Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, 2 (2014) 154–168

Düzce Üniversitesi
Bilim ve Teknoloji Dergisi

Derleme Makalesi

Ünivalent Fonksiyonlar Teorisinde Geometrik Fonksiyonların Sağladığı Bazı Özellikler

Semiha ÖZGÜL[a,*], İsmet YILDIZ[a]

[a] *Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Düzce Üniversitesi, Düzce, TÜRKİYE*
** Sorumlu yazarın e-posta adresi: semihaozgul@duzce.edu.tr*

ÖZET

Bu çalışmada görüntü kümesi özel bir geometrik özelliğe sahip olan ünivalent fonksiyonların bazı aileleri incelenmiştir. Bu aileler konveks ve yıldızıl dönüşümler, hemen hemen konveks dönüşümler ve spiral-like dönüşümlerdir. Bu fonksiyonların analitik özellikleri ile görüntü kümesinin geometrisi arasındaki bağlantı ifade edilmiştir. Ayrıca bu fonksiyonların Hadamard Çarpımının geometrik özellikleri ve bu çarpım ile oluşturulan koşullar derlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Hadamard çarpımı, Konveks Fonksiyonlar,Ünivalent Fonksiyonlar,Yıldızıl Fonksiyonlar*

On Some Properties Which are Provided by Geometric Functions in Univalent Functions Theory

ABSTRACT

Some families of univalent functions for which the image domain has a special geometric property were considered in the study. Among the families considered are convex and star-like mappings, close-to-convex mappings, spiral-like mappings. The connection between the geometry of the image domains and analytic properties of the mapping function was described. Also geometric properties of Hadamard Product of geometric functions were collected.

Keywords: *Convex Functions, Hadamard Product, Starlike Functions, Univalent Functions*

Geliş: 05/01/2014, Düzeltme: 15/01/2014, Kabul: 21/01/2014

I. GİRİŞ

ANALİTİK fonksiyonları özellikle de konformal dönüşümleri çalışmış olan Riemann'ın aksine, Weierstrass temel obje olarak kuvvet serisini kullanarak fonksiyonların bir teorisini kurmuştur. Bierberbach varsayımı analitik fonksiyon teorisinin bu iki bakış açısına dayanmaktadır; yani bir fonksiyonu aynı anda hem bir dönüşüm hem de bir seri olarak ele almıştır. Böylece Bierberbach konformal dönüşümleri Riemann tarafından çalışıldığı gibi dikkate almış ve serinin ilk katsayısını sıfır ikinci katsayısını bir kabul ederek katsayıların büyüklüğü üzerinde düşünmüştür. Kompleks düzlemin açık ve bağlantılı bir alt kümesi olan bir D bölgesindeki bir f fonksiyonu, eğer herhangi bir değeri birden fazla almıyorsa; bu fonksiyon D bölgesinde ünivalent fonksiyon olarak adlandırılır. Bir f ünivalent fonksiyonu D bölgesini görüntü kümesi $f(D)$ bölgesine konformal olarak resmeder. Kompleks fonksiyonlar teorisinde konformal dönüşümleri çalışan ilk kişi Riemann'dır. Riemann 1851'deki doktora tezinde, şimdi ünlü Riemann Dönüşüm Teoremi olarak bilinen teoreminde; kompleks düzlemin herhangi bir basit bağlantılı alt bölgesi D' nin $|z| < 1$ birim diskine konformal olarak resmedilebileceğini belirtmiştir. Teoremdeki dönüşüm bire-bir ve analitik olmak zorundadır. 1907'de Koebe Riemann'ın savından hareketle buradaki f dönüşümünün eğer D bölgesindeki belirli bir z_0 noktası için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlıyorsa tek olacağını keşfetmiştir. Bir ünivalent fonksiyonun tersi de ünivalent olduğundan birim diskte ünivalent olan fonksiyonları araştırmak oldukça ilgi uyandırmıştır. Birim diskte $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ ile normalize edilmiş fonksiyonların kümesi S ile gösterilir. Bu durumda f fonksiyonunun Taylor Açılımı

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

formundadır. Bu formdaki fonksiyonların görüntüleri çeşitli geometriler ve klasik karakterizasyonlar tanımlar. Örneğin, eğer f fonksiyonu $|z| < 1$ birim diskinde ünivalent ve normalize edilmiş analitik fonksiyon ise görüntüsü $|w| < \delta$ diskini içerir. Ayrıca bu fonksiyonların bazılarının görüntüsü de yıldız, yıldıza yakın, konveks, konvekse yakın veya lineer olarak erişilebilir, spiral geometriler tanımlar: Bazısı belirli yönlerde, bazısı düzgün olarak, bazısı simetrik noktaların eşleniğine göre vb. görüntüleri belirli geometriler tanımlayan bu fonksiyonlar geometrik fonksiyonlar olarak bilinirler.

Özellikle, eğer kompleks düzlemde bir bölge içindeki sabit bir noktadan diğer tüm noktalara erişilebilir ise bu bölgeye alınan sabit noktasına göre yıldız geometrisine sahiptir denir. Başka bir deyişle içindeki sabit bir nokta ile herhangi bir noktası birleştirildiğinde oluşan doğru parçası bu bölge içinde kalıyordur. Her noktasına göre yıldız geometrisine sahip bölgeye konveks bölge denir.

Görüntüsü yıldız geometrisine sahip olan fonksiyonlara yıldızıl, konveks geometrisine sahip olanlara konveks fonksiyonlar denir.

Konvekse yakın fonksiyon(hemen hemen konveks) ise şu şekilde tanımlanır: Eğer

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0 \qquad , \qquad z \in U$$

olacak şekilde bir g fonksiyonu varsa birim diskte bir f fonksiyonuna hemen hemen konvekstir denir.

Bu çalışmada yukarıda bahsedilen geometrik fonksiyonlar tanıtılmış ve konvolusyon özellikleri derlenmiştir.

II. ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN HADAMARD ÇARPIMI

$|z| < 1$ birim diskinde yakınsak $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ ve $g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k$ kuvvet seri açılımlarının Hadamard Çarpımı

$(f * g)(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k b_k z^k \quad , |z| < 1$

olarak tanımlanır. Bu çarpımın konvolusyon integrali olarak alternatif gösterimi:

$(f * g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} f\left(\frac{z}{\zeta}\right) g(\zeta) d\zeta / \zeta \quad , \ |z| < \rho < 1$

olduğundan $f * g$ ye f ve g fonksiyonlarının konvolusyonu da denir.

Ayrıca konvolusyon adi çarpma işleminin cebirsel özeliklerini sağlar ve

$$l(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$$

geometrik serisi konvolusyon işlemi altında birim eleman olarak etki eder: her f için $f * l = f$ dir.

Hadamard Çarpımı veya konvolusyon geometrik fonksiyonlar teorisinde ilginç bir tarihe sahiptir. İlk olarak 1958 de G. P$\acute{o}$lya ve I.J. Schoenberg [5] aşağıdaki sanılarını ortaya atmışlardır.

Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ konveks ise $(f * g)(z)$ fonksiyonu da konvekstir.

Bu konvolusyonun ünivalent olduğu ilk kez T.J. Suffridge [6] tarafından gösterilmiştir. G. P$\acute{o}$lya ve I.J. Schoenberg bu sanının birkaç özel durumda da doğru olduğunu göstermişler ve sonra T.J. Suffridge diğer özel durumları aşağıdaki önermeyle oluşturmuştur.

Eğer $\varphi(z)$ konveks ve $f(z)$ hemen hemen konveks fonksiyon ise $(\varphi * f)(z)$ hemen hemen konvekstir.

1973'te, Ruscheweyh ve Sheil-Small [7] P$\acute{o}$lya-Schoenberg sanısını başarıyla ispatlamışlardır.

Bu konjektürleri ispatlamak için öncelikle yıldızıl ve konveks fonksiyonların bazı özelliklerinin belirtilmesi gerekmektedir.

A. YILDIZIL VE KONVEKS FONKSİYONLARIN SAĞLADIĞI ÖZELLİKLER

İyi bilinmektedir ki $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ $(a_1 \neq 0)$ fonksiyonu birim diskte yıldızıl ünivalenttir $\Leftrightarrow$

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \quad , \quad |z| < 1 \tag{1}$$

ve $\varphi(z)$ fonksiyonu konvekstir $\Leftrightarrow$

$$Re\left(1 + \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right) > 0 \quad , |z| < 1 \tag{2}$$

ve $\varphi'(0) \neq 0$. Böylece

$\varphi(z)$ fonksiyonu konvekstir $\Leftrightarrow$ $z\varphi'(z)$ fonksiyonu yıldızıldır.

(1) ve (2) koşulları geometrik olarak lokaldir ve bu koşullar; bir f yıldızıl fonksiyonu için z, $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ çemberinde dönerken $w = f(z)$ orijin civarinda monoton olarak döneceği ve bir φ konveks fonksiyonu için tanjant vektörü monoton olarak artacağı gerçeğinden dolayı analitik formulasyonlardır. Bu fonksiyonların görüntü kümelerinin genel geometrik yapısı yukarıdaki (1) ve (2) koşulları ile dolaylı olarak belirlenir. Ancak analitik koşulları daha genel ve daha açık olarak formüle etmek gerekir.

Teorem 1: Eğer $\varphi(z)$ $|z| < 1$ de konveks ise her bir z_0 $(|z_0| < 1)$ için

$$z\left(\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}\right)^2 \tag{3}$$

fonksiyonu yıldızıldır. Suffridge[8], Sheil-Small[9]

Bir $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ $(a_1 \neq 0)$ fonksiyonu eğer

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \frac{1}{2} \qquad , |z| < 1 \tag{4}$$

koşulu sağlanırsa $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır.

Bu koşulun geometrik bir yorumu yoktur; ama analitik olarak elde edilmeye uygundur ve genel yıldızıl fonksiyonların sınıfı ile yakından ilişkilidir. $g(z)$ yıldızıldır $\Leftrightarrow$ $f(z) = z\sqrt{\frac{g(z)}{z}}$

$\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır. Ayrıca

$$h(z) = h_1 z + h_3 z^3 + h_5 z^5 + \cdots$$

fonksiyonu tek yıldızıl fonksiyondur $\Leftrightarrow$

$$f(z) = h_1 z + h_3 z^2 + h_5 z^3 + \cdots$$

fonksiyonu $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır. Eğer $z_0 = 0$ noktası Teorem 1'de yerine yazılırsa her konveks φ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl olacağı görülür ve genel olarak her bir z_0 $(|z_0| < 1)$ için

$$z\left(\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}\right) \quad , \quad |z| < 1 \tag{5}$$

fonksiyonu $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır. (4) koşulundan daha genel bir koşul aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2: $f(z)$ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır $\Leftrightarrow$

$$Re\left(\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} . \frac{z_2}{f(z_2)}\right) > \frac{1}{2} \qquad , |z_1| < 1, |z_2| < 1 \quad . \tag{6}$$

Eğer $\varphi(z)$ konveks ise (5) fonksiyonu $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır ve böylece Teorem 2 uygulanabilir ve konvekslik için bir üç nokta koşulu elde edilir. Eğer $\varphi(z)$ konveks ise tüm $|\sigma_k| \leq 1$ $(k = 1,2,3)$ koşulunu sağlayan $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ kompleks sayıları için

$$Re\left(\frac{\varphi(z) * [z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}(1-\sigma_3 z)^{-1}]}{\varphi(z) * [z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}]}\right) > \frac{1}{2} \qquad (|z| < 1) \qquad (7)$$

elde edilir. (6) koşulu benzer şekilde dönüştürülebilir: Eğer $f(z)$ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl ise $|\sigma_1| \leq 1$, $|\sigma_2| \leq 1$ koşullarını sağlayan herhangi σ_1, σ_2 ikilisi için

$$Re\left(\frac{f(z) * [z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}]}{f(z) * [z(1-\sigma_1 z)^{-1}]}\right) > \frac{1}{2} \qquad (|z| < 1) \qquad (8)$$

elde edilir.

İspat(8): (8) aslında (6)'nın yeniden düzenlenmiş halidir. (8)'in paydası

$$f(z) * \frac{z}{1-\sigma_1 z} = f(z) * \frac{1}{\sigma_1}\frac{\sigma_1 z}{1-\sigma_1 z} = f(z) * \frac{1}{\sigma_1} l(\sigma_1 z) = \frac{1}{\sigma_1} f(\sigma_1 z)$$

ve pay kısmı

$$f(z) * \frac{z}{(1-\sigma_1 z)(1-\sigma_2 z)} = f(z) * \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}\left\{\frac{1}{1-\sigma_1 z} - \frac{1}{(1-\sigma_2 z)}\right\} = \frac{f(\sigma_1 z) - f(\sigma_2 z)}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

olarak yazılabilir. (6)'daki $z_2 = \sigma_1 z$ ve $z_1 = \sigma_2 z$ seçilirse ispat tamamlanış olur.

(7)'nin ispatı için aşağıdaki önerme[7] önemlidir.

Önerme 1: Eğer $f(z)$ konveks ise $|z| < 1$ birim diskindeki tüm z, ζ ve w için

$$Re\left\{\frac{z}{(z-\zeta)}\frac{(\zeta - w)}{(z-w)}\frac{(f(z)-f(w))}{(f(\zeta)-f(w))} - \frac{\zeta}{(z-\zeta)}\right\} > \frac{1}{2} \quad .$$

İspat(7): Yukarıdaki önermede $z = \sigma_3 z, \zeta = \sigma_1 z$ ve $w = \sigma_2 z$ yazılırsa

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1}\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_3 - \sigma_2}\frac{f(\sigma_3 z) - f(\sigma_2 z)}{f(\sigma_1 z) - f(\sigma_2 z)} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_1}$$

$$= \frac{\sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1}\frac{f(\sigma_3 z) - f(\sigma_2 z)}{\sigma_3 - \sigma_2}\frac{1}{\frac{f(\sigma_1 z) - f(\sigma_2 z)}{\sigma_1 - \sigma_2}} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_1}$$

$$= \frac{\sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1} f(z) * \left[\frac{z}{(1-\sigma_3 z)(1-\sigma_2 z)}\right]\frac{1}{f(z) * \left[\frac{z}{(1-\sigma_1 z)(1-\sigma_2 z)}\right]} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_1}$$

$$= \frac{1}{\sigma_3 - \sigma_1}\frac{f(z) * \{\sigma_3 z(1-\sigma_3 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1} - \sigma_1 z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}\}}{f(z) * [z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}]}$$

$$= \frac{f(z) * [z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}(1-\sigma_3 z)^{-1}]}{f(z) * [z(1-\sigma_1 z)^{-1}(1-\sigma_2 z)^{-1}]}$$

elde edilir.

Bir D bölgesinin orijine göre yıldızıllığı, D de herhangi bir z_1 noktası ile orijini birleştiren doğru parçası D bölgesi içinde kalması özelliği ile D bölgesinin her noktasına göre yıldızıllığı da benzer şekilde karekterize edilir. Bu geometrik gözleme dayanarak yıldızıl fonksiyonlar için farklı türde bir bağıntıya ihtiyaç vardır. Bu bağıntıyı analitik terimlerle ifade etmek için yıldızıl fonksiyonların birkaç sınır özellikleri gereklidir.

$f(z)$ yıldızıl ve

$$V(t) = \lim_{r\to 1} \arg(f(re^{it})) \tag{9}$$

olsun. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $V(t)$ limiti vardır ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$V(t)$ t ye göre monoton artandır. (10)

$$V(t+2\pi) = V(t) + 2\pi \quad , \forall t \text{ için} \tag{11}$$

$$V(t) = \frac{1}{2}\big(V(t+0) - V(t-0)\big) \quad , \forall t \text{ için} \tag{12}$$

Bu sonuçlar [10] da oluşturulmuştur.

$$\begin{aligned} h(t) &= inf\{s: V(s) \ge V(t) + \pi\} \\ k(t) &= \sup\{s: V(s) \le V(t) + \pi\} \end{aligned} \tag{13}$$

buradan

$$h(t+2\pi) = h(t) + 2\pi \quad , k(t+2\pi) = k(t) + 2\pi \tag{14}$$

$$t \le h(t) \le k(t) \le t + 2\pi \tag{15}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ için yukarıdaki koşulları sağlayan $h(t)$ ve $k(t)$, t nin azalmayan fonksiyonları olduğu sağlanır.

Teorem 3: $\forall t \in \mathbb{R}$ için t^*, $h(t) \le t^* \le k(t)$ koşulunu sağlayan herhangi bir sayıyı göstersin. Buradan $|z| < 1$ de

$$Im\left\{e^{-iV(t)} e^{\frac{1}{2}i(t+t^*)} \big(1 - ze^{-it}\big)\big(1 - ze^{-it^*}\big)\frac{f(z)}{z}\right\} \ge 0 \tag{16}$$

olur.

B. PÓLYA-SCHOENBERG KONJEKTÜRÜ

Teorem 4: $\varphi(z)$ ve $\psi(z)$ birim diskte konveks ünivalent fonksiyon olsunlar. Bu durumda $(\varphi * \psi)(z)$ fonksiyonu birim diskte konveks ünivalenttir.

Teorem 5: Birim diskte $\varphi(z)$ konveks $f(z)$ hemen hemen konveks fonksiyonlar olsunlar. O halde $(\varphi * f)(z)$ fonksiyonu birim diskte hemen hemen konveks fonksiyondur.

Teorem 4'ün formulasyonuna denk bir formulasyon aşağıdaki gibidir.

Teorem 6: Birim diskte $\varphi(z)$ konveks ve $\psi(z)$ yıldızıl fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda $(\varphi * \psi)(z)$ fonksiyonu birim diskte yıldızıldır.

Hemen hemen konveks fonksiyonların ünivalent olduğu bilinmektedir. Aşağıdaki yardımcı önerme oldukça önemlidir.

Yardımcı Önerme 1: $\varphi(z)$ ve $g(z)$ $|z| < 1$ de analitik ve $\varphi(0) = g(0) = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$, $g'(0) \neq 0$ şartlarını sağlasınlar. Varsayılsın ki her σ $(|\sigma| = 1)$ ve α $(|\alpha| = 1)$ için

$$\varphi(z) * \frac{1 + \alpha\sigma z}{1 - \sigma z} g(z) \neq 0 \qquad (0 < |z| < 1) \tag{17}$$

olsun. Sonra $|z| < 1$ de analitik ve

$$Re\big(F(z)\big) > 0 \qquad (|z| < 1) \tag{18}$$

koşulunu sağlayan her $F(z)$ fonksiyonu için

$$Re\left(\frac{(\varphi * Fg)(z)}{(\varphi * g)(z)}\right) > 0 \qquad (|z| < 1) \tag{19}$$

dir.

Not 1: Yardımcı Önerme 1'deki (17) koşulu: Her analitik F fonksiyonu için $\frac{(\varphi * Fg)}{(\varphi * g)}$ fonksiyonunun sadece F in görüntüsünün konveks zarfındaki değerleri alacağını gerektirir.

Yardımcı Önerme 2: $|z| < 1$ birim diskinde $h(z)$ analitik, $h(0) = 0$ olsun. Kabul edilsin ki $|\alpha| = |\beta| = 1$ ile

$$Re\left\{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)\frac{h(z)}{z}\right\} \qquad (|z| < 1) \tag{20}$$

olacak şekilde α ve β sabitleri var olsun. Buradan her $\varphi(z)$ konveks fonksiyonu için

$$\varphi(z) * h(z) \neq 0 \qquad (0 < |z| < 1) \tag{21}$$

dir.

Yardımcı Önerme 3: $|z| < 1$ birim diskinde $\varphi(z)$ konveks $g(z)$ yıldızıl olsun. Buradan $|z| < 1$ de analitik

$$Re\big(F(z)\big) > 0 \qquad (|z| < 1)$$

koşulunu sağlayan her $F(z)$ fonksiyonu için

$$Re\left(\frac{(\varphi * Fg)(z)}{(\varphi * g)(z)}\right) > 0 \qquad (|z| < 1) \tag{22}$$

dir.

İspat: Yardımcı Önerme 1 ile $|\alpha| = |\sigma| = 1$ koşulunu sağlayan her α , σ için

$$\varphi(z) * \frac{1+\alpha\sigma z}{1-\sigma z} g(z) \neq 0 \qquad (0 < |z| < 1) \tag{23}$$

koşulunu göstermek yeterli olacaktır. Yardımcı Önerme 3'e göre bunun için yeterli koşul her α ve σ için $|z| < 1$ de

$$Re\left\{a(1-bz)(1-cz)\frac{1+\alpha\sigma z}{1-\sigma z}\frac{g(z)}{z}\right\} > 0$$

olacak şekilde $|a| = |b| = |c| = 1$ koşulunu sağlayan a, b, c sabitlerini bulmaktır. Teorem 3' den $b = \sigma$ seçildiğinde, $c = e^{-it^*}$seçilebilir ve burada $-\alpha\sigma = e^{-it}$ yazılmasıyla böyle bir bağıntının sağlanacağı açıktır. Teoremde ortaya çıkan eşitlik olasılığı uygun α seçilerek Maksimum İlkesi ile göz ardı edilebilir.

Şimdi Teorem 4 ve 5'in ispatına geçilebilir. Eğer f hemen hemen konveks ise uygun yıldızıl g fonksiyonu için

$$zf'(z) = g(z)F(z)$$

yazılır ve burada $Re\big(F(z)\big) > 0$ dır. (22)'den

$$Re\left(\frac{z(\varphi * f)'}{\varphi * g}\right) = Re\left(\frac{\varphi * Fg}{\varphi * g}\right) > 0 \tag{24}$$

elde edilir ve böylece eğer $\varphi * g$ nin yıldızıl olduğunu gösterilebilirse, ki bu Teorem 4'e denktir(Teorem 6)Teorem 5 ispatlanır. Bunun yapılabilmesi için

$$Re\left(\frac{z(\varphi * f)'}{\varphi * g}\right) > 0 \qquad (|z| < 1\,) \tag{25}$$

eşitsizliğinin gösterilmesi gerekir. g yıldızıl olduğundan $Re\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > 0$ dır ve böylece (22)'de $F(z) = \frac{zg'(z)}{g(z)}$ yazılarak (25) elde edilir. Böylece iki teoremde ispatlanır.

Not 2: Eğer

$$Re\left(\frac{f'(z)}{\psi(z)}\right) > 0 \qquad (|z| < 1\,)$$

olduğunda "f ψ ye yakındır" deniliyorsa, f ψ ye yakındır koşulu ile her f ve φ konveks fonksiyonları için $\varphi * f$ in $\varphi * \psi$ ye yakın olduğu gösterilir.

C. $\frac{1}{2}$. MERTEBEDEN YILDIZIL FONKSİYONLARIN KONVOLUSYONU

$\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl fonksiyonların yapısı konvolusyon altında korunur.

Teorem 7: Eğer φ ve ψ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl fonksiyonlar ise $\varphi * \psi$ konvolusyonu da $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıldır.

Sonuç 1: İki tek yıldızıl fonksiyonun Hadamard Çarpımı yıldızıl fonksiyondur.

Teorem 8: φ ve ψ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl fonksiyonlar olsunlar ve varsayılsın ki f aşağıdaki koşulu sağlasın

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{\psi(z)}\right) > 0 \qquad (|z| < 1) \tag{26}$$

Sonra

$$Re\left(\frac{z(\varphi * zf)'}{\varphi * \psi}\right) > 0 \qquad (|z| < 1) \tag{27}$$

dır ve özellikle $\varphi * f$ hemen hemen konveks fonksiyondur.

Yardımcı Önerme 4: $|z| < 1$ birim diskinde $h(z)$ analitik, $h(0) = 0$ olsun ve varsayılsın ki

$$Re\left\{(1-\beta z)\frac{h(z)}{z}\right\} > 0 \qquad (|z| < 1) \tag{28}$$

olacak şekilde $|\beta| = 1$ koşulunu sağlayan β vardır. Eğer φ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl fonksiyon ise

$$\varphi(z) * h(z) \neq 0 \qquad (0 < |z| < 1) \tag{29}$$

dır.

Yardımcı Önerme 5: φ ve ψ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl fonksiyonlar olsunlar ve

$$Re\big(F(z)\big) > 0 \qquad (|z| < 1)$$

koşulunu sağlayan her $F(z)$ fonksiyonu için

$$Re\left(\frac{\varphi(z) * F(z)\psi(z)}{\varphi(z) * \psi(z)}\right) > 0 \qquad (|z| < 1)$$

olur.

İspat: Yardımcı Önerme 1’den $|\alpha| = |\sigma| = 1$ koşulunu sağlayan her α, σ için

$$\varphi(z) * \frac{1+\alpha\sigma z}{1-\sigma z}\psi(z) \neq 0 \qquad (0 < |z| < 1)$$

koşulunu göstermek yeterli olacaktır. Eğer her α, σ için

$$Re\left\{\alpha(1-\beta z)\frac{1+\alpha\sigma z}{1-\sigma z}\frac{\psi(z)}{z}\right\} > 0 \qquad (|z| < 1) \tag{30}$$

olacak şekilde β ve α bulunabilirse Yardımcı Önerme 4 ile bu bağıntı ispatlanabilir. $\psi(z)$ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl olduğundan her $\sigma(|\sigma| = 1)$ için

$$\frac{\psi(z)}{1-\sigma z}$$

fonksiyonu yıldızıldır, ve böylece Teorem 3 bu fonksiyona uygulanırsa gerekli (30) bağıntısı elde edilir.

Teorem 7 gerçeklendiğinde Teorem 8 bir önceki yardımcı önermeden ispatlanır. Eğer φ ve ψ $\frac{1}{2}$. mertebeden yıldızıl fonksiyonlar ise

$$Re\left(\frac{\varphi * z\psi'}{\varphi * \psi}\right) > \frac{1}{2}$$

koşulu gösterilmelidir. Yardımcı Önerme 5'te $F(z) = \frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}$ yazılarak ve Not 2 uygulanarak yukarıdaki koşul elde edilir.

III. BULGULAR ve TARTIŞMA

A. KONVOLUSYON ŞARTLARI

Bazı fonksiyon aileleri için konvekslik, yıldızıllık ve spiral-like'lık gibi özellikler konvolusyon ile koşullar oluşturularak ifade edilebilir. α. mertebeden konveks, yıldızıl ve spiral-like fonksiyonlar;

eğer $|z| < R \leq 1$ de analitik ve $f(0) = 0, f'(0) = 1$ ile normalize edilmiş $f(z)$ fonksiyonu

$$Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \qquad (|z| < R)$$

şartını sağlıyorsa $\alpha(0 \leq \alpha < 1)$ mertebeden konveks,

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad (|z| < R)$$

şartını sağlıyorsa α. mertebeden yıldızıl ve bazı λ , $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$, reel sayısı için

$$Re\left(e^{i\lambda}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \qquad (|z| < R)$$

koşulunu sağlıyorsa spiral-like fonksiyon olarak tanımlanır.

Bu sınıfların her biri için konvolusyon şartı şu şekilde oluşturulur: f in bu sınıfların birinde olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{z}(f * g) \neq 0$ şartını sağlayan ve bu sınıflarda olan bir g fonksiyonu bulmaktır.[12]

Teorem 9: $|z| < R \leq 1$ de f fonksiyonu α mertebeden konvekstir $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{z}\left(f * \frac{z + \frac{x+\alpha}{1-\alpha}z^2}{(1-z)^3}\right) \neq 0 \qquad (|z| < R, |x| = 1).$$

İspat: f fonksiyonu $|z| < R$ de α mertebeden konvekstir $\Leftrightarrow$

$$Re\left(\frac{(zf'(z))'}{f'(z)}\right) > \alpha \qquad (|z| < R). \tag{31}$$

$z = 0$ noktasında $\frac{(zf'(z))'}{f'(z)} = 1$ olduğundan (31)

$$\frac{\frac{(zf')'}{f'} - \alpha}{1-\alpha} \neq \frac{x-1}{x+1} \quad (|z| < R, |x| = 1, x \neq -1)$$

eşitsizliğine denktir ve buradan

$$(1+x)(zf')' + (1-2\alpha-x)f' \neq 0 \tag{32}$$

elde edilir. $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ yazılırsa

$$(zf')' = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k^2 a_k z^{k-1} = f' * (\sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}) = f' * \frac{1}{(1-z)^2}$$

böylece (32)’nin sol tarafı

$$f' * (\sum_{k=1}^{\infty} [1-2\alpha-x+(1+x)k] z^{k-1}) = f' * (\frac{1-2\alpha-x}{1-z} + \frac{1+x}{(1-z)^2})$$

$$= f' * \left(\frac{2-2\alpha+(x+2\alpha-1)z}{(1-z)^2}\right)$$

olur. Böylece (32)

$$\frac{1}{z}\left[zf' * \frac{z + \frac{x+2\alpha-1}{2-2\alpha} z^2}{(1-z)^2}\right] \neq 0 \tag{33}$$

eşitsizliğine denktir. $zf' * g = f * zg'$ olduğundan (33)

$$\frac{1}{z}\left(f * \frac{z + \frac{x+\alpha}{1-\alpha} z^2}{(1-z)^3}\right) \neq 0 \quad (|z| < R, |x| = 1)$$

formunda yazılabilir.

Not 3: Teorem 9 için konvolusyon şartındaki $x = -1$ durumunun yanı sıra benzer sonuçlar

Teorem 10, 11 ve 12’de de vardır ve bu ünivalentlik için gerekli olan $|z| < 1$ için $f' \neq 0$ koşuluna denktir.

Teorem 10: $|z| < R \leq 1$ de f fonksiyonu α mertebeden yıldızıldır $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{z}\left[f * \frac{z + \frac{x+2\alpha-1}{2-2\alpha} z^2}{(1-z)^2}\right] \neq 0 \quad (|z| < R, |x| = 1).$$

İspat: f fonksiyonu α. mertebeden yıldızıldır $\Leftrightarrow$ $g(z)=\int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$ fonksiyonu fonksiyonu α. mertebeden konveks olduğundan

$$\frac{1}{z}\left(g*\frac{z+\frac{x+\alpha}{1-\alpha}z^2}{(1-z)^3}\right)=\frac{1}{z}\left[f*\frac{z+\frac{x+2\alpha-1}{2-2\alpha}z^2}{(1-z)^2}\right]$$

elde edilir ve böylece Teorem 9'dan ispat tamamlanmış olur.

Not 4: Teorem 9'daki $\alpha=0$ ve Teorem 10'daki $\alpha=\frac{1}{2}$ durumları [13] de verilmiştir.

Teorem 11: $|z|<R\leq 1$, $|\lambda|<\frac{\pi}{2}$ ile $\lambda\in\mathbb{R}$ ve $|x|=1$ için

$$Re\left(e^{i\lambda}(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})\right)>0$$

elde edilir $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{z}\left[f*\frac{z+\frac{2x+1-e^{-2i\lambda}}{1+e^{-2i\lambda}}z^2}{(1-z)^2}\right]\neq 0\,.$$

İspat: $|z|<R$ de $Re\left(e^{i\lambda}(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})\right)>0$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{e^{i\lambda}\frac{(zf')'}{f'}-isin\lambda}{cos\lambda}\neq\frac{x-1}{x+1}\qquad (|z|<R,|x|=1,x\neq -1)\,.$$

Buradan

$$(1+x)(zf')'+\left(e^{-2i\lambda}-x\right)f'\neq 0\ . \tag{34}$$

(34) denklemi (32)'de $1-2\alpha$ yerine $e^{-2i\lambda}$ yazılarak elde edilebilir. (34)'ten sonraki kısım Teorem 9'daki ile aynıdır sadece $1-2\alpha$ yerine $e^{-2i\lambda}$ yazılması yeterlidir.

Teorem 12: $|z|<R\leq 1$, $|\lambda|<\frac{\pi}{2}$ ile $\lambda\in\mathbb{R}$ ve $|x|=1$ için

$$Re\left(e^{i\lambda}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0$$

elde edilir $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{z}\left[f*\frac{z+\frac{x-e^{-2i\lambda}}{1+e^{-2i\lambda}}z^2}{(1-z)^2}\right]\neq 0\,.$$

İspatı Teorem 11'deki ile benzer şekilde yapılır.

Not 5: Teorem 12'deki koşulu sağlayan bir fonksiyon ünivalent olmak zorunda[14] olmasına rağmen Teorem 11'deki koşulu sağlayan bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez.[5]

B. *KONVOLUSYON YARDIMIYLA TANIMLANAN OPERATÖRLER*

Geometrik fonksiyonlar teorisinde operatörler oldukça önemli bir yere sahiptir. Birçok türev ve integral operatörü belirli analitik fonksiyonların konvolusyonu olarak yazılabilir. Bu birçok araştırmada kolaylık ve operatörlerin geometrik özelliklerinin daha iyi anlaşılmasını sağlamıştır. Ayrıca konvolusyon operatörleri yardımıyla yeni fonksiyon sınıfları tanımlanmış ve bu sınıflarının kapsama, katsayı eşitsizlikleri, örtme, distorsiyon ve büyüme gibi temel özellikleri birçok araştırmacı tarafından araştırılmıştır. Aşağıda bazı lineer operatörler verilmiştir.

$f \in A_1$ ve $\forall i \in \{0,1,2,3,4\}$ için $\Gamma_i : A_1 \to A_1$ lineer operatör olsun. Bu durumda,

$$\Gamma_0 f(z) = z f'(z)$$

$$\Gamma_1 f(z) = \frac{zf(z)}{2} = \frac{f(z) + zf'(z)}{2}$$

$$\Gamma_2 f(z) = \int_0^z \frac{f(\zeta) - f(0)}{\zeta} d\zeta$$

$$\Gamma_3 f(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(\zeta) d\zeta$$

$$\Gamma_4 f(z) = \int_0^z \frac{f(\zeta) - f(x\zeta)}{\zeta - x\zeta} d\zeta \qquad , |x| \leq 1, x \neq 1$$

dır. Γ_4 operatörü Γ_2 nin genelleştirilmiş halidir. Bu operatörlerin her biri $\Gamma_i f = h_i * f$, $0 \leq i < 4$ şeklinde konvolusyon operatörü olarak tanımlanır burada

$$h_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$h_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{k+1}{2}) z^k = \frac{z - \frac{z^2}{2}}{(1-z)^2}$$

$$h_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k = -\log(1-z)$$

$$h_3(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k+1} z^k = \frac{-2[z + \log(1-z)]}{z}$$

$$h_4(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^k}{(1-x)k} z^k = \frac{1}{1-x} \log(\frac{1-xz}{1-z}) \quad , |x| \leq 1, x \neq 1$$

$h_i * f$ konvolusyonu h_i ve f fonksiyonlarının ait olduğu sınıflara göre önceki bölümlerde geçen şartları ve özellikleri sağlar. Ruscheweyh Türev Operatörü yardımıyla S_α^* ve K_α sınıflarının nasıl tanımlandığına bakılabilir.[16]

Öncelikle konveks, yıldızıl ve ünivalent fonksiyonlar arasında $K \subset S^* \subset S$ şeklinde bir kapsama bağıntısı vardır.

Hadamard Çarpımı ile her $f \in A_1$ için

$$D^\alpha f(z) = \frac{z}{(1-z)^\alpha} * f(z) \quad , \alpha \geq -1$$

ile tanımlanan operatör Ruscheweyh Türev Operatörüdür.[15]

Yardımcı Önerme 6([4]): $\alpha > -1$ reel sayısı için

$$z(D^\alpha f(z))' = (\alpha+1)D^{\alpha+1}f(z) - \alpha D^\alpha f(z) .$$

Teorem 13: $f(z) \in S^*$ ve $\alpha \geq -1$ için $f(z)$

$$D^\alpha f(z) \neq 0 \quad (0 < |z| < 1)$$

şartını sağlasın. Buradan $D^\alpha f(z) \in S^*$ dır.

Teorem 14: $f(z) \in K$ ve $\alpha \geq -1$ için $f(z)$

$$D^\alpha\big(zf'(z)\big) \neq 0 \quad (0 < |z| < 1)$$

şartını sağlasın. Buradan $D^\alpha f(z) \in K$ dır.

Buradan S_α^* ve K_α sınıfları

$$S_\alpha^* = \{f(z) \in A_1 : D^\alpha f(z) \in S^* , \alpha \geq -1\}$$

$$K_\alpha = \{f(z) \in A_1 : D^\alpha f(z) \in K , \alpha \geq -1\}$$

olarak tanımlanır ve bu yeni aileler için kapsama bağıntıları şu şekildedir: $S_{\alpha+1}^* \subset S_\alpha^*$ ve $K_{\alpha+1} \subset K_\alpha$ ve bu sınıflar için şartlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 15: $\alpha \geq -1$ için $f(z) \in S_\alpha^*$ olsun. Sonra

$$Re\{(\frac{D^\alpha f(z)}{z})^{\beta-1}\} > \frac{1}{2\beta-1} \qquad , z \in U$$

olur ve burada $1 < \beta \leq 3/2$ dir.

Sonuç 2: $\alpha \geq -1$ için $f(z) \in K_\alpha$ olsun. Sonra

$$Re\{(D^\alpha f(z))')^{\beta-1}\} > \frac{1}{2\beta-1} \qquad , z \in U$$

olur ve burada $1 < \beta \leq 3/2$ dir.

IV. SONUÇ

Ünivalent fonksiyonların farklı alt sınıfları için konvolusyon yardımıyla koşulların oluşturulması ve konvolusyon olarak yazılan operatörler yardımıyla tanımlanan yeni fonksiyon ailelerinin; kapsama, ünivalentlik yarıçapı gibi birçok özelliğinin incelenmesi konuları son yıllarda geometrik fonksiyonlar teorisinde oldukça ilgi gören bir konudur.

V. KAYNAKLAR

[1] S. Ruscheweyh, *Convolution In Geometric Function Theory*, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, (1982)
[2] P.L. Duren, *Univalent Functions*, Springer, New York, (1983)
[3] Z. Nehari, *Conformal mapping*, Mc. Graw-Hill, (1952)
[4] G. Schober, *Univalent Functions-Selected Topics*, Springer, Berlin-Heidelberg, (1975)
[5] G. Pólya, I.J. Schoenberg , Pacific J. Math. **8** (1958) 295-334.
[6] T.J. Suffridge, J. Math. Mech. **15** (1966) 795-804.
[7] S. Ruscheweyh, Sheil-Small T., Comment Math. Helv. **48** (1973) 119-135.
[8] T.J. Suffridge, Duke Math. J. **37** (1970) 775-777.
[9] T. Sheil-Small, J. London Math. Soc. **1** (1969) 483-492.
[10] Ch. Pommerenke, J. London Math. Soc. **37** (1962) 209-224.
[11] J.R. Prather, Complex Variables Vol. **41** (1998) 17-26.
[12] H. Silverman, E.M. Silvia, D. Telage, Mathematische Zeitschrift (1918) 125-130.
[13] S. Ruscheweyh, Comment Math. Helv. **52** (1977) 497-509 .
[14] L. Špaček, Časopis Pěst Mat.-Fys. **62** (1933) 12-19.
[15] S. Ruscheweyh, Proc. Amer. Math. Soc. **49** (1975) 109-115.
[16] S. Owa, S. Fukuı, K. Sakaguchı, S. Ogawa, Internat. J. Math. & Math. Sci., Vol.**9(4)** (1986) 721-730.
[17] R.W. Barnard, C. Kellog, Michigan Math. J. **27** (1978)
[18] Z. Shareef, S. Hussain, M. Darus, Journal of Inequalities and Applications **2012** (2012) 213
[19] J.W. Alexander, Ann. Math. **17** (1915) 12-22.
[20] R. Roy, *Sources in the Development of Mathematics*, Cambridge University Press (2011).