Ege Eğitim Dergisi 2005 (6) 1: 25–37

Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Üzerine Bir İnceleme

Yrd. Doç. Dr. Kemal Altıparmak*
Prof. Dr. Turgut Öziş**

Öz

Bu çalışmada matematiksel ispat ve muhakeme üzerinde durulmuştur. Konuyla ilgili olarak NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) standartları doğrultusunda, okulöncesi, ilköğretim ve lise seviyelerinde matematiksel ispat kavramı ile ilgili bilgiler ve örnekler verilmiştir. Okul öncesi, ilköğretim ve lise yıllarında muhakemenin gelişimi incelenmiştir. Okul öncesi dönemde sınıflama, eşleştirme, karşılaştırma, sıralama kavramları çocuklarda muhakemenin oluşumu için temel kavramlardır. Bu bazda önermeler verilerek, mantıklı düşünmenin oluşması istenmiştir. İlköğretim döneminin birinci kademesinde, birey somut düşünme dönemdedir. Bu doğrultuda parça-bütün ilişkileri ele alınarak, tümevarım ilkeleri için örnekler verilmiştir. İkinci kademede ise muhakeme ve ispat standartlarında öğrencilerden genellemeler hakkında varsayım oluşturmaları ve varsayımları değerlendirmeleri istenmektedir. Lise yılları soyut düşünebilme evresinin geliştiği yıllardır bu yıllarda tümdengelim ve tümevarım oluşmuştur. Bu doğrultuda ispat çeşitleri incelenerek, örnekler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: *Matematik eğitimi, ispat, matematiksel muhakeme*[1]

---

[1] * Ege Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü. kemal.altiparmak@ege.edu.tr
** Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü.

Ege Eğitim Dergisi 2005 (6) 1: 25–37

An Investigation Upon Mathematical Proof and Development of Mathematical Reasoning

Abstract

This study investigated mathematical proof and adjudicating.The information about concept of mathematical proof and related examples are given levels of prekindergarten years, elemantary school and high school in the National Council of Teachers of Mathematics principles and standards. The development of reasoning is investigated during the years of preschool, elementary and high school. Concepts of classification, matching, comparison are basic concepts for children to develop reasoning during preschool years. On this basis, suggestions were put forward, and the formation of resonable thinking were asked for. At the first stage of elementary education, an individual is at the eriod of concrete thinking. In this direction, relationshipsof piece-and-whole are dealt with and thus examples were given for the principles of induction. At the second stage, students are asked to form hypothesis about generalizations and and to evalluate these hypothesis usşng standards of prooving. Years of high school are are the ones during which the process of concrete thingking develops and during these years deduction and induction skills arfe formed. In this direction, kinds of prooving were examined and sşuggestions were put forward.

***Key Words**: Mathematics education, proof, mathematical reasoning*

GİRİŞ

Matematik öğretiminin en önemli hedeflerinden birisi neden, niçin sorularına karşılık olarak mantıklı cevaplar elde etmenin diğer bir deyişle muhakemenin gelişimini sağlamaktır. Muhakemenin anlamını açmak istersek; "sonuçlardan, yargılardan, gerçeklerden ya da önermelerden bir sonuç çıkarma işlemi; önermeleri, yargıları bir kalıba bağlamak ve bunlardan emin olmaktır". Muhakeme sadece matematiksel değil aynı zamanda temel bir yetenektir. Bu yeteneğin gelişimi okullarda izlenen programa oldukça bağlıdır.

İspat matematik öğrenmede bir araçtır (Knuth, 2002). Matematik öğretiminde ispatın bilimsel doğrularından çok eğitimsel değerleri üzerinde durulmalıdır (Ross, 1998). İspatın gelişimi, bireylerin değişik mantıksal düşünme yollarını kazanmasına bağlıdır. Farklı muhakemeler, bilgilerin farklı açılarla inşa edilmesini sağlar. İspat *Oxford Amerikan sözlüğünde* bir şeyin doğruluğunun gösterimi olarak tanımlanır (Oxford American Dictionary, 1980). Bir ispat iki şekilde de yapılabilir. Birincisi bir ifadenin doğruluğunun gösterimidir. İkincisi ise bir ifadenin neden doğru olduğunun açıklanmasıdır. Matematikçiler bir ifadenin doğru olup olmamasından çok niçin doğru olduğuyla ilgilenirler. Diğer bir deyişle matematiksel ispat bir ifadenin niçin doğru olduğunun bir mantıksal bir açıklamasıdır.

İspat kavramının bireyde oluşması okul öncesi dönemde başlar. Sınıflama, eşleştirme, sıralama, karşılaştırma gibi kavramlar ispatın temelini oluşturan kavramlardır. Piaget 4–7 yaş dönemi çocukların sezgisel dönemi olarak sınıflamıştır (Aktaş, 2002). Bu dönem aynı zamanda mantıksal düşünmeye geçiş dönemidir. Mantıksal düşünmeye geçiş yukarıda saydığımız sınıflama, eşleştirme, sıralama, karşılaştırma kavramlarıyla sağlanmaktadır. Diğer bir deyişle bu kavramlar mantıksal düşünmeye geçiş için köprü görevi görmektedir. Bu köprü bu yaş döneminde oluşturulamazsa ileriki dönemde sorunlar ortaya çıkacaktır.

İlköğretim döneminin ilk beş senesinde çocuk somut düşünme daha sonraki üç senesinde soyut düşünme dönemindedir. İlköğretim döneminde çocukta mantıklı düşünme başlamıştır.

25+9 un sonucunun neden 34 olduğunu rahat bir şekilde kavrayacak durumdadır. 6. sınıftan sonra mantıklı düşünme zincirine soyut düşünebilme yeteneğinin eklenmesiyle -3 sayısındaki negatifliği anlayacak duruma gelmiştir.

Ortaöğretim döneminde birey soyut düşünebilme yeteneğinde olmakta olup bu alanda epeyce yol almıştır. Bu dönem sonunda öğrencilerin aşağıdaki becerileri edinmesi konusunda hem fikir olmuşlardır (NCTM,2000).

1. Mantıksal yolla düşünmenin ve matematiğin temel yönleri açısından ispatlamanın farkına varmak.
2. Matematiksel tahminleri yapmak ve araştırmak.
3. Matematiksel nedenleri ve ispatları geliştirmek, değerlendirmek.
4. Değişik mantıksal düşünme yollarını ve ispat çeşitlerini seçmek ve kullanmak.

Bu becerilerde ispat önemli bir yere sahiptir. İspatın bireyde oluşturulması matematiksel kavrama becerisini geliştirecektir.

OKUL ÖNCESİ DÖNEMDE İSPAT

Okul öncesi dönem çocuklarının matematik öğretimi için Milli Eğitim Bakanlığı'nın belirlemiş olduğu hedefler incelendiğinde sınıflama, eşleştirme, sıralama, karşılaştırma kavramları temel oluşturmaktadır. Bunlar mantıklı düşünme için bireylerde eksiksiz olarak bulunması gereken ana kavramlardır. NCTM standartlarında yer alan mantık yürütmenin önemli öğeleri arasında sınıflama "nesneleri genel niteliklerine ve özelliklerine göre bir araya getirerek gruplara ayırma süreci ve çocukların nesneleri, insanları ve olayları düzenlemek için kullandıkları temel bir yöntemdir" (Aktaş, 2002). Sınıflama kavramının matematiksel muhakeme ve ispatla ilişkisi aşağıdaki örnekle açıklanabilir.

İfade:

Kartal havada uçan bir canlıdır.

Önerme:

Havada uçan tüm canlılar kanatlıdır.

Sonuç:

Öyleyse kartal da kanatlıdır.

Yukarıdaki örnek havada uçan ve kanatlıdır gibi özelliklere göre sınıflamanın yapıldığı ve okul öncesi çocuklara formal anlamda geçişme özeliğinden bahsedilmemesine rağmen geçişme özelliğinin de informal olarak kullanıldığı bir etkinliktir. Bu etkinlikte matematiksel muhakeme ve ispatın varlığı açıkça görülmektedir.

Bir kümedeki her nesneyi diğer kümedeki bir nesne ile eşleme işlemine birebir eşleme denir. Birebir eşleme becerisi Piaget'ye göre sayının korunumu kavramının da temelini oluşturur (Miller ve West, 1976). Yapılacak olan birebir eşleme etkinlikleriyle çocukların saymayı anlamlı olarak öğrenmeleri mümkündür. Diğer durumda sayma ezbere olacaktır. Bir anlamda sayı korunumu oluşmayacaktır. Piaget'ye göre sayı kavramı bir mantık sistemidir ve çocuklar sayı kavramını kazanmadan ve diğer mantıklı düşünme becerileri gelişmeden önce, sayı kavramını anlayamazlar ve mantıklı saymayı öğrenemezler (Fisher ve Beckey, 1990). Birebir eşleme ile saymanın öğretilmesi çocuğun mantıklı olarak ve nedenleriyle sayı kavramını anlamlı olarak öğrenmesi sağlanacaktır.

NCTM standartlarına göre okul öncesi çocuklarda mantık yürütmenin diğer bir öğesi de bağıntıyı tanımaktır. Bu dönemde çocukların sınıflama, eşleştirme, karşılaştırma ve sıralama kavramlarını bir arada kullandığı içerisinde bağıntı kavramının bulunduğu örüntüler, çocukların yaratma, tanımlama, sık sık varsayımlarda bulunmaları ve onların geçerliliği için öğrencilere fırsatlar verir. Aşağıda örüntüler için örnekler verilmiştir.

⌟■ • ⌟■…

◜◞▲ •◜◞…

Çocukların sırasıyla yukarıdaki şekillerden sonra yerine hangi şeklin geleceğini bulması istenmektedir. Bu gibi çalışmalar çocukların matematiksel muhakemelerini geliştirmelerine yardımcı olacaktır.

Okul öncesi dönemde yapılacak titiz çalışmalarla çocuklarda matematiksel muhakeme, neden sonuç ilişkisi ve bir anlamda ispat kavramı oluşturulabilir. Bu dönemde formal anlamda ispattan bahsedilmez, informal anlamda ispatları çocuklara çeşitli etkinliklerle kazandırmaktan bahsedilebilir. Bu yeteneği uygulayabilen çocukların neden sonuç ilişkisi zinciri daha mantıklı olarak gelişecektir. Piaget çok küçük yaştaki çocukların muhakemeyi değişik seviyelerde nasıl kullandıklarını göstermiştir. 5-6 yaş çocukları 5 sayısının 2 ve diğer 3 parçadan oluştuğunu yine 5 sayısının 3 ve 2 parçadan oluştuğunu görebildiklerinden $2+3=3+2$ sonucunun doğruluğundan emin olabilirler. Görüldüğü gibi $a+b=b+a$ kavramı bu yaşlarda oluşmaya başlamıştır. Fakat hipotezsel tümdengelimdeki muhakeme 8. sınıf sonunda başlar (Fitzgerald, 1996).

İLKÖĞRETİM DÖNEMİNDE İSPAT

İlköğretim çağındaki çocuklar Piaget'nin tanımladığı somut işlem dönemindedirler. Bu yaşlarda öğrenme çok hızlıdır. Bu dönemin önemli konularından birisi sayılardır. 2. sınıf öğrencileri için muhakeme ve ispat standartlarında öğrencilerden muhakemenin iki önemli elemanı olan şekilleri tanımaları ve sınıflandırmaları beklenir. 2. sınıfın sonunda öğrenciler sayıları kullanarak muhakeme edebilmeyi öğrenmelidirler. Bu seviyedeki sınıflarda fiziksel materyaller kullanılmalıdır. Böylece öğrencilerin nesneleri karşılaştırma, benzer ya da farklı olduklarını belirleme ve bunlar hakkında genelleme yapmaları sağlanır.

3–5. sınıflar için muhakeme ve ispat standartlarında öğrencilerden varsayımları formüle etmeleri istenir. Bu seviyedeki öğrenciler varsayımların doğruluğunu göstermek için, bir kaç örneğin yeterli olmadığını, karşıt örnekleri varsayımları çürütebilmek için kullanabilmeyi öğrenmelidirler. Matematiksel iddia kavramı bu yaşlarda oluşmaktadır. Bu yapı öğrencilerde kurulmalıdır. Öğrencilerden matematiksel iddialardaki özellikleri ve kavramları sentez yapmaları istenir.

6–8. sınıflar için muhakeme ve ispat standartlarında öğrencilerden genellemeler hakkında varsayım oluşturmaları ve varsayımları değerlendirmeleri istenir. Bu sınıflardaki öğrenciler varsayımları ve iddiaları değerlendirebilmeli, matematiksel iddiaları formüle ederek tümdengelimli ve tümevarımsal muhakemeyi kullanabilmeli, muhakeme becerilerini geliştirmeli ve sürdürmelidir.

25+9=34 sonucunun doğruluğu şu şekilde ispatlanabilir. Bu durumun ispatını ilköğretim seviyesindeki bir öğrenciye yapabilmek için adım adım nesneler kullanılabilir.

25+9= (2 tane onluk+5 tane birlik)+9 tane birlik (çözümleme)

=2 tane 10+(5tane 1+9 tane 1) (birleşme özelliği)

=2 tane 10+(5+9) (tanım)

=2 tane 10+14 (toplama işlemi)

=2 tane 10+(1 tane 10+4 tane 1) (çözümleme)

=(2 tane 10+1tane 10) + 4 tane 1 (birleşme özelliği)

=(2+1) tane 10+ 4 tane 1 (dağılma özelliği)

=3 tane 10+4 tane 1 (toplama işlemi)

=34 (değerleri yerleştirme)

Buna benzer bir örnek olarak doğal sayılarda çarpma işlemi verilebilir.

4x32=128 sonucunun doğruluğu şu şekilde ispatlanabilir.

4x32=4 tane 1x(3 tane 10+2 tane 1) (çözümleme)

=(4 tane 1x3 tane 10)+(4 tane 1x2 tane 1) (dağılma özelliği)

=(4 kere 3 tane 10)+(4 kere 2 tane 1) (tanım)

=3 tane 10+3 tane 10+3 tane 10+3 tane 10+2 tane 1+2 tane 1+2 tane 1+2 tane 1+2 tane 1

(değerleri yerleştirme)

=12 tane 10+8 tane 1 (toplama)

=128 (değerleri yerleştirme)

Aşağıdaki örnek toplamanın nasıl yapıldığını materyal kullanarak daha anlamlı hale getirmektedir.

Öğretmen 'sayıların toplamını inceleyelim' der.

2+3+4 toplamının analizini gerçek nesneler yoluyla inceler.

2 + 3 + 4

OO + OOO + OOOO en sondaki 4 bilyeden bir tanesini en başta iki bilyenin bulunduğu gruba verilirse her grupta üç bilye olur. OOO + OOO + OOO bu ifade 2+3+4=3x3 ifadesine denk olmuş olur. Sonucun 9 olduğu doğrudan söylenebilir. Diğer taraftan öğretmen yukarıda yapmış olduğu etkinliğin aşağıdaki şekildeki gibi bir formda olduğunu belirtmelidir.

Kabul edelim ki n-1, n ve n+1 üç ardışık sayı olsun, (n-1)+n+(n+1)' in değeri

= n+n+n-1+1 [Birleşme özelliği]

= 3xn [Dağılma özelliği]

Bu türde ispatlar öğrencinin toplama ve çarpma işlemlerinin nasıl yapıldığına dair bilgilerini anlamlı ve kalıcı hale getirecektir. İlköğretim seviyesinde tümdengelim mantığının öğrencilere verilmesi gerekmektedir. Bir olaya ait zincirlerin ortaya çıkarılması tümdengelim mantığını kuvvetlendirecektir. Örneğin aşağıdaki tabloyu olayları daha açık anlatmak için verebiliriz.

Ana önerme: "Spor insanlara hastalıklara karşı direnç verir."

Yan önerme: "Aylin sporcudur."

Sonuç: "Aylin hastalıklara karsı dirençlidir."

Bu etkinlikte matematiksel muhakeme ve ispatın varlığı açıkça görülmektedir. Yukarıdaki örnek ve benzerleri öğrencileri soyut düşünme dönemine hazırlamaktadır. Aslında bu örnek gerçel sayılarda geçişme özelliğinin somut bir uygulamasıdır.

Bu dönemde öğrenciler niceleyicilerle de tanışmaktadır. Bu kavramlar öğrencileri daha seviyeli ispatlara hazırlamaktadırlar. Aşağıdaki tabloyu inceleyelim.

İfade	**Olumsuzu**
Bütün balıklar yüzer.	Bazı balıklar yüzmez.
42+12=54	$42+12 \neq 54$
Bazı insanlar konuşamaz.	Bütün insanlar konuşur.

Teorem1: A ifadesi doğruysa, B ifadesi de doğrudur.
Bu teoremin dengi olan dolaylı (değili yada contrapositive) teoremi aşağıdaki teorem2 dir.

Teorem2: B ifadesi yanlışsa, A ifadesi de yanlıştır.

Örneğin "hava yağmurluysa gökyüzünde bulutlar vardır." Bu teoremin değili "gökyüzünde bulutlar yoksa yağmur yağmıyor." dur (Heil, 2005). Bu ifadeler mantıksal olarak aynıdır. Birinci teoremin ispatının nasıl yapılacağını bilmiyorsak, bunun yerine ikinci teoremin ispatı yapılabilir. Çünkü iki teorem birbirlerinin denkleridir.

Somut işlem döneminde yeterince bu konularda hazırlanan öğrenciler soyut işlem dönemlerinde daha ileri seviyedeki ispatlarda sorun yaşamayacakları gibi bu konularda kendilerine ait bilgiler üretebileceklerdir. Bu yıllara da gerçek dünya problemlerinin kullanılması ispatın geliştirilmesine yardımcı olmaktadır. Gerçek dünya problemleri öğrencilerde matematiksel kavram ve ilişkilerin öğretilmesine yardımcı olur (Hodgson, Riley 2001).

LİSE DÖNEMİNDE İSPAT

9–12. sınıflarda muhakeme ve ispat standartlarında öğrencilerden matematiği mantıklı ve makul bir şekilde görebilmeleri istenir. Şekilleri gözlemlemeleri, bu şekiller için örnekler bulmaları, yöntemleri kullanmaları ve araştırma yapmaları istenir.

Bu seviyedeki öğrencilerin bir kaç örnek ile varsayımın doğrulanmadığını fakat karşıt bir örneğin varsayımın yanlışlığını gösterdiğini öğrenmeleri beklenir. Öğrenciler tümdengelimli ispatları kullanmalı ve biçimsel ispatları sunmalıdırlar.

9. sınıf ve sonraki üç yılı kapsayan lise döneminde birey soyut düşünme dönemindedir. Bu yıllar önceden kullanılan ispat tekniklerinin geliştirilmesi için uygundur. Bu yıllarda dolaylı ve iteratif ispat yöntemleri ağırlıklı olarak kullanılmaktadır. Bunun dışında geometrik ispatların kullanımı da oldukça geniş bir yer tutmaktadır. Bu yıllarda kullanılan ispat türleri şu şekildedir.

Doğrudan ispatlar

Teorem1 de A ifadesi geçerli olduğu durumlarda B ifadesi de geçerli olmalıdır. A ifadesinin doğru olduğu her durumda B ifadesinin niçin doğru olması gerekliliğinin açıklaması teoremin ispatıdır.

Teorem 1 de A ifadesinin doğruluğunun kabul edilmesiyle ilk adım başlamış olur. Bu ifade üzerinde bilgiler mantıklı bir şekilde ve belli bir sırada oluşturularak sonuçta B ifadesinin doğruluğuna varılacaktır. Aşağıdaki teorem bu yolla ispatlanır.

Teorem: Bir asal sayı ikiden büyükse tektir.

İspat: Kabul edelim ki $p>2$ bir asal sayı olsun. p nin tek olduğunu göstermek için p nin 2 ile bölünemeyeceğini göstermemiz gerekir. p bir asal sayıdır sadece 1 ve kendisi ile bölünebilir. $2 \neq 1$ ve $2 \neq p$ olduğundan dolayı 2 sayısı p'yi bölen bir sayı değildir. Böylece p 2 ile bölünemez. Bundan dolayı p tek bir sayıdır.

Dolaylı (Contrapozitif) ispatlar

Teorem1'in kendisine denk olan dolaylı teoremi teorem2'dir. Teorem2 nin doğruluğunun gösterilmesiyle teorem1'in de doğruluğu gösterilmiş olur. Böyle bir ispat aşağıdaki teorem üzerinde incelenebilir.

Teorem: n bir pozitif tamsayı olsun. n^2 çift ise n de çifttir.

İspat: Bu teoremin ispati için teoremin dolaylı teoremi kullanılacaktır. Teoremin dolaylı teoremi; n çift değilse (tek) n^2de çift değildir. (tek) Eğer bu teorem ispatlanırsa başlangıçtaki teorem ispatlanmış olur. Çünkü iki teoremde matematiksel olarak aynıdır.

$n=2k+1$, (k bir doğal sayıdır.) $n^2=4k^2+4k+1$ Buradan $4k^2+4k$ ifadesi 2 ile bölünebilir. Fakat $4k^2+4k+1$ ifadesi 2 ile bölünemez.

Böylece $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ ifadesi tektir. Görüldüğü gibi dolaylı teoremin ispatı yapılarak esas teoreminde ispatı yapılmış olur.

Çelişki ile ispatlar

A ifadesi doğru kabul edilir. Daha sonra B ifadesi yanlış kabul edilerek, çelişki elde edinceye kadar bilgiler oluşturulur. Böylece B ifadesinin doğru olması gerektiği sonucuna varılır.

Teorem: Pozitif bir m tamsayısı n>1 tamsayısı ile tam olarak bölünüyorsa, n sayısı m+1 sayısını tam olarak bölmez.

İspat: n'nin tam olarak m'yi böldüğünü kabul edelim. (A ifadesi doğru kabul edildi.) Bunun anlamı m=kn (k tamsayıdır.) şimdi farz edelim ki n m+1'i tam olarak bölsün. (B ifadesi yanlış olarak kabul edildi.) m+1=jn (j bir tamsayıdır) Böylece jn=m+1=kn+1 buradan (j-k)n=1 bulunur. Fakat n bir tamsayı ve 1 den büyüktür ve j-k da aynı zamanda bir tamsayıdır. Öyleyse bu çarpımın 1 olması mümkün değildir. (Bu bir çelişkidir.) Böylece n tamsayısı m+1 sayısını tam olarak bölmez sonucu elde edilir. İspat tamamlanmıştır.

Tümevarım (Induction)

Çok sayıda A_n, n=1,2,3,…, $(n \in Z) \in$ ifadelerine sahip olduğunda, bunların her n tamsayısı için doğruluğunu göstermek için bu metot kullanılır. Aşağıda verilen teorem ele alınarak bu yöntemin genel ispat yapısı oluşturulabilir.
Teorem: Her n tamsayıları için A_n ifadesi doğrudur.

Bu yöntemin ispatı bilgisayar bilimlerindeki rekürsiflik ile benzerdir. Aşağıda yazılan sırada teoremin ispatı yapılmaktadır.

Adım 1. A_1 ifadesinin doğruluğunu göster.

Adım 2. A_n ifadesi doğruysa A_{n+1} ifadesi de doğrudur.

Adım 2'nin gösterilmesiyle bu tipteki teoremlerin ispatları tamamlanır. Yukarıda yazılanlarla A_{13} un doğru olduğunu neden kabul ederiz? Sorumuzun cevabını rekürsiflik olarak verebiliriz. Fakat direkt A_{13} doğrudur diyemeyiz. A_{12} doğru olduğundan dolayı A_{13} doğrudur. A_{12} nin doğru olup olmadığını bilmiyoruz. A_{12}' nin doğru olduğunu da A_{11} in doğru olduğu yardımıyla söyleyebiliriz. Bu şekilde adımlarla A1in doğruluğuna kadar gelebiliriz. Böylece A_1 doğru olduğundan A_{13} de doğrudur denebilir. Metodun daha iyi anlaşılması için aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem:

$\forall\, n \geq 1$ için,

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ dir.}$$

İspat:

Adım1: n=1 için, $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$ dir.

Adım2: $1+2+3+....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ifadesi n için doğru olduğunu kabul edilerek n+1 için teoremdeki ifadenin doğru olduğu gösterilir. $1+2+3+....+n+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

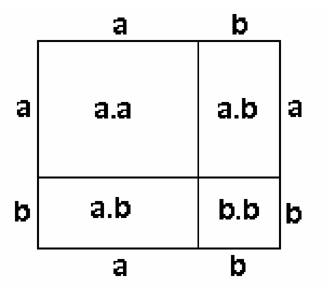
$=\dfrac{n^2+n+2n+2}{2}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Teoremdeki A_n ifadesini n için doğru kabul edilerek ve n+1 içinde doğru olduğu gösterilerek, $1+2+3+....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ formülüzasyonunun $\forall\, n\geq 1$ için doğru olduğu sonucuna varılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Geometrik şekiller yardımıyla yapılan ispatlar:

Bu şekilde yapılan ispatları aşağıda verilen örnek problem üzerinde uygulayalım.

Örnek: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ olduğu aşağıdaki şekilde dörtgenler yardımıyla kolayca görülmektedir.



SONUÇ

Keşfetme, araştırma duygusu, neden, niçin gibi sorulara aranan cevaplar bireyin doğmasıyla başlar. Bebekler sürekli etrafına bakar, bulunduğu ortamı inceler merak ederler. Okul öncesi çocukları büyüklerine sürekli sorular sorarak yaşadığı dünyayı öğrenmeye, ilişkileri anlamaya çalışırlar. Görülüyor ki insanoğlu doğumdan itibaren olayları anlamaya çalışan, aralarındaki ilişkileri bulmaya çabalayan yani bir anlamda düşünen bir varlıktır. Düşünebilme yapısı çevrenin etkisiyle daha etkili olarak gelişebilir. Olaylar arasındaki ilişkileri anlayabilme, muhakeme etme sonuç çıkarma okul öncesi yıllarda oluşması beklenmektedir. Eğitim ve öğretimin doğasında olan insanlara olayları nedenleriyle açıklayabilme muhakeme yapısının gelişimini sağlama her alanda ortaktır.

Matematiksel ispat ve muhakeme bu alanları içerisine alan bir kavramdır. İspat ve muhakeme insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu bir yetenektir. Fakat bu yeteneğin gelişimi belirlenecek uygun stratejilere bağlıdır. Öyle ki bu stratejileri istenilen yapıda belirleyemezseniz insanda doğuştan var olan ispat ve muhakeme yeteneklerini zamanla yok edip, ezberleme yolunu seçen, neden-sonuç zincirini takip edemeyen bireyler yetiştirmiş olursunuz. Eğer bu stratejinizi uygun belirlerseniz var olan ispat ve muhakeme yapısını daha da ileriye taşırsınız. Burada bahsettiğimiz strateji kavramı okullarımızda ispat ve muhakeme yapısının gelişimiyle ilgili programlardır. Bu programa, okul öncesi, ilköğretim ve lise aşamalarında bakıldı. Her aşamada ispat ve muhakemenin seviyesiyle ilgilenilerek konuyla ilgili temel örnekler verildi. Fakat bu kavramların öğretimi burada belirttiğimiz gibi kolay bir yapıda değildir. Bu nedenlerden birisi, bu aşamaların uygulanmasını sağlayan öğretmendir. Öğrenciye ispat ve muhakeme becerisinin öğretimi ve gelişimi öğretmene bağlıdır. Eğer öğretmenler öğrencileri için geniş öğrenme yelpazesi sunarlar ve değişik ispat yöntemlerini verirlerse, öğrencilere matematiği ve mantıksal düşünceyi daha iyi anlayıp yaratıcılıklarını artıracaklardır. Öğretmenler öğrencilerine konular üzerindeki fikirlerini açıklama ve tartışma fırsatı vermeli ve onları cesaretlendirmelidirler. Öğrenciler bir önermenin doğruluğunu nedenleriyle öğrenmek isterler. Eğer açıklayıcı ispatlarla matematik öğrenimini sağlarsak onların daha iyi anlamalarını ve zevk almalarını sağlamış oluruz. Konunun öğretimiyle ilgili süreçler doğru olarak uygulandığında ezberlemeyen, kavramları nedenleriyle öğrenen, yaratıcı düşünen ve problemlere farklı acılardan çözüm üretebilen bireyler yetiştirmiş oluruz.

Kaynakça

Aktaş, Y. (2002). *Okul öncesi dönemde matematik eğitimi. Adana:* Nobel Tip kitap evi.

Fisher, F.E. ve Beckey, R.D. (1990). Begining kindergarteners' perception Number. *Perceptual and Motor Skills*. 70: 419-425.

Fitzgerald, J.F. (1996). Prof in Mathematics education., *Journal of Education,* Vol. 178, 1.

Heil, C. (2005). Writing Proofs. Georgia Institute of Technology. Lecture Notes.

Hodgson, T, and Riley, K.J. (2001). Real-World Problems as Contexts for Prof., *Mathematics Teacher*, Vol. 94. No. 9.

Knuth, E. (2002). Prof as a tool for learning Mathematics. *Mathematics Teacher*, Vol. 95, No. 7.

Miller, P.H. ve West, F.R. (1976). Perceptual Spports for One-to-one Correspondence in the Conservation of Number. *J. Of Experimental Child Psychology*. 21: 417-424.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM.). (2000). Principles and standarts for school mathematics. Reston, Va..

Oxford American Dictionary (1980). New York: Avon Boks.

Roos, K. (1998). Doing and Proving: The place of Algorithms and prof in school Mathematics *American Mathematical Monthly*, 3, 252–55.