ОЦЕНКА СТОИМОСТИ АКЦИЙ С АРИФМЕТИЧЕСКИМ РОСТОМ ДИВИДЕНДОВ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

С.К. Кыдыралиев, канд. физ.-матем. наук, проф. АУЦА,
А.Б. Урдалетова, канд. физ.-матем. наук, проф. КТУ «Манас»

Одной из наиболее распространенных задач на рынке ценных бумаг является определение оценочной стоимости акций. Обычно рассматриваются ситуации, в которых предполагается, что дивиденды постоянны или являются членами геометрической прогрессии.

В данной статье мы предлагаем вниманию читателя формулу, позволяющую оценить акцию, величины дивидендов по которой есть члены арифметической прогрессии.

1. При оценке акций используется метод оценки актива по потоку будущих доходов, то есть предполагается, что оценочная стоимость актива равна текущей стоимости будущих доходов, получение которых обеспечивает владение данным активом.

Для грубых оценок достаточно предположить, что величина дивидендов по акции и ставка интереса неизменны. В этой ситуации оценочная стоимость акции (P_f), величина дивидендов (D), которые выплачиваются в конце каждого периода длиной (t), и ставка интереса (r) будут связаны соотношением:

$$P_f=\frac{D}{1+k}+\frac{D}{(1+k)^2}+\frac{D}{(1+k)^3}+\ldots+\frac{D}{(1+k)^n}+\ldots,\quad k=rt.$$

Так как ставка интереса положительна, то мы имеем убывающую геометрическую прогрессию.

Тогда, из формулы

$$S=b\frac{1}{1-q},\tag{1}$$

где S есть сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, b - начальный член прогрессии, q - знаменатель прогрессии, получаем

$$P_f=\frac{D}{1+k}\cdot\frac{1}{1-1/(1+k)}.$$

Следовательно, оценочная стоимость акции с постоянными дивидендами определяется формулой:

$$P_f=\frac{D}{1+k}\cdot\frac{1}{1-1/(1+k)}=\frac{D}{k},\qquad k=rt.\tag{2}$$

К формуле (2) мы можем прийти и другим путем. Покажем этот путь.

Так как ожидаемая доходность равна r, то число P_f к концу периода длиной (t) должно превратиться в $P_f(1+k)$.

С другой стороны, через период владелец акции получит дивиденды в размере D, и будет продолжать владеть акцией, которая обеспечивает дивиденды в размере D в конце каждого периода, то есть стоит P_f. В результате, имеет место равенство $P_f(1+k)=P_f+D$, которое эквивалентно формуле (2).

Задача 1

Оценить акцию, дивиденды по которой выплачиваются в конце каждого полугодия, зная, что дивиденды в размере 57 сом. выплачены накануне, а ставка интереса 38%.

Решение

Напоминаем, что, говоря о ставке интереса, мы имеем в виду ставку дохода, который мы ожидаем получать ежегодно на средства, вложенные в акцию:

$P_f = 57/(0{,}38\cdot 0{,}5) = 300$ сом.

2. Предположение о том, что величина дивидендов по акции остается неизменной, является малореалистичным. В связи с этим вначале рассмотрим модель оценки акций, по которым дивиденды возрастают на один и тот же процент за период.

В этой ситуации оценочная стоимость акции (P_g), величина дивидендов (D_0), которые были выплачены накануне оценки акции, процент роста дивидендов (g) и ставка интереса (r) будут связаны соотношением:

$$P_g = \frac{D_1}{1+k} + \frac{D_2}{(1+k)^2} + \frac{D_3}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{D_n}{(1+k)^n} + \ldots =$$

$$= \frac{D_0(1+g)}{1+k} + \frac{D_0(1+g)^2}{(1+k)^2} + \frac{D_0(1+g)^3}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{D_0(1+g)^n}{(1+k)^n} + \ldots, \qquad (k = rt).$$

Поэтому из формулы (1) следует, что оценочная стоимость акции (P_g) определяется формулой:

$$P_g = \frac{D_0(1+g)}{1+k} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1+g}{1+k}} = \frac{D_0(1+g)}{k-g} = \frac{D_1}{k-g}. \qquad (3)$$

Так же, как и к формуле (2), к формуле (3) можно прийти другим путем.

С одной стороны, число P_g через один период должно превратиться в $P_g(1+k)$.

С другой стороны, в том же периоде владелец акции получит дивиденды в размере D_1 и будет иметь право на получение в конце каждого последующего периода дивидендов, превосходящих исходные на g процентов за период. А это право дается владельцу акции, которая стоит $P_g(1+g)$. В результате, имеем равенство $P_g(1+k) = P_g(1+g) + D_1$, которое эквивалентно формуле (3).

<u>Задача 2</u>

Стоит ли покупать за 260 сом. акцию, по которой через полгода будут выплачены дивиденды 21 сом., если ожидаемый рост дивидендов, выплачиваемых раз в год, 15%, а ожидаемая доходность 22%?

<u>Решение</u>

Полгода назад, сразу после выплаты дивидендов, согласно формуле (3), оценочная стоимость акции была равна:

$$\frac{21}{0{,}22 - 0{,}15} = 300.$$ *(Обратите внимание,что 21- это D_1.).*

Следовательно, сейчас ее оценочная стоимость

$300(1 + 0{,}22 \cdot 0{,}5) = 333.$

Для инвестора, который считает, что дивиденды будут расти на 15% в год, и который готов довольствоваться доходностью 22%, покупка указанной акции является выгодным вложением денег.

Формулы (2) и (3) хорошо известны (см., например, [1- 4]).

3. В этом пункте рассмотрим модель оценки акций, по которым дивиденды возрастают на одно и то же число за период. По нашему мнению, подобное предположение является вполне реалистичным, и поэтому задача весьма актуальна.

Если дивиденды возрастают на одно и то же число, оценочная стоимость акции (P_a), величина дивидендов (D_0), которые были выплачены накануне оценки акции, величина роста дивидендов (d) и ставка интереса (r) будут связаны соотношением:

$$P_a = \frac{D_1}{1+k} + \frac{D_2}{(1+k)^2} + \frac{D_3}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{D_n}{(1+k)^n} + \ldots =$$

$$= \frac{D_0+d}{1+k} + \frac{D_0+2d}{(1+k)^2} + \frac{D_0+3d}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{D_0+nd}{(1+k)^n} + \ldots, \qquad (k = rt). \qquad (4)$$

Так как каждый член ряда (4) есть дробь, в числителе которого стоит член арифметической прогрессии, а в знаменателе член возрастающей геометрической прогрессии, то этот ряд сходится. Поэтому его можно представить в виде суммы двух рядов:

$$P_a = \left(\frac{D_0}{1+k} + \frac{D_0}{(1+k)^2} + \frac{D_0}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{D_0}{(1+k)^n} + \ldots \right) +$$

$$+ \left(\frac{d}{1+k} + \frac{2d}{(1+k)^2} + \frac{3d}{(1+k)^3} + \ldots + \frac{nd}{(1+k)^n} + \ldots \right) =$$

$$= P_{a1} + P_{a2}.$$

Из формулы (1) следует, что $P_{a1} = \dfrac{D_0}{k}$.

Для того чтобы вычислить сумму ряда P_{a2}, перепишем его в виде:

$$P_{a2} = \frac{d}{1+k}\left(1 + 2(1+k)^{-1} + 3\left((1+k)^{-1}\right)^2 + \ldots + n\left((1+k)^{-1}\right)^n + \ldots\right) \quad (5)$$

и воспользуемся формулой:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)\,x^{n-2} + nx^{n-1} + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1, \quad (6)$$

доказательство которой будет приведено в следующем пункте.

Из (5) и (6) следует, что

$$P_{a2} = \frac{d}{1+k} \cdot \frac{1}{\left(1 - 1/(1+k)\right)^2} = \frac{d(1+k)}{k^2}.$$

Следовательно, оценочная стоимость акции, дивиденды по которой в каждом периоде увеличиваются на одно и то же число d, определяется формулой:

$$P_a = \frac{D_0}{k} + \frac{d(1+k)}{k^2}. \quad (7)$$

Задача 3

Оцените акцию, по которой завтра будут выплачены дивиденды в размере \$10, если они выплачиваются 1 раз в год, их величина каждый раз вырастает на \$1,5, ожидаемая доходность 10%.

Решение

Согласно формуле (7), сразу после выплаты дивидендов в размере *\$10* оценочная стоимость акции:

$$P_a = \frac{10}{0,1} + \frac{1,5(1+0,1)}{(0,1)^2} = 100 + 165 = 265.$$

Поэтому перед выплатой дивидендов, оценочная стоимость акции больше на величину дивидендов: *265 + 10 = \$275.*

4. В этом пункте мы приведем доказательства формулы

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)\,x^{n-2} + nx^{n-1} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}, \quad (8)$$

частным случаем которой является формула (6), использованная в предыдущем пункте.

Доказательства основаны на формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}. \quad (9)$$

Для того чтобы получить формулу (8), продифференцируем равенство (9). Производная левой части равенства (9) есть левая часть (8).

В то же время и производная правой части (9) равна правой части (8):

$$\left(\frac{1 - x^{n+1}}{1-x}\right)' = \frac{\left(1 - x^{n+1}\right)'(1-x) - (1-x)'\left(1 - x^{n+1}\right)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(-1)\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2} = \frac{-nx^n - x^n + nx^{n+1} + x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.$$

Что и требовалось доказать.

Формулу (8) можно получить, не прибегая к помощи производной. Для этого разложим левую часть (8) на частичные суммы:

$$\begin{aligned}
&1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} = \\
&(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1}) + \\
&(\quad x + x^2 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1}) + \\
&(\quad\quad x^2 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1}) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(\quad\quad\quad\quad x^{n-2} + x^{n-1}) + \\
&(\quad\quad\quad\quad\quad x^{n-1}) = \\
&\quad\quad\quad\quad\quad\quad = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n-1} + S_n.
\end{aligned}$$

По формуле (9)

$$S_1 = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x};$$

$$S_2 = x\frac{1-x^{n-1}}{1-x} = \frac{x}{1-x} - \frac{x^n}{1-x};$$

$$S_3 = x^2\frac{1-x^{n-2}}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} - \frac{x^n}{1-x};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{n-1} = x^{n-2}\frac{1-x^2}{1-x} = \frac{x^{n-2}}{1-x} - \frac{x^n}{1-x};$$

$$S_1 = x^{n-1}\frac{1-x}{1-x} = \frac{x^{n-1}}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}.$$

Заметив, что первые члены в представлении S_1, S_2, ..., S_n через разность есть члены геометрической прогрессии, а вторые у всех одинаковы, получим требуемое:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n-1} + S_n =$$

$$= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1-x^n}{1-x} - n\frac{x^n}{1-x} = \frac{\left(1-x^n\right)-(1-x)nx^n}{(1-x)^2} = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.$$

Задача 4

Оцените акцию, по которой накануне были выплачены дивиденды в размере $10, выплачиваемые 1 раз в год. Предполагается, что величина дивидендов в течение 1-10 лет будет расти на $2 в год, далее на 7% в год. ожидаемая доходность 10%.

Решение

Представим оценочную стоимость акции через поток будущих доходов:

$$P = \left(\frac{10+2}{1+0,10} + \frac{10+2\cdot 2}{(1+0,10)^2} + \ldots + \frac{10+10\cdot 2}{(1+0,10)^{10}}\right) +$$

$$+\left(\frac{10+10\cdot 2}{(1+0,10)^{10}}\cdot\frac{1+0,07}{1+0,10} + \frac{10+10\cdot 2}{(1+0,10)^{10}}\cdot\frac{(1+0,07)^2}{(1+0,10)^2} + \ldots\right) = P_1 + P_2.$$

Для нахождения значения P_1 воспользуемся формулой вычисления суммы членов геометрической прогрессии и формулой (8):

$$P_1 = \left(\frac{10}{1+0,10} + \frac{10}{(1+0,10)^2} + ... + \frac{10}{(1+0,10)^{10}} \right) +$$

$$+ \frac{2}{1+0,10} \left(1 + \frac{2}{1+0,10} + \frac{3}{(1+0,10)^2} + ... + \frac{10}{(1+0,10)^9} \right) =$$

$$= \frac{10}{1,10} \cdot \frac{1-(1/1,10)^{10}}{1-(1/1,10)} + \frac{2}{1,10} \cdot \frac{1+10(1/1,10)^{11} - 11(1/1,10)^{10}}{(1-1/1,10)^2} = 61,45 + 58,08.$$

Сумма P_2 есть сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и может быть вычислена по формуле (3) с D_0, равным

$\frac{10+10 \cdot 2}{(1+0,10)^{10}}$:

$$P_2 = \frac{10+10 \cdot 2}{(1+0,10)^{10}} \cdot \frac{1+0,07}{0,10-0,07} = 412,53 \, l$$

Следовательно, оценочная стоимость акции равна:

$$61,45 + 58,08 + 412,53 = 532,06.$$

Использованные источники:

1. Бригхем Ю. Энциклопедия финансового менеджмента: Пер. с англ. - М.: Дело, 1999.
2. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения. - М., 1999.
3. Ван Хорн Дж. Основы управления финансами: Пер. с англ. - М.: Финансы и статистика, 1996.
4. Arman Tevfik, Hisse Senedi Değerlemesi, Literatür Yayınları, İstanbul, 2005.

TÜKETİCİ BİLİNÇ DEĞERLENDİRMESİ: KIRGIZİSTAN ÖRNEĞİ

Prof. Dr. **K. Karahan**, Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi,
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü,
Araş.Gör. **A. Maksudunov**,
Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi,
Sosyal Bilimler Enstitüsü, İşletme Anabilim Dalı

Giriş

Dünya genelinde tüketici hakları ile ilgili haraketler, çevre ve ürünlere karşı bilinçli satın alma eğilimleri 20. yüzyılda başlayan bir olgudur. Birleşmiş milletler tarafından 1985'te ilan edilen 'Evrensel tüketci hakları beyannamesi' (http://www.consumersinternational.org), 1987'de yayınlanan 'Ortak Geleceğimiz' başlıklı rapor [1, s. 239] tüketici bilinçlendirme, tüketici ve çevre korunmasına yönelik önlemlerin temelini oluşturmaktadır. Dünya genelinde ulusal ve uluslararası düzeyde devlet ve devlet dışı kurumlar sözkonusu beyannamelerin yerine getirilmesini sağlamak amacıyla çalışmaktadırlar. Bu etkinlikler ayrıca, tüketiciler tarafından kurulan çeşitli örgütler aracılığı ile de desteklenmektedir. Sözkonusu kuruluşların içerisinde 1960'lardan buyana faaliyet göstermekte olan Dünya tüketici birlikleri örgütü ilk sırada gelmektedir. 115 ülkeden 200'ü aşan üyeleri ile birlikte evrensel tüketici hakları, bu hakların korunması, tüketicilerin bilinçlenmesi konularında etkinlikler yürütmektedir (http://www.consumersinternatio-nal.org). Bu etkinliklerin temel amacı tüketici bilincinin işletmeleri