Kuramı dersinde en düşük not ortalamasına sahip olan Hamra bu dersi 2015-2016 güz döneminde almıştır ve bu dersten 61 puan ile geçmiştir. Bu öğrencinin 2016 yılı güz dönemi Mart ayında belirlenen genel not ortalaması ise 2.63’tür. Hamra Burdur’da bulunan Anadolu öğretmen lisesinden 83.19 not ortalamasıyla mezun olmuştur. Hamra Pamukkale Üniversitesi matematik eğitimi programından 2016-2017 bahar döneminde öğrenciliği devam etmektedir ve 2017 Mart ayı itibariyle genel akademik not ortalaması 2.55’tir. Hamra konuşkan ve kendini iyi ifade edebilen ve çalışmaya katılmaya istekli bir öğretmen adaydır.

Elemanter Sayı Kuramı dersinde tam ortadaki not ortalaması Derya’ya aittir ve bu dersi 2015-2016 güz döneminde alarak 80 puan ile geçmiştir. Bu öğrencinin 2016 yılı güz dönemi Mart ayında belirlenen genel not ortalaması ise 2.99’dur. Derya Muğla’da bulunan bir devlet Anadolu lisesinden 73.91 not ortalamasıyla, Pamukkale Üniversitesi matematik eğitimi programından 2015-2016 yılında 3.05 genel akademik not ortalamasıyla mezun olmuştur. Derya konuşkan bir öğretmen adaydır ve çalışmaya karşı istekli olmuştur.

## 2.2. Veri toplama araçları

Çalışmada tek bir oturumda farklı veri toplama araçları kullanılarak veri toplanmıştır. Veri toplama araçları iki ana bölümden oluşmuştur. Tablo 1’de görüldüğü üzere, ilk bölüm Görev Temelli Görüşmeler’den; ikinci bölüm ise İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu’ndan (İDGF) oluşmuştur. Görev Temelli Görüşmeler, öğretmen adaylarının ispat şemalarını ortaya çıkarmak amacıyla öğretmen adaylarının daha önce gördükleri ya da görüşmede ilk kez rastladıkları ispat problemlerini içeren bir formdan (İspat Soruları Formu (İSF)) ve bu formun yanında öğretmen adaylarının düşüncelerini ayrıntılı olarak anlamaya hizmet etmesi düşünülen ilave formlardan (İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu (İSGF), Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu (GİGF)) oluşmuştur. Görev temelli görüşmelerin hemen akabinde öğretmen adaylarına ikinci bölümde yer alan İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu (İDGF) uygulanmıştır.

**Tablo 1.** Veri toplama araçları

---

A) Görev Temelli Görüşmeler	B) İspatın Doğasına İlişkin Görüşme
A1) İspat Soruları Formu (İSF)	Formu (İDGF)
A2) İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu (İSGF)	
A3) Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu (GİGF)	

---

İSF’deki soruların büyük bölümü öğretmen adaylarının Elemanter Sayı Kuramı dersinde iki bölüm halinde işledikleri sayılar alanındaki “Bölünebilme” ve “Asal Sayılar” konularını kapsayacak şekilde hazırlanmıştır. İSF, ilgili alanyazından (Boyle, 2012; Haverhals, 2011; Healy & Hoyles, 2000; Plaxco, 2011; Schabel, 2001; Selden & Selden, 2003; Yoo, 2008) yararlanılarak ve daha önceden uzman görüşü alınmış, geçerliği ve güvenilirliği test edilmiş sorulardan oluşacak biçimde dokuz soru halinde düzenlenmiştir.

İSF'nin geçerliği ve güvenilirliği uzman görüşü alınarak pilot uygulama öncesi test edilmiştir. Lisans ve lisanüstü öğrenimini matematik alanında yapmış bir matematik eğitimi doçentinden, lisans ve lisanüstü öğrenimlerini matematik eğitimi alanında yapmış iki matematik eğitimi doçentinden, lisans ve yüksek lisans eğitimi matematik bölümünde yapmış ve matematik eğitimi ABD'de görev yapan bir öğretim görevlisinden, resmi okullarda görev yapan iki ortaokul matematik öğretmeninden uzman görüş formu aracılığı ile uzman görüşü alınmıştır. İSF'ye ilişkin soruların olası doğru ve yanlış yanıtlarının bulunduğu ve uzmanlardan bu yanıtların hangi ispat şemasına karşılık geleceği ile ilgili yorumlar isteyen uzman görüş formunda uzmanlardan her soruyu araştırmanın amacı için yeterli olup olmadığına, zorluğu ya da kolaylığına ve açıklık, netlik ve anlaşılabilirliğine göre (5 üzerinden) puanlamaları istenmiştir. Uzman görüşlerine göre İSF'nin tüm sorulara ilişkin amaca uygunluk düzeyi 4,93; soruların kolaylık/zorluk düzeyi 3,4; soruların açıklık, netlik ve anlaşılabilirlik düzeyi ise 4,69 olarak belirlenmiştir.

Bunun yanında uzmanların görüşme soruların uygunluğu hakkında yorum ve önerileri alınmıştır. Uzman görüşü sonrasında uzmanların birbirlerine uyumlu yorumlar ve önerilerde buldukları tespit edilmiştir. Uzman Görüş formu "Herhangi üç tane ardışık sayı içerisinde her zaman 3 ile bölünebilen bir sayı olduğunu gösteriniz" olarak belirlenmiş olan birinci soru, çözümünün içeriğinin "Herhangi üç pozitif ardışık tam sayının çarpımının her zaman 6'nın katı olduğunu gösteriniz" olan üçüncü soruda da olması ve İSF'nin geçerliğini düşüreceğinin düşünülmesi nedeniyle çıkarılmıştır. Sekizinci sorunun ölçüğe alınma sebebi öğretmen adaylarının ispatlarını yapılandırırken örüntü ve modellerden yararlanma durumlarını gözlemektir. Ancak pilot uygulama sonrasında öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde bu sorunun amacına hizmet etmediği belirlenmiştir. ve İSF'den çıkarılmıştır. Pilot uygulama sonrasında öğretmen adaylarının tepkileri analiz edildiğinde, analitik ispat şemalarından dönüşümsel ispat şemasına ilişkin örneklere rastlansa da öğretmen adaylarının analitik aksiyomatik ispat şemasına ilişkin göstergelerine rastlanamamıştır. Öğretmen adaylarının tepkilerinde analitik aksiyomatik ispat şemasının göstergelerinin ortaya çıkmama sebebinin, soruların içeriğinde analitik aksiyomatik düşünceyi ortaya koymayı gerektiren bir durum olmamasından mı yoksa gerçekten hiçbir öğretmen adayının analitik aksiyomatik ispat düşüncesi barındırmamasından mı kaynaklandığının net biçimde ortaya konabilmesi istenmiştir. Bu amaçla analitik aksiyomatik ispat şemasına ilişkin tepkileri ortaya çıkarma potansiyelinde olan bir soru (yedinci soru) eklenerek ek uzman görüşleri alınmış ve araştırma yapılan üniversitenin Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı'nda görev yapan iki araştırma görevlisiyle bu soruya ilişkin ikinci bir pilot uygulama gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada İSF öğretmen adaylarının tüm ispat şemalarını ortaya koyacak özellikle olmalarına dikkat edilerek ispat şemalarının belirlenmesinde farklı amaçlara sahip olarak hazırlanmıştır. Pilot uygulama sonrasında aşağıdaki şekilde sekiz soruluk son halini almıştır (Tablo 2).

**Tablo 2.** İspat Soruları Formu (İSF)

1) Herhangi 3 pozitif ardışık tam sayının çarpımının her zaman 6'nın katı olduğunu gösteriniz.

2) Herhangi 2 tek sayının toplamının her zaman çift olacağını gösteriniz.

3) Herhangi bir pozitif tamsayı  $n$  için eğer  $n^2$  3'ün katıysa  $n$ 'in de 3'ün katı olduğunu gösteriniz.

4)  $b$  tek doğal sayı ise  $8$ 'in  $b^2 - 1$ 'i böldüğünü gösteriniz.

5) Aşağıdaki iddiayı ve buna yönelik verilen 3 ispatı inceleyiniz ve her bir ispatın matematiksel doğruluğu hakkında yorum yapınız.

**İddia:** “Bir tamsayının rakamları toplamı 3 ile bölünürse, bu rakam 3 ile bölünebilir.”

**İspat 1)** Rastlantısal olarak 721234182 sayısını seçtik ve  $7+2+1+2+3+4+1+8+2=30$ 'un 3 ile bölünebildiğini ve 721234182 sayısının 3 ile bölünebildiğini bulduk. Bu sayı rastgele seçilmişti ve iddiayı doğruladı. Yani iddia doğrudur.

**İspat 2)**  $d = a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ ;  $n+1$  basamaklı bir sayı olsun.

Çözümleyelim

$$a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n$$

Burada  $10 \equiv 1 \pmod{3}$  olduğundan

$\forall i \in N$  için  $10^i \equiv 1 \pmod{3}$  olur. Buna göre,

$$d = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \pmod{3} \text{ elde edilir.}$$

Yani bir sayı ile o sayının rakamları toplamı  $(\text{mod}3)$ 'te denktir. Bu yüzden rakamları toplamı 3'e bölünürse sayı da bölünür.

**İspat 3)**

Temel adım;

12; 1'den fazla basamaklı olan 3'e bölünebilen en küçük tamsayıdır.  $1+2=3$

Tümevarım adımı:

İddianın  $n$ 'den küçük veya eşit olan 3'ün tüm katları için doğru olduğunu varsayalım;

3'ün bir sonraki çarpanı  $n+3$ 'ü ele alalım.

$n$ 'in rakamları toplamı 3 ile bölündüğüne göre, bu toplam artı 3 de 3 ile bölünebilir.

Bu yüzden, iddia doğrudur.

6) Yandaki şekil kenarları 3 br ve 4 br olan bir pencere çerçevesini göstermektedir. Pencere, cam levhaları ayıran tahta şeritlerden yapılmıştır. Her cam levha 1 br uzunluğunda ve 1 br genişliğinde kareyi oluşturmaktadır. Sayarsanız, 3 br'e 4 br bir pencere çerçevesi için 31 birim tahta şeride ihtiyaç olduğunu göreceksiniz.


Herhangi bir uzunluktaki pencere için tahta şeridin uzunluğunu bulmayı sağlayan genel bir ifade yazınız. Genellemenizin her boyuttaki pencere için doğru olduğunu ispatlayınız.

## Tablo 2'nin devamı

7) Aşağıda  $\sqrt{-1}$  ile 0 arasındaki ilişkinin çelişki yöntemi ile incelendiği iki ispat verilmiştir. Bu ispatlarda çelişki yönteminin işe yaramama sebebi nedir? İspat içindeki yapılmış olan hata nedir, açıklayınız.

$\sqrt{-1} \leq 0$  olduğunu ispatlayınız

**İspat:**

Varsayım:  $\sqrt{-1} > 0$ , o zaman  $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} > 0$ . Buradan  $-1 > 0$  olur. Bu bir çelişkidir. Bu yüzden  $\sqrt{-1} \leq 0$  olur.

$\sqrt{-1} > 0$  olduğunu ispatlayınız

**İspat:**

Varsayım:  $\sqrt{-1} \leq 0$ , o zaman  $-\sqrt{-1} \geq 0$ . Buradan  $(-\sqrt{-1})^2 \geq 0$ , yani  $-1 \geq 0$ . Buradan yine çelişki olur, bu yüzden  $\sqrt{-1} > 0$ .

8) Asal sayıların sonsuz olduğunu gösteriniz.

İSGF; öğretmen adayları İSF'yi yanıtlarken ispat süreçlerine ilişkin yöneltilen ve öğretmen adaylarının ispat şemalarına ilişkin becerilerini ortaya çıkarmayı hedefleyen genel sorulardan oluşmuştur. İSGF'de öğretmen adaylarına yaptıkları ispatın doğruluğuna araştırmacıyı ya da öğrencileri nasıl ikna edecekleri, yaptıkları ispatın her durum için doğru olup olmayacağı, ispatlarının geçerli olmadığı bir durum için örnek sağlayıp sağlayamayacakları, ispatlarının neden doğru olduğunu düşündükleri, ispatı farklı bir yolla yapıp yapamayacakları, ispatlarında kullandıkları yöntemin ne olduğu ve neden bu yöntemi kullandıkları, ilk akıllarına gelen yöntemin kullandıkları yöntem olup olmadığı, kullandıkları yöntemi nereden hatırladıkları, ispatlarını nasıl buldukları ve her zaman böyle bulup bulamayacakları hakkında sorular sorulmuştur. Bunun yanında öğretmen adaylarından kullandıkları yöntemi kullanma süreçlerini anlatmaları istenmiştir.

Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu (GİGF) her bir ispat şemasını ortaya çıkarmak amacıyla hazırlanmış sorulardan oluşmuştur. Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmeler sırasında İSF'ye verdikleri yanıtlarda gözlemlenen ispat şemalarına göre ilgili soruların yöneltilmesi hedeflenmiştir. GİGF, Tablo 3'te verilmektedir.

**Tablo 3.** Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu (GİGF)

Gözlemlenen ispat şeması	Sorulacak soru
Dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması	Sence bu çözümünü özgün yapan şey nedir?
Dışsal otoriter ispat şeması	Nasıl yaptığını/neye dayanarak yaptığını anlatabilir misin?
Dışsal sembolik ispat şeması	Bu algoritmayı neden kullandın? Bu algoritmanın anlamı ne?
Deneysel temel örnekler ispat şeması	Sence bu bir/bir kaç durum ispat için yeterli mi? Bu ispatı başka bir şekilde yapılandırabilir misin?
Deneysel algısal ispat şeması	Bu çizimini anlatır mısın? Yaptıklarını ayrıntılarıyla gerekçelendirebilir misin?
Analitik dönüştürülebilir ispat şeması	Sence bu ispatında ana (anahtar) mesele ne?
Analitik aksiyomatik ispat şeması	Yaptığın ispat sürecini detaylandırabilir misin?

Görev temelli görüşmelerin hemen akabinde öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşlerini açıklarken sergiledikleri ispat şemalarının ortaya çıkarılması amacıyla İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu (İDGF) yöneltilmiştir. İDGF’de öğretmen adaylarına ispatın ne olduğu, bir ispatı ispat yapan şeyin ne olduğu ve ne yapılırsa matematiksel olarak doğru bir ifade yazılmış olunacağı, başarılı bir ispat için nelerin gerekli olduğu ve ispatın nelerden oluştuğu, ispat için çok gerekli olmayan ama ispata yardım eden şeylerin ne olduğu sorulmuştur.

### 2.3. Veri toplama süreci

Bu çalışmanın veri toplama süreci pilot uygulama ve uygulama olmak üzere iki bölümden oluşmaktadır. Aşağıda bu süreçlere ilişkin ayrıntılı bilgi yer almaktadır.

#### 2.3.1. Pilot uygulama veri toplama süreci

Bu çalışmanın pilot uygulaması 2014-2015 eğitim öğretim yılının mayıs ayında iki kısım halinde gerçekleştirilmiştir. Öncelikle dördüncü sınıfta okuyan 45 öğretmen adayına öğrenim gördükleri üniversiteye ait iki derslikte İSF uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının İSF’ye verdikleri yazılı yanıtlar toplanmış, içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiş, analiz sonucunda ispat şemalarına göre sınıflandırılan öğretmen adaylarından belirli ölçütlerle ispat notasyonları düşük/yüksek gibi ölçütlere göre çeşitlilik sağlanan öğrenci grubunun içerisinde kendini iyi ifade edebileceği düşünülen sekiz (dört kız, dört erkek) öğretmen adayıyla klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmeler sırasında öğretmen adaylarına İSF’deki sorular tekrar yöneltilmiş, önceden yaptıkları ispat çözümlerini tekrar incelemeleri sağlanmıştır. Öğretmen adaylarının açıklamaları sırasında kendilerine İSGF’deki ve GİGF’deki sorular yöneltilerek ispat şemaları hakkında ayrıntılı bilgi

edinilmesi sağlanmıştır. Daha sonra ise görüşme yapılan öğretmen adaylarına İDGF'deki sorular yöneltilmiştir.

Pilot uygulamanın iki kısım halinde yürütülmesi öğretmen adaylarının yazılı sınavlarda ve görüşmelerde aynı soruya ilişkin farklı ispat şemalarının göstergeleri olan tepkiler sergilemelerine yol açmıştır. Öğretmen adayları yazılı halde dile getirmediikleri bazı düşünceleri görüşmelerde dile getirerek daha zengin ve farklı veri sağlamışlardır. Öğretmen adaylarının yazılı sınavdaki ispat sorularına verdikleri yanıtlarla görüşmede ortaya çıkan yanıtların ve buna ait ispat şemaları sınıflandırmasının neden farklı olduğunun belirlenme işine harcanan sürenin çalışmanın asıl amacı olan öğretmen adaylarının ispat şemalarının belirlenmesine harcanan süreden daha fazla olduğu görülmüştür. Bu durumun çalışmanın amacına hizmet etmediği düşünülmüştür. Pilot uygulama verilerinin analizi sonrasında, öğretmen adaylarına İSF'nin önceden verilerek yanıtları yazılı olarak alındıktan sonra ayrıca görüşmeler yapılandırmak yerine, tüm uygulamanın tek bir görev temelli görüşme ile yapılmasına karar verilmiştir.

### 2.3.2. Uygulama veri toplama süreci

Bu çalışmanın verileri 2015-2016 eğitim öğretim yılının bahar döneminde görev temelli görüşmeler ve hemen akabinde ispatın doğasına ilişkin görüşmeler aracılığıyla tek bir oturumda toplanmıştır. Görüşmeler 1 saat 48 dakika ile 2 saat 29 dakika arasında sürmüştür.

### 2.4. Verilerin analizi

Öğretmen adaylarının ispat şemalarının ortaya çıkarılması için Görev Temelli Görüşmelere ve İDGF'ye verdikleri yanıtlar içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Öncelikle birinci araştırmacı tüm görüşmelere ilişkin deşifreleri yapmıştır. Birinci araştırmacı dâhil olmak üzere üç kişiyle yürütülen içerik analizinde görev temelli görüşmelerin ve ispatın doğasına ilişkin görüşmelerin analizleri birbirlerinden bağımsız olarak yapılmıştır. Tüm görüşmeler için verilerin analizine soru bazında başlanmıştır. Öncelikle deşifrelerden her öğretmen adayı için birinci sorulara verilen tepkiler okunmuş, daha sonra birinci soru için her öğretmen adayı ayrı ayrı değerlendirilmiştir. Daha sonra aynı işlem ikinci soru, ... ve diğer sorular için tekrarlanmıştır. Parçalanmış veriler ortak olan noktalar dikkate alınarak incelenmiş, karşılaştırılmış, kavramsallaştırılarak sınıflandırılmıştır. Böylelikle öğretmen adaylarının tepkileri belirli ispat şemalarının göstergeleri olarak belirli bir kod listesi ile sınıflandırılmıştır. Bu işlem tüm kodlayıcılar tarafından ayrı ayrı farklı oturumlarda gerçekleştirilmiştir. Son haline gelen kodlar birbirlerinden ayrı olarak Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması sınıflamasına göre sınıflandırılmıştır. Bunun için kodlayıcılara ispat şemaları sınıflandırması ile ilgili doldurabilecekleri tablolar verilmiştir. Böylelikle belirli kodların belirli ispat şemaları altında sınıflandırıldığı tek bir sınıflandırma tablosu ortaya konmuştur. Bu nihai sınıflama ile temel ispat şemaları ve alt sınıflamaları araştırmada kullanılan temalar ve alt temalar olarak; kodlar ise ilgili ispat şemalarının göstergeleri olarak ortaya çıkmıştır (Tablo 4).

**Tablo 4.** İspat şemalarının uygulamaya ilişkin göstergeleri

İspat Şeması (Temalar)	İspat Şemasının Alt Sınıflandırma Şemaları (Alt Temalar)	Görev Temelli Görüşmeler		İDGF	
		İspat Şemasının Göstergesi (Kodlar)	Öğretmen Adayı (Soru No)	İspat Şemasının Göstergesi (Kodlar)	Öğretmen Adayı (Soru No)
Dışsal İspat Şeması	Dışsal Otoriter İspat Şeması	İzlediği yol hakkında derslerden öğrendiklerine atıf yaparak açıklama yapma	Semiha (8) Hamra(1)		
	Dışsal Sembolik İspat Şeması	İspatı yapılandırırken sembolleri anlamsızca manipüle etme	Derya (3)		
		İşlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakma	Semiha (1) Derya (1)		
		Sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama	Semiha(5) Derya(1,3,5) Hamra (4)	İspatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklama	Semiha (3) Derya(1,2,3) Hamra (1)
		İspatı yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullanma	Semiha(2,3) Derya(2)		
		Kullandığı yöntem hakkında yanlış bilgiyle ispatı yapılandırma	Semiha (3)		
		İspatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek yargılama	Hamra (5)	İspatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek göstermeye çalışma	Hamra (2,3)
		Genel ifadelerle yüzeysel deliller sunma	Hamra (8)		
		İspatın doğruluğunu hislerine dayanarak göstermeye çalışma	Semiha (1)		
	Deneysel İspat Şeması	Deneysel Algısal İspat Şeması	Sadece özel bir durum için inceleme yaparak nedensel ilişkileri belirleyememe	Hamra (6)	
	Deneysel Örnek Temelli İspat Şeması	İspatın doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalışma	Hamra (3,5#)	İspatın doğruluğunu belirli değerler üzerinden göstermeye çalışma	Hamra (2)
Analitik İspat Şeması	Analitik Dönüştürsel İspat Şeması	İspatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma	Semiha(4,6) Derya(1#,4,6) Hamra (4#)	Diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek ifadelerde bulunma	Semiha (1) Derya (4)
		Ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandırma	Semiha (3#) Hamra (2)		
		İspatın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıklama	Semiha (5) Derya (5)		

#Bu ispat şemasına girmemekle beraber o ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere sahip olabileceğine dair deliller ve ipuçları bulunması (sıklık hesaplamalarına dahil edilmemiştir)

### 3. Bulgular

Öğretmen adaylarının çalışmadaki görüşmelerde dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana kategorideki ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler sergiledikleri belirlenmiştir. Öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde ana kategorideki ispat şemalarının yanında analitik aksiyomatik ispat şeması haricindeki tüm alt sınıflarındaki ispat şemalarına ilişkin tepkiler gösterirken; ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş, deneysel örnek temelli ve analitik dönüşümsel ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler vermişlerdir. Tablo 5 öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde İSF'ye verdikleri yanıtlardaki, Tablo 6 ise ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde İDGF'ye verdikleri yanıtlardaki ispat şemaları dağılımlarını göstermektedir.

**Tablo 5.** Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerdeki ispat şemaları dağılımları

Soru No	Öğretmen Adayı	Dışsal İspat Şeması			İspat Şeması		Analitik İspat Şeması	
		Alışkanlık Edinilmiş	Otoriter	Sembolik	Deneysel İspat Şeması	Algsal	Dönüşümsel	Aksiyomatik
1	Semiha	+				+		
	Derya	+					‡	
	Hamra		+					
2	Semiha	+						
	Derya	+						
	Hamra						+	
3	Semiha	+					‡	
	Derya	+		+				
	Hamra				+			
4	Semiha						+	
	Derya						+	
	Hamra	+					‡	
5	Semiha	+					+	
	Derya	+					+	
	Hamra	+				‡		
6	Semiha						+	
	Derya						+	
	Hamra					+		
7	Semiha							‡**
	Derya		+					
	Hamra		+					
8	Semiha		+					
	Derya							
	Hamra	+						
Toplam		11	2	1	1	2	7	0
Toplam			16		3		7	

‡ Bu ispat şemasına girmemekle beraber o ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere sahip olabileceğine dair deliller ve ipuçları bulundurulması (sıklık hesaplamalarına dahil edilmemiştir); \* Öğretmen adayının birden fazla ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterirken bu ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkileri ağırlıklı olarak ortaya koyması; \*\*Öğretmen adayının alt sınıflamaya dâhil edilemeyecek nitelikte sadece temel ispat şeması sınıflandırmasına ilişkin tepkiler ortaya koyması



Tablo 5'te görüldüğü üzere, öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde bazı durumlarda bir ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilerken bazı durumlarda aynı anda birden fazla ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri belirlenmiştir. Bu durumun farklı iki yolla ortaya çıktığı görülmüştür. Bu yollardan ilki öğretmen adaylarının farklı sorularda farklı ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermeleri olarak belirlenmiştir. Örneğin Hamra birinci soruda dışsal otoriter ispat şemasını gösteren ifadelerde bulunurken ikinci soruda analitik dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler göstermiştir. Bu durumun tüm öğretmen adayları için geçerli olduğu belirlenmiştir. İkinci olarak öğretmen adayları aynı soruya ilişkin yanıtlarında birden fazla ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir. Örneğin Semiha birinci soruda ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler verirken aynı zamanda deneysel algısal ispat şemasını ortaya koyan tepkiler de göstermiştir. Bir ispat şemasının göstergesi olan tepkileri ağırlıklı olarak gösterme durumu Tablo 5'te \* işareti ile gösterilmiştir. Bazı durumlarda ise öğretmen adayları bir ispat şemasını ortaya koyan tepkileri tamamen sergilemeseler de o ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bir takım özellikleri ya da düşünceleri bulunduklarına ilişkin deliller ortaya koymuşlardır. Bu durumlar † ile işaretlenmiştir ve sıklık hesaplamalarına direkt dâhil edilmemiş, ayrıca ele alınarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının bazı durumlarda ise ispat şemalarının alt sınıflarına ilişkin değil temel sınıflandırma olarak belirli ispat şemasını ortaya koyan tepkileri gösterdikleri belirlenmiştir. Örneğin Derya ve Hamra İSF'nin yedinci sorusuna ilişkin tepkilerinde temel sınıflandırma olarak analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir. (Bu durumlara örnek teşkil edecek tepkiler aşağıda örnekle açıklanmıştır).

Görev temelli görüşmelerde (Tablo 5), öğretmen adaylarından en yüksek ve orta başarı düzeylerindeki Semiha ve Derya benzer olarak aynı dört soruda (birinci, ikinci, üçüncü ve beşinci sorularda) ve ispat şemasının göstergesi olan beş tepkide en sık olarak dışsal alışkanlık ispat şemasının göstergelerini ortaya koymuşlardır. En düşük başarı düzeyindeki Hamra ise görev temelli görüşmelerde diğer öğretmen adaylarından farklı olarak sadece beşinci ve sekizinci sorularda dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin göstergeler sergilemiştir. Yüksek ve orta başarı düzeylerindeki Semiha ve Derya dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasından sonra en sıklıkla birbirlerine yine benzer olarak İSF'nin dördüncü, beşinci ve altıncı sorularında analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler vermişlerdir. En düşük başarı düzeyindeki Hamra ise sadece bir durumda farklı bir soruda (İSF'nin ikinci sorusunda) analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin göstergelere sahip olmuştur. Dolayısıyla, bu çalışmada daha yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının kendi aralarında ispat şemalarını ortaya koyan tepkilerinin benzer olduğu ve daha yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterme ihtimallerinin daha düşük başarı düzeyindeki öğretmen adaylarına göre daha yüksek olduğu sonucuna varılabilir.

Bu çalışmada Tablo 4'te de görülebileceği üzere öğretmen adayları görev temelli görüşmeler boyunca izledikleri yol hakkında derslerden öğrendiklerine atıf yaparak açıklama yaparak dışsal otoriter ispat şemasına; ispatı yapılandırırken sembollerini anlamsızca manipüle ederek dışsal sembolik ispat şemasına ilişkin tepkiler ortaya

koymuşlardır. Öğretmen adayları işlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bıraktıkları, sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri aradıkları, ispatı yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullandıkları, kullandıkları yöntem hakkında yanlış bilgiyle ispatı yapılandırdıkları, ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek yargıladıkları ve genel ifadelerle yüzeysel deliller sundukları durumlarda ise dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin tepkiler ortaya koymuşlardır. Bunun yanında ispatın doğruluğunu hislerine dayanarak göstermeye çalıştıkları ve sadece özel bir durum için inceleme ile nedensel ilişkileri belirleyemedikleri durumlarda deneysel algısal ispat şemasına; ispatın doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalıştıkları durumlarda deneysel temel örnekler ispat şemasına; ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırdıkları, ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandırdıkları ve ispatın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıklayarak ise analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin göstergelerle tepkiler ortaya koymuşlardır. İspatın doğasına ilişkin görüşmelere bakıldığında ise öğretmen adayları ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek göstermeye çalışarak ve ispatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklayarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına; ispatın doğruluğunu belirli değerler üzerinden göstermeye çalışarak deneysel temel örnekler ispat şemasına; diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek ifadelerde bulunarak ise analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin tepkiler sergilemişlerdir.

Bu çalışmada, görev temelli görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının en belirleyici göstergesi “*sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama*” olarak, ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde ise “*ispatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklama*” olarak belirlenmiştir.

Öğretmen adaylarının “*sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama*” göstergesine ve bunun yanında alt sınıflamaya dâhil edilemeyecek nitelikte sadece temel ispat şeması sınıflandırmasına ilişkin tepkiler ortaya koymaları durumuna ilişkin örnek aşağıda yer almaktadır:

Derya birinci soruyu yanıtlarken soruyu Elemanter Sayı Kuramı dersine ilişkin hatırlamalarına yoğunlaşmıştır. Derya öncelikle  $n$ ,  $n+1$  ve  $n+2$  gibi üç ardışık sayı ifadesi ile başlamış, bu sayıları 6'nın katına eşitleyerek bir eşitlik oluşturmuştur. Fakat bunları yaparken kendisini doğru ispata götürecek çıkarımları yapamadığını belirten ifadeler kullanmıştır. Aşağıda Derya'nın açıklamaları yer almaktadır:

**D: *Bunu bize daha önce sormuşlardı sanırım.***

A: *Öyle mi, hangi sınavda?*

**D: *Elemanter gibi bir sınavda olabilir.***

A: *Öyle mi?*

D: *Yani ben 6'nın katı çıktığını hatırlıyorum ama....*

A: *Neyin 6'nın katı olacağını düşünüyorsun?*

D: *Cevabın 6'nın katı çıktığını hatırlıyorum... üç ardışık sayı vermiş bize, üç tane, bunları çarpınca cevabın her zaman 6'nın katı ... olacağını göstermemizi istiyor. [durur]*

Yukarıdaki alıntılardaki “*Bunu bize daha önce sormuşlardı sanırım*”, “*Elemanter gibi bir sınavda olabilir*”, “*Cevabın 6'nın katı olduğunu hatırlıyorum*” gibi ifadelerinden de

görülebileceği gibi, Derya'nın bu soruda akıl yürütmeden verilenleri yerine koyup derslerde öğrendikleri gibi bir takım işlemlerle yola koyulduğu belirlenmiştir

Derya birinci soruya ilişkin tepkilerinde ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilemiş; bunun yanında tam olarak analitik dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler olmasa da, bu şemayla ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere ilişkin tepkiler sergilemiştir (Tablo 4, †). Derya'ya daha önceki benzer süreçlere takılmadan kendi akıl yürütmesiyle neler yapabileceğini gözlemek için bu soruda dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkileri gösterdiği durumları hiç bilmeseydi farklı bir yolu deneyip deneyemeyeceği sorulmuştur. Bu soru üzerine Derya öncelikle 6 sayısını 1, 2 ve 3 sayılarının çarpımı olarak yazmıştır. Daha sonra bu ardışık sayıların birer fazlası olan 2, 3, 4; 3, 4, 5 ve 4, 5, 6 sayılarını çarpım durumunda yazan Derya'nın bunların hepsinin içerisinde 2 ve 3 çarpanı olduğunu keşfettiği görülmüştür. Bu yanıtına ilişkin yaptıkları Şekil 2'de görülebilir:

Handwritten work showing the decomposition of 6 into 1, 2, and 3, and then listing products of consecutive numbers starting from 2. The products are 2\*3\*4, 3\*4\*5, and 4\*5\*6. Below these, there are some numbers 7, 8, 9 and 2, 4, 3, 3, 3, which seem to be related to the products or a sequence.

Şekil 2. Derya'nın İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtı

Şekil 2'de görüldüğü üzere Derya'nın farklı sayıların içerisinde 6 çarpanını bulmak için denemeler yaptığı, açıklamalarının doğru akıl yürütmeye dayandığı fakat kendisine yaptıklarının ispat olup olmadığı sorulduğunda, yaptığının ispat olmadığını düşündüğünü belirttiği görülmüştür. Derya'nın açıklamaları aşağıdaki gibidir:

D: Burada aslında ben ...ü...işlemleri yaptığımda 6'nın çarpanını elde etmeye çalıştım hmmm...sonuçta üç ardışık sayı dediği için ben onları yazdım ve onları çarptığımda 6'nın bir katı gelmesini bekledim üü... Burada hani aslında sayı verip deneyince doğruluğu gözüküyor ama bu şekilde ispatladığı da söyleyemem .....[düşünür]

A: Bu yolları hiç bilmeseydin başka bir yol deneyebilir miydin? Başka bir yöntem deneyebilir miydin? Aklında bir şey var mı? (İSGF)

D: Şey olarak düşünüyorum ama...6...bir çarpı iki çarpı üç üü...diye düşündüm ... burada sonuçta bu ardışık sayılar bu çarpımları işte bunu genelleştirmeye giderken .....[düşünür].

A: Şimdi 6 eşittir 1, 2, 3 dedin onunla yapmaya çalıştın.

D: İşte bunu genelleştirmeye çalıştım... ama işte orada tam bir şey bulamadım.

A: Yani üç ardışık sayı aldın sanırım .

F: Evet 6'yı 1, 2, 3 şeklinde yazabiliriz hani bunlar da zaten ardışık üç sayı işte bundan bunun doğruluğundan yola çıkarak bir şeyler yapabiliriz ama şu an aklıma bir şey gelmiyor....[düşünür]..... hani aslında her sayıda 1 çarpanı vardır ...üü... 2, 3 çarpanı.....üü... ama ardışık olması gerekir .....[yazar] ...üü... Deneme yanılma gibi bir şey yaptım ama ...hani... ardışık sayıları birkaç kere yazdım her yazdığımda zaten ...2 çarpanı

*zaten muhakkak gelir..... mesela 6, 2 ve 3 ...3'ün çarpımı diye düşünürsem iki her zaman muhakkak geliyor 3 de zaten üç tane sayı her üçlüde 3'ün katı geliyor zaten ... buradan yola çıkarak altının gelebileceğini düşündüm...birkaç deneme yaptım işte 2, 3, 4; 3, 4, 5 gibi...uu... her üçlüde zaten 3'ün katı muhakkak geliyor ..hani üçlü olduğu için üç fazlası ya da 3'ün katları şeklinde düşünürsek .... Muhakkak bu üçlüde bir tane 3'ün katı geliyor...uu... 2 de aynı şekilde 2'nin de en az bir katı geliyor o yüzden hani elde ettiğimiz sayının da muhakkak 6 çarpanı oluyor ...bunu düşündüm.*

*A: Sence bu yaptığın ispat mı?(İSGF)*

*D: Buna ispat diyemeyiz. yani bu ben hani...burada birkaç şeyi deneme yanılma yoluyla buldum ...hmmmm... tam anlamıyla ispat diyemem.*

Yukarıdaki açıklamalarından da anlaşılacağı üzere Derya'nın 6'nın katı olmayı 2 ve 3 sayılarının katı olmaya dayandırdığı ve bunun yanında doğru akıl yürütmesine ilişkin doğru açıklamalar yaptığı, fakat bu yaptıklarının bir ispatı oluşturmayacağını düşündüğüne ilişkin açıklamalarda bulunduğu belirlenmiştir. Buradan, Derya'nın analitik dönüşümsel ispat şemasını gösteren bazı belirtilerden biri olan dönüşümsel bir fikre sahip olmasına rağmen, "ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma" göstergesini tam olarak taşıyamadığı; bu fikirleri örüntüsünü genellemede kullanmadığı belirlenmiştir. Dolayısıyla Derya'nın akıl yürütmesini genel bir çıkarıma ulaşmak için kullanmadığından tam olarak analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler vermediği fakat dönüşümsel fikre sahip olduğu bunun yanında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilediği saptanmıştır.

Görev temelli görüşmelerde analitik dönüşümsel ispat şemasının en belirleyici göstergesi "ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma" olarak belirlenirken, ispatın doğasına ilişkin öğretmen adaylarının bu sınıftaki ispat şemasına ilişkin tek göstergesi "diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek ifadelerde bulunma" olarak belirlenmiştir. Görev temelli görüşmelerde analitik dönüşümsel ispat şemasının "ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma" göstergesinin sergilenme durumlarına ilişkin bir örnek aşağıda yer almaktadır:

Semiha İSF'nin dördüncü sorusu olan "b tek doğal sayı ise 8'in  $b^2 - 1$ 'i böldüğünü gösteriniz" sorusunu yanıtlarken öncelikle b'ye bir tek sayı ifadesi ( $b=2n-1$ ) vermiş, daha sonra bu ifadenin karesini alarak içerisinde 8'in katını arama yoluna gitmiştir. Semiha'nın 8'in katı için 4 ve 2 çarpanlarını aradığı, 4 çarpanını denklem içerisinde elde ettikten sonra  $n.(n+1)$  ifadelerinin bir tek ve bir çift sayının çarpımı olacağı çıkarımını yaptığı görülmüştür. Semiha'nın ilgili yanıtı Şekil 3'te yer almaktadır:

$$\begin{aligned}
 b &= 2n - 1 \\
 b^2 &= (2n - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 \\
 b^2 - 1 &= 4n^2 - 4n + 1 - 1 = 4n^2 - 4n \\
 &= 4n(n - 1) \\
 &= 4n(n - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \\
 &= 2n(n - 1) \cdot 2 \\
 &= 4n(n - 1) \\
 \frac{4n(n - 1)}{8} &= \frac{n(n - 1)}{2}
 \end{aligned}$$

Şekil 3. Semiha'nın İSF'nin dördüncü sorusuna ilişkin yanıtı

Semiha'ya ispatını doğru yapılandırmasına temel teşkil eden fikri sorulduğunda ikna edici yanıtlar vermiştir. Semiha'nın ilgili açıklamaları aşağıda yer almaktadır:

*A: Buradaki anahtar mesele ne? Ana mesele, temel konu, senin ispatında budur bundan dolayıdır dediğin şey ne? (İSGF, GİGF)*

*S: İmmn yani bulduğum şeyde 4 çarpanının gelmesi ve iki tane ardışık sayının gelmesi ben  $b^2-1$ 'de 4 çarpanını bulduğum için 8'in 4 çarpanını götürebildim ve iki ardışık sayının çarpımının 2'nin katı olduğunun konusu olduğu için yani direk yazabildim.*

Yukarıdaki açıklamalarından ve Şekil 3'ten de görüleceği üzere, Semiha'nın doğru akıl yürütme yaparak ve ikna edici tutarlı basamaklar yapılandırarak ispatını tamamladığı söylenebilir. Semiha'nın konuyu ele alış ve sergileyiş biçimi düşünüldüğünde bu soruya ilişkin yanıtlarında analitik dönüşümsel ispat şemasının göstergesi olan tepkiler ortaya koyduğu saptanmıştır.

Öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşmelerdeki ispat şemalarına ilişkin dağılımlar Tablo 6'da yer almaktadır.

**Tablo 6.** Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerdeki İspat Şemaları Dağılımları

Soru No	Öğretmen Adayı	İspat Şeması						
		Dışsal İspat Şeması			Deneysel İspat Şeması		Analitik İspat Şeması	
		Alışkanlık Edinilmiş	Otoriter	Sembolik	Örnek Temelli	Algısal	Dönüşümsel	Aksiyomatik
1	Semiha						+	
	Derya	+						
	Hamra	+						
2	Semiha							+**
	Derya	+						
	Hamra	+			+	*		
3	Semiha	+						
	Derya	+						
	Hamra	+						
4	Semiha							
	Derya						+	
	Hamra							
Toplam		7			1		2	
Toplam			7		1		3	

\* Öğretmen adayının birden fazla ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterirken bu ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkileri ağırlıklı olarak ortaya koyması

\*\*Öğretmen adayının alt sınıflamaya dâhil edilemeyecek nitelikte sadece temel ispat şeması sınıflandırmasına ilişkin tepkiler ortaya koyması

Tablo 5 ve Tablo 6'dan da görülebileceği üzere tüm görüşmeler boyunca, öğretmen adaylarının en çok dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler verdiği, bunun dışındaki dışsal ispat şemalarının alt sınıflarına ilişkin tepkilerinin az olduğu ve dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasından sonra en sıklıkla analitik dönüşümsel ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler verdikleri saptanmıştır. Öğretmen adayları en az sıklıkla deneysel ispat şemasına ilişkin tepkiler sergilemişlerdir. Bunun yanında öğretmen adaylarının analitik dönüşümsel ispat şemasıyla başka bir ispat şemasını ortaya koyan

tepkiler gösterdikleri tüm durumlarda, aynı zamanda dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri görülmüştür. Tüm bu bulgular değerlendirildiğinde çalışmadaki öğretmen adaylarının ispat yaparken oluşturdukları dönüşümsel yargılarının daha çok alışkanlık edinilmiş ispat şemaları tarafından bloke edildiği; çıkarım yapmalarına engel olan alışkanlıkları yani dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına neden olan eğilimleri ortadan kaldırıldığında, analitik ispat şemalarının göstergelerini taşıma ihtimallerinin yüksek olduğu söylenebilir. Görev temelli görüşmelerde *“sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama”* ve ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde *“ispatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklama”* göstergelerinin dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının en önemli belirleyicileri olduğu düşünüldüğünde, öğretmen adaylarının önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri aramalarına ve önceki öğrenmelerine ilişkin yüzeysel bilgilere başvurmalarına ilişkin eğilimleri azaltıldığında analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan göstergeleri taşıma ihtimallerinin yükseleceği söylenebilir.

Öğretmen adaylarının tüm görüşmelerde analitik ispat şemasının yanında dışsal ispat şemasına ilişkin tepkiler verdikleri ve sadece analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkilerinin tepkilerinin az olduğu ele alındığında öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan fikirlerinin ispatın doğası hakkındaki gelişmemiş ve yanlış fikirleri ile ilişkili olduğu yorumu yapılabilir. Görev temelli görüşmelerde öğretmen adaylarının dönüşümsel fikirlerine dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin fikirlerinin engel olabileceği ve tüm dengelsel çıkarımlar yaparak ispatlarını doğru yapamadıkları düşünüldüğünde, bunun onların çoğunlukla dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarını ortaya çıkaran fikirler geliştirmiş olmalarından kaynaklanabileceği söylenebilir. Görev temelli görüşmelerde ve ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde en çok kullanılan dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının en belirleyici göstergeleri sırasıyla *“sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama”* ve *“ispatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklama”* olarak tanımlanmıştır. Dolayısıyla çalışmaya katılan öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel fikirleri ile onların ispatı yapılandırırken dönüşüm yapmalarına engel olan fikirlerinin ilişkili olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin bu tür göstergelere sahip olma durumları ile ispatlarını önceden edindikleri bilgilere dayanarak yapılandırmaya çalıştıkları durumların birbirine benzediği yorumu yapılabilir. Öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin fikirlerinin ve ispatı yapılandırırken ve değerlendirirken sergiledikleri tepkilerin çoğunluğunun dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının göstergelerini taşıdığı düşünüldüğünde, öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin alışkanlık edinilmiş fikirlerinin güçlendirilmesinin veya ispatları yapılandırırken veya yargılamakta dönüşüm yapmalarına engel olan alışkanlık edinilmiş düşüncelerinin ortadan kaldırılması durumlarının iki yönlü olarak birbirlerini etkileyebileceği öngörülebilir.

Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde İSF'ye verdikleri yanıtlarda kullandıkları ispat yöntemlerinden habersiz oldukları; bu yöntemleri uygularken kavram yanlışlarına sahip oldukları belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının, çoğu durumda kendilerine yöneltilen soruyu okuyup üzerinde düşündükten sonra uygun olan ispat yöntemini seçerek ispatı yapılandırmak yerine, kendilerine daha önceden tanıdık gelen

ifadeler için önceden hatırladıkları kalıpları soruda uygulayarak sonuca ulaşma eğiliminde oldukları görülmüştür. Özellikle tümevarımsal akıl yürütme kullanarak yapılandırmaya çalıştıkları ispatlarında öğretmen adaylarının hiçbirinin temel basamaktan haberdar olmadığı ve tümevarımsal akıl yürütmeyi doğru yapılandırmadıkları, ispatlarını derslerde öğrendiklerine benzer adımlar oluşturarak yapılandırmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Nitekim İSF'nin beşinci sorusunun yanlış olan son ispatını kimsenin doğru değerlendiremediği görülmüştür. Öğretmen adayları kullandıkları yöntemin ne olduğunu açıklamakta zorluk yaşamışlardır. Bu bulgu, öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal ispat şemalarını ortaya koyan ifadelerinin yoğun olması bulgusu ile tutarlıdır. Öğretmen adaylarının kullandıkları yöntem hakkında bilgi eksikliklerinin ispat yapılandırmalarını yanlış biçimde oluşturmalarına sebep olduğu yorumu yapılabilir. Öğretmen adaylarının kullandıkları ispat yöntemlerini bilmemelerinin ve yöntemler hakkında kavram yanlışlarına sahip olmalarının sebebi onların ispatın doğası hakkındaki dışsal ispat şemasını ortaya çıkaran düşüncelerinden kaynaklanıyor olabilir.

Öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde ispat yaparken ve ispatları yargılamak analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin en belirleyici gösterge olarak “İspatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma” göstergesiyle ve bunun yanında “ispatın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıklama” göstergesiyle tepkiler vermişlerdir. Öğretmen adayları ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tek bir gösterge ile açıklama yapmışlardır: “Diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek ifadelerde bulunma”. Bu göstergeler birlikte değerlendirildiklerinde, Bu iki göstergenin öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde analitik dönüşümsel ispat şemasının göstergeleri olan ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırdıkları ve ispatın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıklama durumlarının, onların ispatın doğasına ilişkin diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek fikirleri ile ilişkili olduğu söylenebilir.

Tüm bu bulgular beraber değerlendirildiğinde; öğretmen adaylarının ispatın doğası hakkındaki görüşleri ile ispatı yapılandırmaları ve ispatı değerlendirmelerinin benzerlik gösterdiği düşünülmüştür.

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmanın amacı ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarının neler olduğunu ortaya koymak, öğretmen adaylarının bu şemaları nasıl ortaya koyduklarını inceleyerek ispat şemalarının ne gibi farklılıklar gösterdiğini belirlemek ve bu konuda öneriler geliştirmektir. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının belirlenebilmesi için bazı çalışmalar (CadwalladerOlsker, 2007; Ellis, 2007; Grigoriadou, 2012; Güner, 2012; Harel, 2001; Harel & Rabin, 2010; Haverhals, 2011; Heinze & Reiss, 2003; Housman & Porter, 2003; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010; Koichu, 2009; Liu & Manouchehri, 2013; Martin ve diğerleri, 2005; Oflaz ve diğerleri, 2016; Ören, 2007; Plaxco, 2011; Recio & Godino, 2001; Sarı ve diğerleri, 2007; Şen ve Güler, 2015; Soto, 2010; SoucyMcCrone & Martin, 2004; Sowder & Harel, 2003; Stylinou, Chae & Blanton, 2006; Şengül ve Güner, 2013; Uygan, ve diğerleri, 2014; Weber, 2010) Harel ve Sowder'ın (1998), bazı çalışmalar (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Flores, 2006; İskenderoğlu, 2010) ise Sowder ve Harel'in (1998) ispat şemaları sınıflandırmasını kullanmıştır. Bu çalışmada, veri setinin

yapılanmasına daha uygun olduğu düşünüldüğünden Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması sınıflandırması kullanılmıştır.

Alanyazındaki bazı çalışmalarla (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Flores, 2006; Güner, 2012; Haverhals, 2011; Harel, 2001; Housman & Porter, 2003; İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010; Ören, 2007; Plaxco, 2011; Sarı ve diğerleri, 2007; Stylinou ve diğerleri, 2006; Şen ve Güler, 2015; Şengül ve Güner, 2013) tutarlı olarak bu çalışmadaki öğretmen adaylarının tüm sorulara ilişkin cevapları incelendiğinde dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç temel kategorideki ispat şemalarının ortaya çıktığı belirlenmiştir. Bu çalışmanın bulgularına göre en yüksek ve en düşük başarı düzeyindeki iki öğretmen adayı (Semiha ve Hamra) görev temelli görüşmelerde Plaxco'nun (2011) çalışmadaki katılımcılar gibi tüm temel ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler gösterirken orta başarı düzeyindeki öğretmen adayı (Derya) ise görev temelli görüşmelerde iki temel ispat sınıflandırması olan analitik ve dışsal ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler göstermiştir.

Araştırmanın bulguları bazı çalışmaların (Flores, 2006; Housman & Porter, 2003; Plaxco, 2011; Sarı ve diğerleri, 2007) belirttikleri gibi Harel ve Sowder'in (1998) "bir kişi birden fazla ispat şemasına ilişkin tepkiler ortaya koyabilir" varsayımıyla tutarlı olmuştur. Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde iki ispat şemasını ortaya koyan tepkileri bir arada buldukları görülmüştür. Örneğin Semiha İspat Soruları Formu'nun birinci sorusunda ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterirken aynı zamanda algısal ispat şeması olarak nitelendirilebilecek ifadelerde de bulunmuştur. Plaxco (2011), Sarı ve diğerleri (2007) gibi çalışmalarda da görüldüğü üzere bu çalışmada bazı durumlarda öğretmen adayları bir ispat şemasını ortaya koyan tepkileri daha ağırlıklı olarak gösterirken, diğer ispat şemasına ilişkin tepkiler de gösterebileceklerine ilişkin deliller ortaya koymuşlardır. Bir öğretmen adayının iki farklı ispat şemasına ilişkin tepkileri aynı anda ortaya koydukları durumların hepsinde ispat şemalarından birinin dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olduğu görülmüştür. Başka deyişle bir öğretmen adayı bir durumda eğer iki farklı ispat şemasına ilişkin tepkiler gösterdiyse bunlardan biri dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olmuştur. Benzer olarak Plaxco (2011) çalışmasında üç matematik lisans öğrencisinin ispat anlayışları arasındaki ilişkileri incelemiş ve üç öğrenciden ikisinin analitik ispat şemasının yanında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler ortaya koydukları sonucuna ulaşmıştır. Çalışmaya katılan diğer öğretmen adayı ise analitik ispat şemasının yanında dışsal ispat şemalarından otoriter ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler göstermiştir. Bu çalışmada iki ispat şemasından biri analitik ispat şeması olan tüm öğretmen adaylarının ikinci olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği düşünüldüğünde, iki çalışmanın bulgularında analitik ispat şemalarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasıyla yan yana gelme durumlarının benzerlik gösterdiği söylenebilir.

Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde temel ispat şemaları sınıflandırmasına göre en çok dışsal ispat şemalarının göstergeleri olan tepkiler ortaya koydukları görülmüştür. Öğretmen adayları analitik dönüşümsel fikirleri olsa da bunların yanında çoğunlukla dışsal fikirlere yönelmişlerdir. Bu yüzden öğretmen adaylarının



sadece analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koydukları durumların az olduğu sonucuna ulaşılabilir. Bu bulgu öğrencilerin büyük bölümünün dışsal ispat şemalarının belirleyicisi olan tepkiler ortaya koydukları diğer çalışmalarla (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Liu & Manouchehri, 2013; Ören, 2007; Şen ve Güler, 2015) tutarlıdır. Fakat anılan çalışmalarda, çalışılan grup ortaokul ve lise öğrencilerinden oluşmuştur. Öğretmen adaylarının daha üst sınıf düzeyinde oldukları düşünüldüğünde, dışsal ispat şemalarını ortaya koyan tepkileri daha az gösterme eğiliminde olmaları beklenebilir. Birçok çalışma (Güner, 2012; İmamoğlu, 2010; İskenderoğlu, 2010; Knuth ve diğerleri, 2009; Şengül ve Güner, 2013) sınıf düzeyi arttıkça ispat şemasının dışsal düzeyden analitik düzeye değiştiğini ya da gerekçelendirme biçimlerinin dışsal ve deneysel argümanlar yerine analitik argümanlara doğru değiştiğini göstermiştir. Bu çalışmada eğitim basamaklarının en son sıralarında olan öğretmen adaylarının analitik ispat şemaları yerine çoğunlukla dışsal ispat şemaları olarak nitelendirilebilecek tepkileri ortaya koyma sebeplerinin irdelenmesi için ilk olarak hangi dışsal ispat şemayı ortaya koyan tepkiyi daha çok gösterdikleri tespit edilmeye çalışılmıştır.

Araştırmanın verileri, öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde dışsal ispat şemalardan en çok dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarının göstergesi olan tepkiler ortaya koyma eğiliminde olduklarını göstermiştir. Buradan dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının bu çalışmada öğretmen adaylarının ispat çözümlerinde ağırlıklı olarak etkili olduğu sonucuna ulaşılabilir. İlgili alanyazın incelendiğinde öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan göstergelere sahip olduklarına ilişkin sonuçlar ortaya koyan tek çalışmanın Oflaz ve diğerleri'nin (2016) çalışması olduğu görülmektedir. Çalışmada en düşük başarıya sahip öğretmen adayı dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkilerde bulunurken, çalışmaya katılan diğer iki öğretmen adayı deneysel ispat şemasına ilişkin tepkiler ortaya koymuşlardır. Çalışmada öğretmen adaylarının tutumlarının başarılarıyla paralel olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu çalışmadaki ortaokul matematik öğretmeni adayları dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarını ortaya koyan tepkileri yoğun olarak gösterirken, Oflaz ve diğerleri'nin (2016) çalışmalarındaki öğretmen adayları yoğun olarak deneysel ispat şemasına ilişkin tepkiler ortaya koymuşlardır. Oflaz ve diğerleri (2016) çalışmalarını sınıf öğretmeni adaylarıyla gerçekleştirmişlerdir. Anılan çalışmanın bulgularıyla bu çalışmanın bulguları öğretmen adaylarının başarı düzeylerine göre dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin göstergeleri açısından farklılıklara sahiptir. Bunun sebebi örneklem farkı ve öğretmen adaylarına yöneltilen soruların biçimi ve çeşitliliğinin farkı olabilir.

Bu çalışmada düşük, orta ve yüksek başarı düzeylerindeki tüm öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarına ilişkin tepkiler ortaya koyma sebeplerinin daha ayrıntılı incelenmesi için bu şemaya ilişkin göstergeleri incelenmiştir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarının belirleyicisi olan göstergelerle; işlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bıraktıkları, sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri aradıkları, ispatı yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullandıkları, kullandıkları yöntem hakkında yanlış bilgiyle ispatı yapılandırdıkları, ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek yargıladıkları ve

genel ifadelerle yüzeysel deliller sundukları belirlenmiştir. İlgili alanyazındaki çalışmalar her ne kadar öğrencilerin ya da öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyduklarına ilişkin az bulguya sahip olsa da; bazı çalışmaların (Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Harel, 2001; Özer ve Arıkan, 2002; Pekşen Sağır, 2013; Sarı ve diğerleri, 2007; Selden & Selden, 2003; Stylianides ve diğerleri, 2007; Zaimoğlu, 2012) bu çalışmada çalışma verilerinin kodları olarak ortaya çıkan dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin göstergelere dair çıkarımlarda buldukları görülmüştür. Aşağıda, bu göstergelere ilişkin bilgiler bulunmaktadır:

Bu çalışmada öğretmen adayları bazı durumlarda dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin tepkiler verirken *“işlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakma”* göstergesiyle hareket etmişlerdir. Benzer şekilde Sarı ve diğerleri (2007) çalışmalarında bazı matematik öğretmeni adaylarının ispatlama sürecinde öncelikle derslerde ne yapmış olduklarını hatırlamaya çalışmaya odaklandıklarını belirlemişlerdir. Dolayısıyla bu bulgunun bu çalışmadaki öğretmen adaylarının işlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakmaları bulgusuyla tutarlı olduğu söylenebilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının, *“kullandıkları yöntem hakkında önceden öğrenmelerine dayanan yanlış bilgilerle ispatlarını yapılandırma”* göstergesiyle tepkiler verdikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde İŞF’ye verdikleri yanıtlarda özellikle tümevarımsal akıl yürütme kullanarak yapılandırmaya çalıştıkları ispatlarında temel basamak veya çıkarım basamağının anlamından haberdar olmadıkları ve ispatlarını derslerden öğrendiklerine benzer adımlar oluşturarak yapılandırdıkları görülmüştür. Bu bulgu, öğrencilerin veya matematik öğretmeni adaylarının tümevarımsal akıl yürütme ile ispat yapmakta zorluklar yaşadıkları ve bu yöntemin altında yatan mantığı kavrayamadıklarını söyleyen bazı çalışmaların (Güler ve diğerleri, 2012; Harel, 2001; Özer ve Arıkan, 2002; Stylianides ve diğerleri, 2007; Zaimoğlu, 2012) bulgularıyla tutarlık göstermektedir. Bu çalışmalar arasında matematik öğretmen adaylarıyla yürütülen çalışmaların (Güler ve diğerleri, 2012; Harel, 2001; Pekşen Sağır, 2013; Stylianides ve diğerleri, 2007) sonuçları öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım adımları arası ilişkiyi kavrayamadıklarını ve/veya bu yöntemi takip edilmesi gereken işlem basamakları gibi kullandıklarını göstermiştir. Pekşen Sağır (2013) çalışmalarında öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini ezbere kullanmaya çalıştıklarını, kullandıkları yöntemler hakkında eksik ve yanlış bilgilere sahip olduklarını ve belirlemişlerdir. Bu durum bu çalışmanın bulgularıyla tutarlık göstermektedir. Bunun yanında anılan çalışmalardaki (Güler ve diğerleri, 2012; Harel, 2001; Stylianides ve diğerleri, 2007) öğretmen adayları temel basamak ve doğrulama basamaklarını uygulamada ve anlamlandırmada zorluklar yaşamışlardır. Stylianides ve diğerleri (2007) temel ve tümevarımsal adımlar hakkındaki zorlukların ilköğretim matematik öğretmeni adaylarında, lise öğretmen adaylarından daha belirgin olarak ortaya çıktığı belirlemiştir. Dolayısıyla bu çalışmadaki ortaokul matematik öğretmeni adaylarının temel ve tümevarımsal adımlarda yaşadıkları zorlukların ulaşılan alanyazında bahsedilen zorluklarla tutarlı olduğu söylenebilir. Harel (2001) çalışmasında matematik öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım ile uğraşırken iki çeşit düşünme biçimini sergilediklerini belirtmiştir. Harel’a (2001) göre doğruluğu sonuçta sunulsa da kişinin

iknasının süreç içerisindeki doğruluk ve düzene dayalı olduğu düşünme yolu süreç modeli genelleme olup bu genelleme biçimi dönüşümsel ispat şemasının bir göstergesi olmuştur. Öğretmen adaylarının tesadüfi olarak seçilen birkaç sayıyla oluşan bazı durumların, önermenin doğruluğunu göstermek için yeterli olacağına ikna oldukları veya tümevarım ilkelerini anlamayıp dışsal otoriteye dayandırdıkları durumlarda ise sonuç modeli genellemeye sahip olduklarını belirtmiştir. Harel (2001) bu genelleme biçiminin dışsal ve deneysel ispat şemasının bir göstergesi olduğunu belirtmiştir. Buradan hareketle bu çalışmada öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütme kullanırken sonuç modeli genellemeye sahip oldukları söylenebilir. Bu genelleme biçiminin onların dönüşümsel düşüncelerine engel olduğu sonucuna ulaşılabilir.

İlgili alanyazında öğrencilerin tümevarımsal akıl yürütme ile ispat yapmakta zorluklar yaşadıkları belirlenmiştir. Özer ve Arıkan (2002) lise öğrencilerinin ispat yöntem ve tekniklerini yeterince kullanmadıklarını, istenilen düzeyde ya da materyal kullanarak tümevarım yoluyla ispat yapamadıklarını; Zaimoğlu (2012) ilköğretim öğrencilerinin çoğunun tümevarımsal akıl yürütme yapmaya eğilimli olduğunu fakat ispatın altında yatan mantığı kavrayamadıklarını belirtmiştir. Bu bulgu öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütmede yaşadıkları zorluklar ile beraber ele alındığında, matematik öğretmen adaylarının bu konuda zorluklar yaşadıkları düşünüldüğünde, ilköğretim ya da lise çağındaki öğrencilerin kullandıkları yöntemler hakkında yeterli anlayışa sahip olmadıklarının şaşırtıcı olmadığı yorumu yapılabilir.

Bu çalışmadaki öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkilerinde bazı durumlarda “*ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek yargılama*” göstergesiyle hareket etmişlerdir. Selden ve Selden (2003) çalışmalarında üniversitede öğrenim gören matematik bölümü öğrencilerinin argümanların yüzeysel görüşlerine odaklanma eğiliminde olduklarını belirlemişlerdir. Bu durum bu çalışmadaki öğretmen adaylarının ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek yargılamaya çalıştıkları bulgusuyla tutarlıdır.

Yukarıda da ayrıntılı biçimde aktarıldığı üzere, öğrencilerin ya da öğretmen adaylarının bu çalışmada dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarının göstergeleri olarak ortaya çıkan tepkilerinin ilgili alan yazında da bazı çalışmaların bulgularında yer aldığı söylenebilir.

Bu çalışmada öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde en az sıklıkla deneysel ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir. Başka deyişle öğretmen adayları deneysel ya da örnek temelli argümanlarla çoğunlukla ikna olmamışlardır. İlgili alanyazında öğretmen adaylarının ve lisans öğrencilerinin (Gholamazad ve diğerleri, 2004; Grigoriadou, 2012; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010; Liu & Manouchehri, 2013; Oflaz ve diğerleri, 2016; Stylinou ve diğerleri, 2006; Recio & Godino, 2001; Uygan ve diğerleri, 2014), lise öğrencilerinin (Ören, 2007), ve ortaokul öğrencilerinin (Heinze & Reiss, 2003; Şen ve Güler, 2015) çoğunlukla deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri birçok çalışmada bulgusu yer almaktadır. Bunların yanında bulgularında öğretmen adayları ve lisans öğrencilerinin çoğunlukla örnek temelli ve deneysel argümanlar ve gerekçelendirmeler sundukları, örnekle doğrulama eğilimlerinin baskın olduğu (Ceylan, 2002; Demiray, 2013; Gholamazad ve diğerleri, 2004; Martin &

Harel, 1989; Pekşen Sağır, 2013; Stylianides & Stylianides, 2009; Şengül ve Güner, 2013) lise öğrencilerinin (Arslan ve Yıldız, 2010; Chazan, 1993; Coe & Ruthven, 1994; Healy & Hoyles, 2000; Özer ve Arıkan, 2002) ve ortaokul öğrencilerinin çoğunlukla örnek temelli ve deneysel argümanlar ve gerekçelendirmeler sundukları, örnekle doğrulama eğilimlerinin baskın olduğu (Aylar, 2014; Bieda, 2008; Goetting, 1995; Knuth ve diğerleri, 2009; Knuth, Slaughter, Choppin & Sutherland, 2002) ve bu argümanları ispat olarak görme eğiliminde oldukları bulgular yer alan birçok çalışma mevcuttur. Anılan çalışmalardaki öğrencilerin ve öğretmen adaylarının deneysel ispat şemalarının ve bunun bir tanımı olan deneysel argümanları ispat olarak görme eğiliminin tüm sınıf seviyelerindeki öğrencilerde yaygın olarak bulunduğu sonucuna ulaşılabılır. Bu çalışmada sevindirici bir şekilde deneysel ispat şemasına olan eğilimin az olması, anılan çalışmaların sonuçlarının tersinedir. Fakat bu durum bulgularında deneysel ispat şemasına hiç rastlanmayan ya da en az sıklıkla bulunan az sayıdaki çalışmayla (Boyle, 2012; Haverhals, 2011; Norby, 2013; Weber, 2010) tutarlık göstermektedir. Boyle (2012) matematik öğretmen adaylarıyla gerçekleştirdiği çalışmasında öğretmen adaylarının örnek temelli argümanlarla ikna olmadığını belirtmiştir. Haverhals'ın (2011) dokuz lisans öğrencisi ile yürüttüğü çalışmasında iki matematik lisans öğrencisi dışında hiçbir katılımcı deneysel ya da dışsal şemalarını ortaya koyan tepkileri bir görüşmeden fazlasında göstermemiştir. Norby (2013) matematik öğretmen adaylarıyla gerçekleştirdiği çalışmasında tüm öğretmen adaylarının sonsuz bir kümedeki bir matematiksel ifadeyi ispatlarken deneysel kanıtlamanın sınırlı ve sabit bir anlayışa sahip olduğunun farkında olduklarını belirtmiştir. Weber (2010) matematik lisans öğrencileri ile yaptığı çalışmasında öğrencilerin hiçbirinin deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermediği sonucuna ulaşmıştır.

Bu çalışmada; ilgili alanyazında birçok çalışmada görülen deneysel ispat şemalarının göstergeleri olan tepkileri ortaya koyma eğiliminin az olması ve en az sıklıkla görülmesi öğretmen adaylarının deneysel argümanlar ile ikna olmamasının bir göstergesi olabilir. Bunun yanında öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde en çok başvurduğu ispat şemasının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olduğu ve ondan sonra en çok sıklıkla analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemaları dışındaki dışsal şemaları ortaya koyan tepkilerinin daha az olduğu düşünüldüğünde; çalışmadaki öğretmen adaylarının dönüşümsel yargılarının daha çok alışkanlık edinilmiş ispat şemaları tarafından bloke edildiği; çıkarım yapmalarına engel olan alışkanlıkları yani dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına neden olan eğilimleri ortadan kaldırıldığında, analitik ispat şemalarının göstergelerini taşıma ihtimallerinin yüksek olduğu sonucuna ulaşılabılır. Bu çalışmada dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının en önemli belirleyicisi “*sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama*” göstergesi olarak belirlenmiştir. Bunun yanında bu çalışmada “*ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma*”nın analitik dönüşümsel ispat şemasının en belirleyici göstergesi olduğu belirlenmiştir. Buradan, öğretmen adaylarının önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri aramalarına ilişkin eğilimleri azaltıldığında ispatlarını doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandıracakları gibi göstergelere sahip olarak analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyma ihtimallerinin yükseleceği söylenebilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının analitik aksiyomatik ispat şemasını ortaya koyan tepkilerine rastlanmamıştır. Bu durum bazı çalışmalardaki (CadwalladerOlsker, 2007; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010; Koichu, 2009; Plaxco, 2011) lisans öğrencileri ve öğretmen adaylarının analitik aksiyomatik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermeleri durumuyla tutarlık göstermemektedir. Bu çalışmadaki öğretmen adaylarının geleneksel ispat süreçleri kullanmada, teoremlerin sonuçlarının belirli bir aksiyomatik sistem içerisinde nasıl oluştuğunu anlamakta sıkıntı çektikleri, ispatlarını yapılandırırken tanımsız terimlerle işlem yapma becerisine sahip olmadıkları sonucuna ulaşılabılır.

Bu çalışmada daha yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının kendi aralarında ispat şemalarını ortaya koyan tepkilerinin benzer olduğu ve analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterme ihtimallerinin daha düşük başarı düzeyindeki öğretmen adaylarına göre daha yüksek olabileceği belirlenmiştir. Sarı ve diğerleri (2007) yüksek, orta ve düşük düzeyden üç matematik öğretmen adayı ile yürüttükleri çalışmalarında öğretmen adaylarının ispatlama sürecindeki başarılarının analiz dersinde gösterdikleri başarıya paralel olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Çalışmada yüksek başarılı öğretmen adayının analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler verdiği, orta başarı düzeyindeki öğretmen adayının ise yönlendirmeler sonucunda analitik dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler ortaya koymaya başladığı belirtilmiştir. En düşük başarı düzeyindeki öğretmen adayının dışsal ve deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği söylenmiştir. Sarı ve diğerlerinin (2007) çalışma bulgularının bu çalışmadaki “orta ve yüksek düzeydeki öğretmen adaylarının benzer ispat şemaları sergileme” durumuyla ve “orta ve yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının daha düşük başarı düzeyindeki öğretmen adaylarına göre analitik ispat şemasına ilişkin özellikler gösterme ihtimallerinin daha yüksek olabileceği” bulgusuyla tutarlık gösterdiği sonucuna ulaşılabılır.

Görüşmelerin öğretmen adaylarının ispatın doğası hakkındaki görüşlerinin alındığı kısımlarında da dışsal kaynaklı fikirlerinin baskın olduğu ve bu fikirlerinin hepsinin dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması özellikleri gösterdiği görülmüştür. Öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin “*ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenecek göstermeye çalışma*” ve “*ispatı daha önceden edinilmiş ezber ve yüzeysel bilgilerle açıklama*” göstergeleriyle açıklamalar yaptıkları belirlenmiştir.

Bu çalışmada ispatın doğruluğunun ispatın görüntüsünden etkilenecek açıklanmaya çalışıldığı durumlarda başarılı bir ispat için gerekli olan şeylerin tanımlanmasında ispatın sayılardan, harflerden, matematiksel konulardan ve cebirsel ifadelerden oluştuğuna dair açıklamalara rastlanmıştır. Benzer olarak Healy ve Hoyles (2000) çalışmalarında lise öğrencilerinin, ispatın mutlaka cebirsel semboller içermesi gerektiğine inandıklarını ve hikâye anlatı tarzı kullanılan geçerli ispatların öğretmenlerden yüksek not alamayacağını düşündüklerini raporlamışlardır. Buradan, ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenecek açıklama çabalarının bu çalışma ile Healy ve Hoyles’un (2000) çalışmalarında tutarlık gösterdiği söylenebilir. Fakat Healy ve Hoyles (2000) çalışmasını lise öğrencileriyle yürütmüştür. Buradan, ispatı görüntüsüne odaklanarak yargılama tepkisinin

hem lise öğrencilerinde hem de matematik öğretmen adaylarında görülebileceği söylenebilir.

Bu çalışmada ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının en belirleyici göstergesi “*ispadı daha önceden edinilmiş ezber ve yüzeysel bilgilerle açıklama*” olarak belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının bu göstergelere ilişkin açıklamalarında ispatın önceden edinilen bir takım yüzeysel bilgilerle bir problem gibi tanımlanmasına yönelik ifadelerle rastlanmıştır. Uyan ve diğerleri (2014) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispatı bir tür problem çözümü, problem çözümü için kurallar oluşturma olarak gördüklerini belirtmiştir. Benzer olarak Güler (2013) çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının “problemler ispat şeklinde de çözülebilir”, “süreç olarak aynıdır” ve “her ikisinde de problem ortadan kalkar” kategorileri altında açıklamalar yaptıklarını belirlemiştir. Buradan anılan çalışma bulgularının bu çalışmadaki ispatı bir problem gibi göreyek yüzeysel bilgilerle açıklamalar yapma bulgusuyla tutarlı olduğu söylenebilir. Yine aynı göstergelye ilişkili olarak bu çalışmada başarılı ispat için nelerin gerektiği hakkındaki açıklamalarda genelleştirilmiş ifadelerin ve herkesin kabulünce olan şeylerin ispat için gerekli olduğuna yönelik ispatın yüzeysel olarak açıklandığı ifadelerle rastlanmıştır. Uyan ve diğerleri (2014) çalışmalarında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispatın doğruluğunu herkesin kabul etmesine ve genel olarak kabul edilmiş olmasına yönelik olarak açıkladıklarını belirtmiştir. Bu bulgu; bu çalışmada ispatın öğretmen adayları tarafından yüzeysel ve önceden edinilmiş bilgilerle herkesin kabul ettiği biçimde genelleştirildiği bulgusuyla tutarlık göstermektedir. Yine Güler ve Dikici (2012) çalışmalarında öğretmen adaylarının “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” sorusuna verilen yanıtlarında diğer kategorilerin yanında “kalıcılık”, “ezber” kategorilerinin bulunduğu ve bazı öğretmen adaylarının matematiksel ispatın ezberden oluştuğunu düşündüğünü belirtmiştir. Güler (2013) çalışmasının sonuçlarında öğretmen adaylarına “matematiksel ispatın anlamı hakkında sorduğu sorularda diğer kategorilerin yanında “kalıcılık”, “ezber”, kategorilerinin ortaya çıktığını ve bazı öğretmen adaylarının matematiksel ispatın ezberden oluştuğunu düşündüğünü belirtmiştir. Baştürk’ün (2010) matematik öğretmeni adaylarının sınavlara girmeden önce ispatları yazarak ezberlemeye çalıştıklarını belirtmiştir. Bu bulguların bu çalışmada öğretmen adaylarının ispatı daha önceden edinilmiş ezber ve yüzeysel bilgilerle açıklama göstergeleriyle hareket ettikleri bulgusuyla tutarlık gösterdiği söylenebilir. Buradan, ispatı önceden edinilmiş ezber ve yüzeysel bilgilerle açıklama göstergesinin ülkemizde yapılan çalışmalarda matematik öğretmeni adaylarının ifadelerinde ortaya çıktığı söylenebilir.

Öğretmen adayları ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasından sonra en sıklıkla analitik dönüşümsel ispat şemasının göstergelerine ilişkin açıklamalar yapmışlardır. Bu bulgu görev temelli görüşmelerde öğretmen adaylarının en sıklıkla dışsal alışkanlık edinilmiş, daha sonra analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler vermesi durumu ile benzerlik göstermektedir. Öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde en sıklıkla “*sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama*” göstergesiyle tepkiler vermişler, ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde ise *ispadı daha önceden edinilmiş ezber ve yüzeysel bilgilerle açıklama*” göstergesiyle açıklamalar yapmışlardır. Bu iki göstergenin benzerlik

gösterdiği düşünülmüştür. Buradan, bu çalışmadaki öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin ezbere ve yüzeysel bilgilere sahip olma davranışları ile onların ispat yaparken ve ispatları yargılarken daha önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama davranışlarıyla ilişkili olduğu söylenebilir. Başka deyişle, bu çalışmadaki öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin en sıklıkla başvurdukları sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama göstergesi ile onların ispatın doğasına ilişkin önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilere sahip olma göstergeleri ilişkili olabilir. Dolayısıyla çalışmaya katılan öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel fikirlerinin, onların ispatı yapılandırırken dönüşüm yapmaları ile ilişkili olduğu ve ispatın doğasına ilişkin bu tür göstergelere sahip olmalarının ispatlarını önceden edindikleri bilgilere dayanarak yapılandırmaya çalıştıkları durumlarla benzediği çıkarımı yapılabilir.

Öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde ispat yaparken ve ispatları yargılarken analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin olarak en belirleyici gösterge olarak “*ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma*” göstergesiyle tepkiler vermişlerdir. Öğretmen adayları ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tek bir gösterge ile açıklama yapmışlardır: “*Diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek ifadelerde bulunma*”. Bu iki göstergenin benzer olduğu düşünüldüğünde, öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde analitik dönüşümsel ispat şemasının en belirleyici göstergesi olan ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırdıkları durumların, onların ispatın doğasına ilişkin diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek fikirleri ile ilişkili olduğu söylenebilir.

Tüm bu bulgular beraber değerlendirildiğinde öğretmen adaylarının ispatın doğası hakkındaki görüşleri ile ispatı yapılandırmaları ve ispatı değerlendirmelerinin benzerlik gösterdiği düşünülmüştür. Öğretmen adaylarının ispatın doğası hakkındaki ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklamalar yaptıkları durumların, ispatı diğerleriyle mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek açıklamalar yaptıkları durumlarla ilişkili olduğu, bu yüzden bu iki durumun göstergeleri arasındaki değişimlerin birbirini etkileyeceği söylenebilir. Öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin fikirlerinin onların ispatı yapılandırma ve ispatı yargılama tepkileriyle paralellik gösterdiği öngörüldüğünde; onların ispatın doğası hakkındaki alışkanlık edinilmiş fikirlerindeki değişimlerin onların analitik dönüşümsel ispat şemalarına ilişkin göstergelerini etkileyebileceği; ya da ispat yapma göstergelerindeki değişimlerin onların ispatın doğası hakkındaki fikirlerini etkileyebileceği yorumu yapılabilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının tüm görüşmelerde dışsal kaynaklı fikirlerinin yoğun olarak bulunmasının onların ispatın doğası hakkındaki fikirleri ile ilişkili olabileceği tartışılmıştır. Öğretmen adaylarının ispatın ne olduğu, ispatı nelerin oluşturduğu gibi ispatın doğasına ilişkin fikirlerinin tam olarak oturmadığı düşünülmektedir. Bu bulgu, matematik öğretmeni adaylarının ispata ilişkin görüşlerinin tam oturmadığını (Güner, 2012) ve ispat yapmaya ilişkin becerilerine dair kavramsal yeterliliklerinin düşük olduğunu (Moralı ve diğerleri, 2006) söyleyen çalışmalar ile tutarlıdır. Bir çalışma ise (Moore, 1994) matematik lisans öğrencilerinin ispat tanımlarını

bilmeme ve ifade edememe; kavramlar hakkında çok az sezgisel anlayışa sahip olma, ispatın tüm yapısını ortaya koyacak tanımları nasıl kullanacaklarını bilmeme, matematiksel dili ve simgeleri anlayamama ve kullanamama gibi ispatın doğasına ilişkin zorluklar yaşadıklarını belirtmiştir. Bazı çalışmalar ise matematik öğretmenlerinin (Knuth, 2002b, Oehrtman & Lawson, 2008) ispat yapmanın ve reddetmenin (disproof) anlamları ve rolleri hakkında eksik anlayışa sahip olduklarını ve hatta ispatın okul matematiği boyunca merkezi fikir olmaması gerektiğini vurguladıklarını belirtmişlerdir. Lisans öğrencilerinin ve matematik öğretmenlerinin ispatın doğasına ilişkin görüşlerinin eksik olması bu çalışmanın bulgularıyla tutarlık göstermektedir. Dolayısıyla, ispatın doğası hakkındaki gelişmemiş fikirlerin hem öğretmen hem öğrenci hem de öğretmen adayları boyutunda ortaya çıktığı ve geliştirilmesi gerektiği söylenebilir. Bu çalışmada ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispatın doğası hakkındaki fikirlerinin veya görüşlerinin daha doğru biçimde gelişmesinin onların ispat yapılandırılmaları ve ispatı yargılamaları üzerinde veya bunun tersi olarak onların ispat yapılandırılmaları ve ispatı yargılamaların gelişmesinin onların ispatın doğası hakkındaki fikir veya görüşleri üzerinde olumlu etki yaratabileceği düşünülmektedir.

## 5. Öneriler

Bu çalışmada orta ve yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarını ortaya koyan tepkilerinin baskın olduğu görülmüştür. Başka deyişle, öğretmen adaylarının, argümanın doğruluğunu araştırırken argümanın doğruluğu yerine görüntüsünden ve ispatın alışlagelen formatlarından etkilenecek karar verdikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarından sonra en çok analitik dönüşümsel ispat şemalarına ilişkin tepkiler verdiği; bir soruya ilişkin yanıtlarında iki ispat şemasına ait tepkileri aynı anda gösterdiklerinde, ispat şemalarından birinin mutlaka dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarına ilişkin tepkilerinin ortadan kaldırıldığında, analitik ispat şemalarını ortaya koyan tepkilerinin artacağı çıkarımı yapılabilir. Öğretmen adaylarının dışsal ispat şemalarını oluşturan eğilimlerini ortadan kaldırmak ve onların varsayımlarını mantıksal çıkarım ile geçerli kılan analitik ispat şemalarına ilişkin tepkiler ortaya koymalarını sağlamak için öğretim etkinliklerinde öğrencilerin genelleme yapma, işlemsel düşünme ve mantıksal çıkarım yapma becerilerini artıracak ve tahminler kullanarak önceki bilgilerini yeni durumlara uygulamalarını (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016) sağlayacak eğitim ortamlarının oluşturulması ve mümkünse sadece ispat uygulamalarının yer aldığı ispat konulu derslerin yürürlüğe sokulması önerilebilir.

Çalışmada öğretmen adaylarının ispata ve ispatın doğasına yaklaşımlarında dışsal kaynaklı fikirlerinin baskın olduğu ve bu fikirlerinin büyük çoğunluğunun dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan özellikler gösterdiği belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının analitik ispat şemasına geçişlerini sağlayabilmek için onların ispatın doğası hakkındaki fikirlerin gelişmesini sağlayacak öğretim etkinliklerine dâhil olmaları önerilebilir. Bu öğretim etkinlikleri matematik alan derslerinin ispat uygulamalarına geçmeden önce öğrencilere ispatın doğası hakkında düşüncelerini sağlayacak soru ve projelerden oluşabilecek şekilde hazırlanabilir.



Bu çalışmada öğretmen adaylarının sergiledikleri ispat şemaları durum çalışması yoluyla ortaya konmaya çalışılmıştır. Öğretmen adaylarına uygulanacak ispat eğitiminin geliştirilebilmesi için araştırmacılara öğretim deneyimlerinin test edildiği deneysel çalışmaların yapılması önerilebilir. Bu çalışmalar öğrencilerin bu tür öğretim deneyimleriyle ispat şemalarında geliştiklerini gösteren bulgulara yer vermişlerdir. Araştırmacılara, ülkemizde bu tür çalışmaların yaygınlaşması amacıyla buna benzer deneysel araştırmalara yönelmeleri önerilebilir.

Pilot uygulama sonrasında, İSF'nin iki kısım halinde uygulanmasının çalışmanın amacına hizmet etmediği düşünüldüğünden, tüm uygulamanın görev temelli görüşmeler ile yapılandırılmasına karar verilmiştir. Dolayısıyla ispat şemasıyla ilgili çalışma yapmayı düşünen araştırmacılara, uygulamalarını yazılı sınav yerine görev temelli görüşmeler ile gerçekleştirmeleri önerilebilir.

Çalışma, öğretmen adaylarının ispat şemalarının belirlenebilmesi amacıyla öğretmen adaylarına uygulanmıştır. Araştırmacılara, ilkökul, ortaokul ve lise öğrencilerinin ispat şemalarının belirlenebilmesine yönelik çalışmalar yapmaları önerilebilir. Bu çalışmalar, öğrencilerin hangi ispat şemasını nasıl ortaya koyduklarını belirleyebilecek şekilde yürütülebilir. Aynı zamanda araştırmacılara öğretmenlerin ispat şemalarının belirlenmesi amacını ve bu ispat şemalarını nasıl ortaya koyduklarının belirlenebilmesi amacını taşıyan çalışmalar yürütmeleri önerilebilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının sayılar alanındaki bölünebilme, asal sayılar ve karmaşık sayılar gibi konuları kapsayan ispat çözümlerindeki ve ispatın doğası hakkındaki ispat şemaları belirlenmeye ve bu şemaları nasıl ortaya koydukları tespit edilmeye çalışılmıştır. Geometri milattan önceki zamanlardan günümüze kadar devam eden ve ispat ile iç içe olan matematiğin önemli bir alt dalıdır. Dolayısıyla araştırmacılara matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarını geometri alanında ortaya koymalarını hedefleyen çalışmalar yapmaları önerilebilir. İlgili alanyazın incelendiğinde, ispat şemalarını başka değişkenler olmadan geometri alanında inceleyen bir çalışmaya (Heinze & Reiss, 2003) rastlansa da bu çalışmanın çalışma grubunu ortaokul öğrencilerinin oluşturulduğu görülmüştür. Bunun dışında lise öğrencilerinin ispat şemalarının gelişimini geometri alanında inceleyen boylamsal araştırmalara (Martin ve diğerleri, 2005; Soucy McCrone ve diğerleri, 2004) ve ortaokul öğrencilerinin ispat şemalarını farklı değişkenlerle beraber inceleyen bir araştırmaya (Ören, 2007) rastlanmıştır. Matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını başka değişkenler olmadan belirlemeyi hedefleyen sadece bir çalışmaya (Oflaz ve diğerleri, 2016) rastlanmıştır. Bu çalışma da sınıf öğretmeni adaylarıyla gerçekleştirilmiştir. Dolayısıyla araştırmacılara ilgili alanyazındaki boşluğu dolduracak ve alana katkı sağlayacak matematik öğretmen adaylarının geometri alanında ispat şemalarının belirlenmesine yönelik çalışmalar yapmaları önerilebilir. Bu çalışmalarda öğretmen adaylarının geometri alanında bu şemaları nasıl sergilediklerinin de ortaya koyulmasının ilgili alanyazına özgün değer katacağı düşünülmektedir.

Çalışmada ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispatın doğası hakkındaki görüşlerini açıklarken ortaya koydukları ispat şemalarıyla onların ispat yapılandırılmaları ve ispatı yargulamalarında ortaya koydukları ispat şemalarının paralellik gösterdiği belirlenmiştir. Ancak bu konuda nicel ölçümler yapılmadığından buradaki ilişkinin yönü

belirlenememiştir. Bu noktadan hareketle ğretmen adaylarının ispat yaparken ortaya koydukları ispat şemalarının geliştirilmesinin onları ispatın doğasına ilişkin görüşlerinde sergiledikleri ispat şemalarında değişime yol açıp amadığı ya da ğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşlerinde sergiledikleri ispat şemalarının geliştirilmesinin onların ispat yaparken ortaya koydukları ispat şemalarında değişime yol açıp açmadığını inceleyen çalışmalar yapılması buradaki belirsizliği ortadan kaldıracaktır. Araştırmacılara belirli ğretim uygulamalarıyla bu iki değişken arasındaki ilişkinin yönünü ve etkisini belirlemeye yönelik deneysel araştırmalar yapmaları önerilebilir.

---

## **The Proof Schemes of Preservice Middle School Mathematics Teachers and Investigating the Expressions Revealing These Schemes**

### **Extended Abstract**

#### **Introduction**

Harel and Sowder (1998) considered proof from the informal point of view and described it as a process that deal with the cognitive processes of students as well as shaped by social theories. This perspective enabled them to focus on what the students thought, not on what they wrote and to conceptualize the term proof scheme. "*A person's proof scheme consists of what constitutes ascertaining and persuading for that person*" (Harel & Sowder, 1998, p. 241). Harel and Sowder (1998) and Sowder and Harel (1998) have proposed a new theoretical framework by grouping proof schemes. The taxonomy of proof schemes (Sowder & Harel, 1998) consists of three classes: "Externally Based Proof Schemes", "Empirical Proof Schemes", and "Analytical Proof Schemes". In ascertaining and persuading others the students who exhibit externally based proof schemes have tendencies which are originated from external sources The sources of these externally based situations can be a teacher or an authority based on a book (authoritarian proof scheme); format or appearance of an argument (ritual proof scheme) or meaningless manipulation of symbols (symbolic proof scheme). The students who exhibit empirical proof schemes demonstrate the accuracy or inaccuracy of their assumptions based on physical evidence (examples-based proof scheme) or sensory experience (perceptual proof scheme). The students who exhibit analytical proof schemes use logical deduction when demonstrating or verifying the accuracy of mathematical situations. Students' justifications are related to general aspects of situations and reasoning of the students are directed to a general analytical framework to settle the assumptions (transformational proof scheme); they are aware that the starting point of a mathematical justification is undefined terms and axioms and have the ability to work comfortably in such a system (axiomatic proof scheme) (Harel & Sowder, 1998; Sowder & Harel, 1998).

The aim of this study is to investigate preservice middle school teachers' proof schemes and how they presented their proof schemes. For this purpose, the problem of this research is determined as: "What are the proof schemes of preservice middle school mathematics teachers and how do they present these schemes?".

#### **Method**

Case study method was used in this study. The unit of analysis was the proof schemes of preservice teachers and these schemes were evaluated in three basic and seven sub categories according to the theoretical framework developed by Sowder and Harel (1998). The study was defined as embedded multiple case study. Clinical method was used to identify the proof schemes of preservice teachers. For this purpose, clinical interviews about the nature of proof The study was carried out with three female preservice mathematics teachers who were seniors at a public university in Faculty of Education in Department of Mathematics Education. The data were collected by using different instruments in a single

---

session. The data collection instruments comprised of two main parts. The first part consisted of The Task Based Interview Questions Form and the second part consisted of Interview Questions Form about the Nature of Proof. Task based interviews were conducted by using Proof Questions Form, Interview Questions Form about the Proof Processes, and Interview Questions Form about the Observed Proof Scheme. After completing the task based interviews, Interview Questions Form about the Nature of Proof were applied to the participants. To reveal the proof schemes of preservice teachers, the responses of participants to Task Based Interview Questions Form and Interview Questions Form about the Nature of Proof were analyzed by content analysis method. Sowder and Harel's (1998) framework was applied to classify the proof schemes of preservice teachers.

## **Results and Discussion**

Consistent with the literature the results of the study showed that the preservice teachers displayed three basic categories of the proof schemes which are external, empirical and analytic (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Flores, 2006; Güner, 2012; Haverhals, 2011; Harel, 2001; Housman & Porter, 2003; İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu and others, 2010; Ören, 2007; Plaxco, 2011; Sarı and others, 2007; Stylinou and others, 2006; Şen & Güler, 2015; Şengül & Güner, 2013). Besides, it was found that they showed properties about all of the sub-categories of proof schemes except for analytic axiomatic one. The preservice teachers exhibited properties in which they can show more than one proof scheme at the same time (Flores, 2006; Housman & Porter, 2003; Plaxco, 2011; Sarı and others, 2007). During both task based interviews and interviews about the nature of proof, preservice teachers used external proof schemes more frequently than analytic proof schemes (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Liu & Manouchehri, 2013; Ören, 2007; Şen & Güler, 2015), and they used empirical proof schemes less often. In the cases that preservice teachers exhibited two proof schemes properties at the same time, one of the proof schemes was found to be external ritual proof scheme. In other words, if a preservice teacher showed properties of two proof schemes at the same time, the external ritual proof scheme was one of them in every case. When preservice teachers were using analytic proof schemes, they only exhibited the properties of analytic transformational proof scheme.

It was found that the preservice teachers with higher level achievements showed responses reflecting similar proof schemes (Sarı and others, 2007). The results also showed that the possibility of showing responses on analytical proof schemes was higher in those teachers when compared to the ones with lower level achievements. It was found that the opinions of the preservice teachers about the nature of proof was external based and a great majority of these external based opinions were found to include characteristics of external based proof scheme. The source of the failures of the preservice teachers about the correctness of their proof during the task based interviews was interpreted to be the possibility of the preservice teachers' properties about the external ritual proof schemes. It was also noticed that there could be a relationship between existed opinions which were memorized and superficial and the ones which block transforming ideas while making proofs.

It was seen that preservice teachers' lack of knowledge about the methods they had used could result in constructing proof in an inaccurate way. It was concluded that such kind of a

---

situation could be related to the fact that responses revealing preservice teachers' external based proof schemes were more frequent.

## Kaynaklar/References

- Arslan, S., ve Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar, *Eğitim ve Bilim*, 35(156), 17-31.
- Aydoğdu İskenderoğlu, T. (2016). Kanıt ve kanıt şemaları. E. Bingölbalı, S. Arslan, ve İ.Ö. Zembat (Eds.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* içinde (s. 65-83). Pegem Akademi, Ankara.
- Aydoğdu İskenderoğlu, T. (2003). *Farklı sınıf düzeylerindeki öğrencilerin matematik problemlerini kanıtlama süreçleri*. (Yüksek Lisans Tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Sosyal Bilimleri Enstitüsü, Bolu). <http://tez2.yok.gov.tr/> adresinden edinilmiştir.
- Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinde ispat kavramının öğretilebilirliğinin incelenmesi*, (Doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara). <http://tez2.yok.gov.tr/> adresinden edinilmiştir.
- Baştürk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions mathematical proofs and proving. *Educational Studies*, 36(3), 283-298.
- Bieda, K.N. (2008). *The pedagogy of proving in middle school mathematics*. (Doctoral dissertation, University of Wisconsin, Madison, USA).
- Boyle, J.D. (2012). *Study of prospective secondary mathematics teachers' evolving understanding of reasoning-and-proving*. (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh, USA). Retrieved from <https://search.proquest.com/pqdtglobal/docview/1222084018>.
- CadwalladerOlsker, T. (2007). *Proof schemes and proof writing*. (Doctoral dissertation, Claremont Graduate University, California, USA).
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359-387.
- Ceylan, T. (2002). *Geogebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara). <http://tez2.yok.gov.tr/> adresinden edinilmiştir.
- Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In R. Lesh, & A. Kelly (Eds) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 547-589). Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.
- Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students, *British Educational Research Journal*, 20(1), 41-54.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM)*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. <http://www.corestandards.org/Math/> internet adresinden 5.03.2017 tarihinde elde edildi.
- Demiray, E. (2013). *An investigation of pre-service middle school mathematics teachers' achievement levels in mathematical proof and the reasons of their wrong interpretations*. (Doctoral Dissertation, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara). <http://tez2.yok.gov.tr/> adresinden edinilmiştir.
-

- Ellis, A.B. (2007). Connections between generalizing and justifying; Students' reasoning with linear relationships, *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 194-229.
- Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true?, *School Science and Mathematics*, 106(3), 124-132.
- Gholamazad, S., Liljedahl, P., & Zaskis, R. (2004, October). What Counts as Proof? Investigation of Preservice Elementary Teachers' Evaluation of Presented 'Proofs', *Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Toronto, Canada.
- Goetting, M. M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof*. (Unpublished doctoral dissertation). The University of Maryland, USA.
- Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task based interviews in mathematics education research. İçinde A. E. Kelly , & R.A. Lesh (Ed.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (517-545). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Grigoriadou, O. (2012). *Reasoning in geometry. How first learning to appreciate the generality of arguments helps students come to grips with the notion of proof*. (Unpublished master's thesis). University of Amsterdam, Holland.
- Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi*, (Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum). <http://tez2.yok.gov.tr/> adresinden edinilmiştir.
- Güler, G., ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571-590.
- Güler, G., Özdemir, E., ve Dikici, R (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236.
- Güner, P. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde DNR tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yollarının incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, , Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul). <http://tez2.yok.gov.tr/> adresinden edinilmiştir.
- Harel, G. (2014). Deductive reasoning in mathematics education. In S.Lerman (Eds.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 143-147). Springer, London.
- Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. In P. Boero (Eds.), *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 65-78). Sense Publishers, Rotterdam.
- Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell, & R. Zaskis (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 185-212). Ablex Publishing Corporation, New Jersey.
- Harel G., & Rabin, J. M. (2010) Teaching practices that can promote the authoritative proof scheme, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 10(2), 139-159.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students proof schemes: Results from exploratory studies, *CBMS Issues in Mathematics education*, 7, 234-283.

- Haverhals, N.J. (2011). *Student's development in proof: A longitudinal study*. (Doctoral dissertation, The University of Montana, Missoula). <https://scholarworks.umt.edu/etd/923/> adresinden edinilmiştir.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
- Heinze, A., & Reiss, K. (2003, February). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence., *CERME 3 Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italy.
- Housman, D., & Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students, *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 139-158.
- Houssart, J., & Evens, H. (2011). Conducting task-based interviews with pairs of children: consensus, conflict, knowledge construction and turn taking. *International Journal of Research & Method in Education*, 34(1), 63-79.
- İmamoğlu, Y. (2010). *An investigation of freshmen and senior mathematics and teaching mathematics students' conceptions and practices regarding proof*. (Doctoral dissertation, Bogazici University, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul). <http://tez2.yok.gov.tr/> adresinden edinilmiştir.
- İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları* (Doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon). <http://tez2.yok.gov.tr/> adresinden edinilmiştir.
- İskenderoğlu, T., Baki, A., & İskenderoğlu, M. (2010). Proof schemes used by first grade of preservice mathematics teachers about function topic, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 9, 531-536.
- Knuth, E.J. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Knuth, E.J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61-88.
- Knuth, E., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Middle school students' productions of mathematical justification. In M. Blanton, D. Stylianou, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (153–212). Routledge, NY.
- Knuth, E., Slaughter, M., Choppin, J., & Sutherland, J. (2002). Mapping the conceptual terrain of middle school students' competencies in justifying and proving. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant, & K. Noony (Ed.), *Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol 4)*, (1693–1700). OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, Columbus.
- Koichu, B. (2009, May). What can pre-service teachers learn from interviewing high school students on proof and proving?. *ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Volume 2*, Taipei, Taiwan.
- Koichu, B., & Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics* 65(3), 349-365.
- Liu, Y., & Manouchehri, A. (2013). Middle school children's mathematical reasoning and proving schemes, *Investigations in Mathematics Learning*, 6(1), 18-40.
-

- Maher, C.A., & Sigley, R. (2014). Task based interview in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (579-582). London: Springer.
- Martin, T.S., Soucy McCrone, S.M., Wallece Bower M.L., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof, *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 95-124.
- Martin, G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41-51.
- MEB (2017). T.C. Milli Eğitim Bakanlığı Matematik Dersi Öğretim Programı (1,2,3,4,5,6,7 ve 8. Sınıflar). Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.
- Mejia-Ramos, J. P. & Tall, D. (2005), 'Personal and public aspects of formal proof: a theory and a single-case study', In D. Hewitt and A. Noyes (Eds), Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick, (pp. 97-104). Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=8EF1334F83CAA307CC4E0B550BA53E0C?doi=10.1.1.377.5416&rep=rep1&type=pdf>.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics*, 27(3), 249-266.
- Moralı, S. , Uğurel, I., Türnüklü, E., ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston.VA: NCTM.
- Norby, K. (2013). *Investigating viable arguments: pre-service mathematics teachers' construction and evaluation of arguments* (Doctoral Dissertation, Montana State University, Bozeman, Montana) .Retrieved from <https://scholarworks.montana.edu/xmlui/handle/1/2903>.
- Oehrtman, M., & Lawson, A. E. (2008). Connecting science and mathematics: The nature of proof and disproof in science and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6(2), 377-403.
- Oflaz, G., Bulut, N., & Akcakin, V. (2016). Pre-service classroom teachers' proof schemes in geometry: a case study of three pre-service teachers. *Eurasian Journal of Educational Research*, 63, 133-152.
- Opper, S. (1977). Piaget's Clinical Method, *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(1), 90-107.
- Ören, D. (2007). *An investigation of 10th grade students' proof schemes in geometry with respect to their cognitive styles and gender.* (Master's Dissertation, Middle East Technical University, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara). Retrieved from <http://tez2.yok.gov.tr/>
- Özer, Ö., ve Arıkan, A. (2002, Eylül). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. *V.Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, Ankara, Bildiriler Kitabı, II, 1083-1089. [http://old.fedu.metu.edu.tr/ufbmek-5/netscape/b\\_kitabi/PDF/Matematik/Bildiri/t245d.pdf](http://old.fedu.metu.edu.tr/ufbmek-5/netscape/b_kitabi/PDF/Matematik/Bildiri/t245d.pdf) adresinden edinilmiştir.
- Pekşen Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi.* (Yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul). <http://tez2.yok.gov.tr/> adresinden edinilmiştir.



- Plaxco, D.B. (2011). *Relationship between students' proof schemes and justifications*. (Master's Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, USA).
- Recio, A.M., & Godino, J.D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 83-99.
- Riley, K.J. (2003). *An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proof and refutations*. (Doctoral Dissertation) Montana State University, Bozeman, Montana.
- Sarı, M., Altun, A., & Aşkar, P. (2007). Undergraduate students' mathematical proof processes in a calculus course: case study, *Journal of Faculty of Educational Sciences*, 40(2), 295-319.
- Schabel, C.J. (2001). *An instructional model to improve proof writing in college number theory*. (Doctoral dissertation, Portland State University, USA). Retrieved from <https://elibrary.ru/item.asp?id=5231587>
- Schoenfeld, A. (2002). Research methods in (mathematics) education. İçinde L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (435-488). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.
- Soto, O.D. (2010). *Teacher change in the context of a prof-centered professional development*. (Doctoral Dissertation, San Diego State University, San Diego, USA). Retrieved from <http://sdsu-dspace.calstate.edu/handle/10211.10/384>.
- Soucy McCrone, S. M., & Martin, T. S. (2004, October). The impact of teacher actions on student proof schemes in geometry, *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Toronto, Ontario, Canada.
- Sowder, L., & Harel, G. (2003). Case studies of mathematics majors' proof understanding, production, and appreciation, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 3(2), 251-267.
- Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications, *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.
- Stylianides, A., & Stylianides, G. (2009). Proof construction and evaluation. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 237-253.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166.
- Stylinou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006, November). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions, *Proceedings of the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico.
- Şen, C., & Güler, G. (2015). Examination of secondary school seventh graders' proof skills and proof schemes. *Universal Journal of Educational Research*, 3(9), 617-631.
-

- Şengül, S., ve Güner, P. (2013). DNR tabanlı öğretime göre matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarının incelenmesi, *International Journal of Social Science*, 6(2), 869-878.
- Uygan, C., Tanışlı, D., ve Köse, N.Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 5(2), 137-157.
- Varghese, T. (2007). *Student teachers' conceptions of mathematical proof, Faculty of Graduate Studies and Research*. (Master's Thesis, University of Alberta, Admonton).
- Weber, K. (2010). Mathematics majors' perceptions of conviction, validity, and proof, *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 306-336.
- Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Yoo, S. (2008). *Effects of Traditional and Problem-Based Instruction on Conceptions of Proof and Pedagogy in Undergraduates and Prospective Mathematics Teachers* (Doktora Tezi, The University of Texas, Austin, USA).
- Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri*. (Yüksek lisans tezi, Kastamonu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu). <http://tez2.yok.gov.tr/> adresinden edinilmiştir.
-