MJEN

MANAS Journal of Engineering

Volume 3 (Issue 2) (2015) Pages 9-21

Плоская задача устойчивости несжимаемых тел при неоднородных начальных деформациях в окрестностях горизонтальных горных выработок в упруго-пластическом массиве

Elman Hazar
Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi, Bişkek, Kırgızistan
elmanaliyev@hotmail.com

Received: 25.04.2015; Accepted: 15.06.2015

Абстракт В рамках трехмерной линеаризированной теории устойчивости в случае неоднородных начальных напряженных состояний рассмотрены задача устойчивость и решен с помощью вариационных методов. Полученные результаты достаточно удовлетворительно соответствует точным решениям упругих и упруго-пластических задач при неоднородных пластических деформациях.

Ключевые слова: *устойчивость, упруго-пластических, реологических, полость, критическая нагрузка*

Two-dimensional stability problem for horizontal holes that are in uncompressed elastic - plastic materials with inhomogeneous initial deformation

Abstract Stability problems for cases with unhomogenous initial tensions have been studied and solved in the fromework of Three dimensionel stability theory using variationel metod. Results of the elastik-plastik problems for homegenous plastik deformations are in reasonable agreement with each other.

Keywords *Stability, elasto - plasticity, rheology, space critical force*

ВВЕДЕНИЕ

В механике горных пород одним из основных объектов исследования являются горные выработки. Безаварийное функционирование выработок в тяжелые последствие в случае аварий, внезапных выбросов, особенно при добыче полезных ископаемых, требуют уделить особое внимание решению задач устойчивости для полупространств в окрестности горизонтальных выработок. Для совершенствования методов проектирования и строительства горных выработок и тоннелей необходимо создание новых и современных научно обоснованных способов расчета на прочность и устойчивость подземных конструкций. Решение этих и других вопросов основном основывается на исследованиях напряженно-деформированного состояния в окрестностях полостей для различных моделей среды с учетом их механических свойств.

Проблема устойчивости трехмерных тел, в основным развивался, начало второй половины XX века. В эту область механики большой вклад внесли Ж.С.Акопян, И.Б.Бабич, А.Н.Гузь, Л.В.Ершов, Ж.С.Ержанов, В.Д.Клюшников, С.П.Тимошенко и др.

В настоящее время в теоритических работах в пределах механики деформируемого твердого тела исследования состояния равновесия горного массива вблизи горизонтальных горных выработок, в основном, используется трехмерная линеаризированная теория устойчивости при малых докритических деформациях.

Начало исследований устойчивости состояния равновесия горного массива в окрестности выработок на базе трехмерной линеаризированной теории устойчивости положено работой А.Н.Гузя [9], где основные соотношения получены для линейных и нелинейных упругих тел при малых докритических состояниях. Дальнейшем развитие эти теория получила в работах [1-4,7,8].

В работах [6] на основе линеаризированной теории упругости рассмотрены плоские и пространственные задачи устойчивости состояния равновесия упруго-пластического массива возле незакрепленной горизонтальной выработки кругового поперечного сечения. В рассматриваемой случае, когда поверхности полости свободны от внешних воздействий в работах [5] для упруго-пластических тел.

В работе [15] рассмотрено устойчивости вертикальных горных выработок с учетом упруго-вязко-пластических материалов модели Д.Д.Ивлева-А.Н.Спорыхина, учитывающих необратимую сжимаемость.

Проведен вычислительный эксперимент и получены числовые данные, установлено, что влияние необратимой сжимаемости проводит к увеличению пластической области (от 2.4% до 15.8%). Установлено, что учет необратимой сжимаемости проводит к увеличению зоны устойчивости на 5%-7%; установлена стабилизирующая роль ассоциированной сжимаемости, а также вязкость на критические параметры.

Выше приведенный обзор показывает, что до настоящего времени задачи устойчивости для упруго-пластического полупространства в окрестности одиночных горизонтальных цилиндрических полостей кругового поперечного сечения при неоднородных начальных состояниях, когда наряду с другими внешними силами, действующими в полупространстве, на цилиндрической поверхности задаются внешние воздействие в виде мертвых или следящих нагрузок, не рассматривались.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

К основным задачам трехмерной теории устойчивости относятся и задачи устойчивости горизонтальных и вертикальных горных выработок. Эти задачи различаются по принятой модели для описания свойств горных пород, по форме поперечного сечения выработок, по виду граничных условий на поверхности выработки, по форме потери устойчивости и по другим особенностям.

Рассмотрим полупространство с цилиндрической полостью круглого поперечного сечения радиуса R. Предполагается, что полость пройдена на глубине h в упруго – пластической несжимаемой среде. Учитывается собственный вес материала полупространства. Из внутренней стороны полости действует давление Q в виде следящей или мертвой нагрузок, что соответствует моделированию действия газа, жидкости, крепи, тампонажа и др. на поверхности полости. Таким образом, рассматриваемое полупространство находится под действием сил собственного веса или сил, действующих на поверхности полости в виде следящих или мертвых нагрузок. Решение задач устойчивости равновесия для упруго – пластического несжимаемого полупространства с цилиндрической полостью приводится к исследованию собственных чисел линеаризованных задач трехмерной теории устойчивости. Линеаризованные задачи устойчивости деформируемых тел можно условно разделить на два этапа. Первый этап заключается в определении напряженно – деформированного состояния для области соответствующей формы, т. е. в определении докритического состояния. Второй этап – решение самой линеаризированной задачи устойчивости. Для достаточно жестких сред докритическое состояние определяется по геометрической линейной теории [11].

Согласно работе [11] исследование проведем для степенной зависимости между интенсивностями напряжений деформаций

$$\sigma_u = A \cdot \varepsilon_u^k \qquad (2.1)$$

где A и k - постоянные величины.

Наличие цилиндрической поверхности в полупространстве вызывает дополнительные напряжений. Возникающее напряженное состояние состоит из трех частей:

а) напряжения в нетронутом массиве;

б) напряжения, обусловленные наличием полости;

в) напряжения, возникающие под действием сил, заданных на поверхности полости (действие жидкость, газа, крепи, и др.)

В нетронутом массиве распределение напряжений имеет вид [11]

$$\sigma_{11}^0 = -q,\ \sigma_{22}^0 = -q,\ \sigma_{12}^0 = 0,\ q = \rho h \qquad (2.2)$$

где, h – глубина нетронутом массиве, ρ - плотность массива.

Напряженно – деформированное состояние, обусловленное наличием полости и равномерного давления на ее поверхности быстро затухает при удалении от поверхности полости. Глубина h, где находится полость, является значительной по сравнению с радиусом полости.

Исходя из этих предположений, можно принять, что напряженное состояние нижнего полупространства с полостью достаточного глубокого залегания моделируется напряжением состоянием в невесомом массиве с цилиндрической полостью, к которому на «бесконечности» приложена силы, соответствующие напряжением в нетронутом массиве на глубине h. Также предполагается, что внешние силы изменяется по X2 незначительно в пределах рассматриваемой зоны устойчивости.

Если через $\bar{\sigma}$ обозначить сумму напряжений, обусловленных включением цилиндрической полости и внутреннего давления, то полные напряжения в упруго – пластическом массиве с полостью можно представить в виде

$$\sigma^0 = \sigma + \bar{\sigma} \qquad (2.3)$$

$\sigma = const$, $\bar{\sigma} \to 0$ при $r \to \infty$, σ - напряжения в нетронутом массиве.

Предполагается, что потеря устойчивости имеет местный характер т.е. возмущения при достаточном удалении от поверхности полости затухают. По этому будем рассматривать задачи для бесконечных областей при условии

$$u\big|_{r\to\infty} \to 0 \qquad (2.4)$$

При построении трехмерной линеаризированной теории устойчивости принимаются некоторые возможные упрощение, относящиеся ко всем классам задач теории устойчивости горных выработок [11].

При определении докритического состояния и исследовании задач устойчивости можно не учитывать эффекты, связанные с тем, что выработка имеет конечную глубину и рассматривать задачи с полу бесконечной полостью.

При исследовании задач устойчивости можно не учитывать наличие дневной поверхности и рассматривать бесконечное пространство бесконечной цилиндрической полостью под действием нагрузки на глубине h. При этом можно фиксировать нагрузку на глубине h и не учитывать ее зависимость от глубины.

В дальнейшем при исследовании задач устойчивости в окрестности цилиндрических полостей будет рассматривать устойчивость формы равновесия. Рассматриваемую форму равновесия назовем невозмущенной. Наряду с невозмущенной равновесной формой могут существовать другие, близкие к ней, возмущенные формы равновесия. С уменьшением параметра нагрузки упругое тело возвращается в исходное состояние. При исследовании устойчивости с учетом упруго – пластических деформаций появление любых малых пластических деформаций в силу их необратимости приводит к неустойчивому состоянию равновесия. Под критической силой в упруго – пластических задачах понимается наименьшее значение силы, при достижении которой могут появится смежные соседние равновесные формы. Отметим, что при пластических деформациях переход от одной равновесной форме к другой может сопровождаться появлением дополнительных зон разгрузки. Учет дополнительных зон разгрузки в случае теории устойчивости упруго-пластических задач вызывает огромные математический трудности. В связи с этим здесь используется другая , более упрощенная подстановка задач теории устойчивости при упруго – пластических деформациях. Суть этого подхода заключается в том, что явление разгрузки в процессе потери устойчивости не учитывается и критические нагрузки определяются как и для физически нелинейно – упругого тела. При этом зоны разгрузки могут быть учтены в докритическом состоянии. Таким образом, в данной работе, в дальнейшем, все конкретные задачи исследуются в пределах обобщенной концепции продолжающегося нагружения.

Задачи для несжимаемых тел при неоднородных начальных деформациях

В начале приведем основные уравнения и граничные условия в нелинейной механике деформируемого тела [10,12,14]. В этом случае напряженное состояние можно характеризовать симметричным тензором напряжений $\{\sigma\}$, а уравнение равновесия имеет вид [11]

$$\nabla_i\left[\sigma^{in}(\delta_n^j + \nabla_n U^j)\right] + F^j = 0 \qquad (3.1)$$

Граничные условия и напряжениях на части поверхности S1 и на части поверхности S2 имеют следующий вид [11]

$$N_i\left[\sigma^{in}(\delta_n^j + \nabla_n U^j)\right]\Big|_{S_1} = P^j; \qquad (3.2)$$
$$U^j\Big|_{S_2} = U^j$$

Здесь введены следующие обозначения:Ni-составляющие орта нормали к поверхности тела в недеформированном состоянии; Pj- составляющие поверхностных сил;

Fj- составляющие массовых сил.

С использованием тензора напряжений Кирхгофа $\{t\}$ уравнение равновесия и граничные условия в напряжениях на части поверхности S1 принимают вид [11]

$$\nabla_i t^{ij} + F^j = 0$$
$$N_i t^{ij} \big| s_1 = P^j \tag{3.3}$$

Тензоры напряжений $\{\sigma\}$ и $\{t\}$ связаны между собой

$$t^{ij} = \sigma^{in}(\delta_n^j + \nabla_n U^j) \tag{3.4}$$

В случае несжимаемых тел условия не сжимаемости имеют следующий вид [11]

$$\varepsilon_n^n = 0; g^{nm}\,\varepsilon_{nm} = 0; 2\nabla_n U^n + g^{nm}\nabla_n U^k\,\nabla_m U_k = 0 \tag{3.5}$$

Нижу приводим основные соотношения теории упруго-пластических деформаций , вводя следующие обозначения: $\widehat{\sigma}^{\hat{i}j}$ -контравариантные компоненты девиатора напряжений; $\widehat{\sigma}$ и $\widehat{\varepsilon}$ - компоненты шаровых тензоров напряжений и деформаций; $(\bar{\sigma}^{ij})$ и $(\bar{\varepsilon}^{ij})$ -компоненты направляющих тензоров напряжений и деформаций сдвига; σ_u и ε_u -интенсивности напряжений и деформаций.
Эти величины определяются из следующих выражений:

$$\widehat{\sigma}^{\hat{i}j} = \sigma^{ij} - \widehat{\sigma} g^{ij}\ ;\ \ \widehat{\varepsilon}^{ij} = \varepsilon_{ij} - \widehat{\varepsilon}\, g_{ij}\,;\ \widehat{\sigma} = \frac{1}{3} g_{ij}\sigma^{ij}\,;\ \widehat{\varepsilon} = \frac{1}{3} g^{ij}\varepsilon_{ij}\,;\ \sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2}\widehat{\sigma}_j^i \widehat{\sigma}_i^j}\ ;\ \varepsilon_u \sqrt{\frac{3}{2}\widehat{\varepsilon}_j^i \widehat{\varepsilon}_i^j}\ ; \tag{3.6}$$
$$\tau_u = \sqrt{\frac{1}{3}\widehat{\sigma}_j^i \widehat{\sigma}_{\hat{i}}^j}\ ;\ \gamma_u = \sqrt{\frac{4}{3}\widehat{\varepsilon}_j^i \widehat{\varepsilon}_{\hat{i}}^j} = \sqrt{2}\,\varepsilon_u\ ;\ (\bar{\sigma}^{ij}) = \sqrt{\frac{9}{2}}\,\frac{\widehat{\sigma}^{ij}}{\sigma_u};(\bar{\varepsilon}_{ij}) = \sqrt{2}\,\frac{\widehat{\varepsilon}_{\hat{i}j}}{\varepsilon_u}.$$

Таким образом, линеаризированные постановки задачи для упруго-пластических, несжимаемых тел при статическом подходе формируется [11]: уравнения равновесия

$$\nabla_i t^{ij} + F^j = 0 \tag{3.7}$$

граничные условия в напряжениях на части поверхности

$$N_i t^{ij} \big| s_1 = P^j \tag{3.8}$$

граничные условия в перемещениях на части поверхности

$$U^j \big| s_2 = 0 \tag{3.9}$$

соотношения упругости

$$t^{ij} = \chi^{ij\alpha\beta} v_{\alpha\beta} + g^{in}(g_n^j + \nabla_n U_0^j)P \text{ , где } v_{\alpha\beta} = \nabla_\beta U_\alpha \qquad (3.10)$$

и условия не сжимаемости

$$g^{in}(g_n^j + \nabla_n U_0^j)\nabla_i U_j = 0 \qquad (3.11)$$

Учитывая предположения 2. при решения задач устойчивости, фиксируя компоненты напряжений на глубине h , можно отбросить массовые силы

$$F^j = 0 \qquad (3.12)$$

В этом случае уравнения движения для несжимаемых сред имеют вид

$$\nabla_i(\chi^{ij\alpha\beta}\nabla_\beta U_\alpha + g^{ij}P) = 0 \qquad (3.13)$$

Вариационный метод решения при малых неоднородных начальных деформациях

Приведем вариационные принципы для статических задач трехмерной линеаризированной теории устойчивости при малых докритических деформациях в случае несжимаемых тел.

В случае второго варианта теории малых докритических деформаций выполняется следующие условие:

$$\chi^{ij\alpha\beta} = \chi^{\beta\alpha ji}; \chi^{ij\alpha\beta} \neq \chi^{ji\alpha\beta}; \chi^{ij\alpha\beta} \neq \chi^{ij\beta\alpha}; \chi^{ij\alpha\beta} \neq \chi^{\alpha\beta ij} \qquad (4.1)$$

При задании на границе мертвой нагрузки используем вариационные принципы, сформулированное в [11].

Рассмотрим следующие функционал:

$$J_1(U,P) = \int_V \left[\frac{1}{2}\chi^{ij\alpha\beta}\nabla_\beta U_\alpha \nabla_i U_j + P g^{in}(g_n^j + \nabla_n U_0^j)\nabla_i U_j - F^j U_j \right] dV \qquad (4.2)$$

Предположим, что возмущения объемных сил F^j и поверхностных

Сил P^j не зависят от возмущений перемещений и варьируемые функции являются достаточно гладкими.

Из указанного выше предположения и условия стационарности функционала J_1 следует уравнения равновесия (3.7) , граничные условия (3.8) и условия не сжимаемости (3.11).

Вычислим первую вариацию функционала (4.2), учитывая (4.1).

После некоторых преобразований получаем:

$$\delta J_1(U,P) = -\int_V \left\{ \nabla_i \left[\chi^{ij\alpha\beta}\nabla_\beta U_\alpha + g^{in}(g_n^j + \nabla_n U_0^j)P \right] \right\} \delta U_j + \int_V g^{in}(g_n^j + \nabla_n U_0^j)\nabla_i U_j \delta P \delta V + \\ + \int_S N_i \left[\chi^{ij\alpha\beta}\nabla_\beta U_\alpha + g^{in}(g_n^j + \nabla_n U_0^j)P \right] \delta U_j \delta S \qquad (4.3)$$

Из условия $\delta J_1 = 0$ получаем уравнения равновесия, граничные условия и условия не сжимаемости.

В случае, когда поверхности задана следящая нагрузка, используем функционал [13].

$$J_2(U,P)=\int_V\left\{\frac{1}{2}\chi^{ijnm}\nabla_m U_n U_j+Pg^{ij}\nabla_i U_j+\frac{1}{2}Q\left[(\nabla_i U^i)^2-\nabla_i U^j\nabla_j U^i)\right]\right\}dV \tag{4.4}$$

Если составляющие вектора U и P достаточно гладкие функции, то из условия стационарности функционала (4.4) следуют уравнения равновесия (3.7) и условия не сжимаемости (3.11).
Учитывая свойства симметрии тензора χ и формулу Остроградского, вычисляя первую вариации функционала J_2, получаем

$$\delta J_2(U,P)=-\int_V\left\{\left[\nabla_i(\chi^{ijnm}\nabla_m U_n+g^{ij}P)\right]\right\}dV+$$
$$\int_S\left[N_i(\chi^{ijnm}\nabla_m U_n+g^{ij}P)+Q(N^j\nabla_i U^i-N^i g^{nj}\nabla_n U_i)\right]\delta U_j\delta S \tag{4.5}$$

Заметим, что граничные условия (3.8), соответственно для функционалов J_1 и J_2 являются естественными. Они получаются из стационарности этих функционалов. Определение докритического напряженного состояния. Рассмотрим горизонтальной выработки в полупространство с цилиндрической полостью кругового поперечного сечения радиуса R, проведенной на глубине h. Предположим, что полупространство заполнено упруго- пластической несжимаемой средой. В полупространстве действует силы собственного веса, а на цилиндрической поверхности полости задано внутреннее давление в виде следящей или мертвой нагрузок. На основе этих и принятых 2. Предположений, исследуем плоскую формы потери устойчивости.
Определим компоненты тензора напряжений в докритическом состоянии, когда на поверхности полости выполняются условия

$\sigma_{zz}^0=-q_1$ при r=R

а при удалении от поверхности – условия (5.1)

$\sigma_{rr}^0=-q$ при $r\to\infty$

Решение задач для определения докритического напряженно- деформированного состояния в указанной постановке получено в работе [3] и имеют вид

$$\sigma_{rr}^0=-q+(q-q_1)(\frac{R}{r})^{2k},\sigma_{\theta\theta}^0=-q+(q-q_1)(2k-1)(\frac{R}{r})^{2k},$$
$$P^0=-q+(q-q_1)(k-1)(\frac{R}{r})^{2k},E_c^{'}=E_c^{'}(\frac{R}{r})^{2k-2},E_k=kE_c, \tag{5.2}$$
$$E_c^{'}=kq\sqrt{3}=(\frac{A}{kq\sqrt{3}})^{\frac{1}{k}}$$

Перемещение и скаляр P, удовлетворяющие условию затухания на бесконечности

$$U\big|_{r\to\infty}\to 0,P\big|_{r\to\infty}\to 0 \tag{5.3}$$

Представляются в виде [10,11]

$$U_r=\sum_{n=1}^{N}A_{nm}(\frac{R}{r})^n\cos\frac{2\pi}{l}z\,,U_\theta=\sum_{n=1}^{N}B_{nm}(\frac{R}{r})^n\sin\frac{2\pi}{l}z\,,P=\sum_{n=1}^{N}C_{nm}(\frac{R}{r})^n\cos\frac{2\pi}{l}z \tag{5.4}$$

Плоская задача устойчивости для несжимаемых полупространства в окрестности горизонтальной заполненной полости.

Рассмотрим устойчивость нижнего тяжелого полупространства, заполненного упруго-пластическим не сжимаемым материалом, когда на поверхности горизонтальной полости действуют поверхностные следящие или мертвые нагрузки.

Согласно постановке задачи 2.проведем исследование задачи устойчивости упруго- пластического не сжимаемого полупространства в окрестности цилиндрической полости в случае плоской формы потери устойчивости. Величина значения критической нагрузки определяется как минимальный положительный корень характеристического уравнения, которое соответствует линейной системе алгебраических уравнений.

Подставляя (5.4) в (4.6)с учетом (5.2) после некоторых преобразований получаем однородную систему линейных уравнений в виде:

$$\sum_{n=1}^{N}\left[A_{nm}a_i(n,n_1,m)+B_{nm}b_i(n_1,n,m)+C_{nm}c_i(n_1,n,m)\right]=0,$$
$$(i=\overline{1,3},n_1=\overline{1,N}\,,m=0;1;.......M\,),B_{n\theta}\equiv 0. \tag{6.1}$$

В (6.1) введены следующие обозначения в случае следящих нагрузок:

$$\begin{aligned}&a_1=\left[(k+1)(nn_1+1)+m^2-(1-k)(n+n_1)\right]d_{-2}-q^*\{(1+nn_1+m^2)d_0^{'}+[(m^2+1)(2k-1)-\\&-nn_1]d_0\}+q^{**}[(m^2+1)(2k-1)-nn_1-2k-n-n_1]d_0\,,\ b_1=m[k+2+n+n_1(k-1)]d_{-2}-\\&-2mq^*[d_0^{'}+2k-1)d_0]+mq^{**}(2k-n-n_1-2)d_0,c_1=-(\frac{1}{3}E_c^{'})^{-1}(n_1-1)d_{-1}^{'}\,,a_2=m[k+2+\\&+n(k-1)+n_1)d_{-2}-2mq^*[d_0^{'}+(2k-1)d_0]+mq^{**}[2k-1]d_0]+mq^{**}(2k--n-n_1-2)d_0\,,\\&b_2=[(k+1)m^2+1+n+n_1+nn_1]d_{-2}-q^*\{(m^2+1+nn_1)d_0^{'}+[(m^2+1)(2k-1)-nn_1]d_0\}+\\&+q^{**}[(m^2+1)(2k-1)-nn_1-2k-n-n_1]d_0\,,c_2=(\frac{1}{3}E_c^{'})^{-1}md_{-1}^{'}\,,a_3=-(n-1)d_{-1}^{'}\,,b_3=md_{-1}^{'}\,,\\&c_3=0.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$d_i=(2k+n+n_1+i)^{-1}\,,d_i^{'}=(n+n_1+i)^{-1}\,,q^*=q(\frac{1}{3}E_c^{'})^{-1}\,,q^{**}=q_1(\frac{1}{3}E_c^{'})^{-1} \tag{6.3}$$

Третьи уравнения (6.1) при любом значении n_1 дают возможность исключить B_{nm} из системы уравнений. Учитывая это и выделяя из C_{nm} множитель $\frac{1}{3}E_c^{'}$ в результате получаем следующую систему уравнений

$$\sum_{n=1}^{N}[A_{nm}a_i^{'}(n,n_1,m)+C_{nm}c_i(n,n_1,m)]=0 \quad (n_1=1,N,m=0;1;.......M) \tag{6.4}$$

со следующими коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_1^{'} &=[(k+1)(nn_1+1)+m^2+(k-1)(n+n_1)+(n-1)(k+2-n_1+n+kn_1)]d_{-2}-q^*\{[1+nn_1+ \\ &+m^2+2(n-1)]d_0^{'}+[(m^2+2n-1)(2k-1)-nn_1]d_0\}+q^{**}\{[(n-1)(2k-n-n_1-2)+(m^2+ \\ &+n_1+nn_1)]d_{-2}-q^*\{[m^2(n+1)+(n-1)(1+nn_1)]d_0^{'}+[m^2(2k-1)(n+1)+(n-1)(2k-1- \\ &-nn_1)]d_0\}+q^{**}\{(n-1)[(m^2+1)(2k-1)-nn_1-2k-n-n_1]+m^2(2k-n-n_1-2)\}d_0, \\ c_2^{'} &=m^2 d_{-1}^{'}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

В случае задания на поверхности цилиндрической полости мертвой нагрузки (6.2) и (6.5), необходимо в последних слагаемых в выражениях $a_i\ ,b_i\ a_i^{'}\ (i=1,2)$ в скобках принять $2k+n+n_1=0$.

В результате обычной процедуры из (6.4) и (6.5) получаем следующие выражение для характеристического определителя

$$\Delta(q^*,q^{**},m)=0 \tag{6.6}$$

Корни уравнения в данном случае обозначим так:

$$q^* = f(\eta,m), \text{ где } \eta=\frac{q^{**}}{q^*}=\frac{q_1}{q} \tag{6.7}$$

В свою очередь из (6.6) находим критическое значение нагрузки q_{rh}^*:

$$q_{rh}^*=\min_m\{f(\eta,m)\} \tag{6.8}$$

Число m определяет форму потери устойчивости. Если в (6.6) положить $q^{**}=0$, то полученные результаты совпадают с известными результатами (7).

Величины $q_{rh}\ ,h_{rh}\ ,\varepsilon_u^0\big|_{r=R}$ определяются следующим образом (11)

$$q_{rh}=\frac{A}{k\sqrt{3}}\left(\frac{kq_{kp}^*}{\sqrt{3}}\right)^k,\ h_{kp}=\frac{A}{\rho k\sqrt{3}}\left(\frac{kq_{kp}^*}{\sqrt{3}}\right)^k,\ \varepsilon_u^*\big|_{r=R}=\left(\frac{k\sqrt{3}}{A}q_{kp}\right)^{\frac{1}{k}}=\frac{k}{\sqrt{3}}q_{kp}^* \tag{6.9}$$

Минимальные значения $\frac{q}{E_c^{'}}$ вычислены из характеристического уравнения (6.6) численно с помощью ЭВМ для различного числа координатных функций и различных значений параметра k. Полученные результаты приведены в таблицах 1-5.

Таблица 1. Зависимости критических нагрузок (q/Ec)kp при = 0.2

k N	1	M	0.9	M	0.8	M	0.5	M
1	0.239	36	0.278	34	0.329	34	0.666	30
	0.239	34	0.277	34	0.329	38	0.666	34
2	0.214	36	0.238	36	0.268	36	0.424	36
	0.214	36	0.238	36	0.268	38	0.424	38
3	0.211	38	0.232	38	0.256	38	0.383	38
	0.211	38	0.232	38	0.256	38	0.383	38
4	0.195	8	0.213	8	0.236	8	0.341	6
	0.188	8	0.205	8	0.226	8	0.316	6
5	0.189	12	0.204	12	0.222	10	0.302	10
	0.182	12	0.196	10	0.212	10	0.278	8
6	0.185	16	0.198	16	0.214	16	0.281	12
	0.178	16	0.191	14	0.205	14	0.259	12
7	0.182	22	0.195	22	0.210	20	0.269	18
	0.176	20	0.188	20	0.201	18	0.248	16

Таблица 2. Зависимости критических нагрузок (q/Ec)kp при = 0.4

k N	1	M	0.9	M	0.8	M	0.5	M
1	0.256	34	0.296	38	0.347	32	0.666	30
	0.256	36	0.296	36	0.347	38	0.666	30
2	0.234	38	0.258	38	0.287	32	0.423	36
	0.234	36	0.258	38	0.287	34	0.424	38
3	0.231	38	0.254	34	0.277	32	0.378	38
	0.231	38	0.253	38	0.277	38	0.383	38
4	0.217	8	0.235	8	0.257	8	0.346	6
	0.201	6	0.215	6	0.257	6	0.298	6
5	0.211	12	0.226	12	0.242	10	0.303	8
	0.195	10	0.206	10	0.218	10	0.256	8
6	0.207	16	0.220	16	0.234	16	0.280	12
	0.192	14	0.202	14	0.211	14	0.238	12
7	0.205	22	0.217	22	0.230	20	0.268	16
	0.191	18	0.199	18	0.207	18	0.228	16

Таблица 3. Зависимости критических нагрузок $(q/E_c)_{кр}$ при η = 0.4

k / N	1	M	0.9	M	0.8	M	0.5	M
1	$\frac{0.278}{0.278}$	$\frac{38}{38}$	$\frac{0.317}{0.317}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{0.367}{0.368}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{0.633}{0.666}$	$\frac{2}{32}$
2	$\frac{0.260}{0.261}$	$\frac{38}{38}$	$\frac{0.281}{0.283}$	$\frac{38}{38}$	$\frac{0.307}{0.308}$	$\frac{38}{38}$	$\frac{0.396}{0.424}$	$\frac{2}{38}$
3	$\frac{0.258}{0.261}$	$\frac{36}{38}$	$\frac{0.274}{0.279}$	$\frac{38}{38}$	$\frac{0.293}{0.299}$	$\frac{38}{38}$	$\frac{0.357}{0.382}$	$\frac{6}{38}$
4	$\frac{0.245}{0.213}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{0.262}{0.223}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{0.282}{0.235}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{0.337}{0.280}$	$\frac{10}{6}$
5	$\frac{0.240}{0.208}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{0.253}{0.215}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{0.266}{0.221}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{0.301}{0.235}$	$\frac{8}{8}$
6	$\frac{0.237}{0.206}$	$\frac{16}{12}$	$\frac{0.248}{0.211}$	$\frac{16}{12}$	$\frac{0.258}{0.214}$	$\frac{14}{12}$	$\frac{0.278}{0.217}$	$\frac{10}{10}$
7	$\frac{0.235}{0.205}$	$\frac{22}{16}$	$\frac{0.244}{0.209}$	$\frac{20}{16}$	$\frac{0.253}{0.211}$	$\frac{20}{16}$	$\frac{0.264}{0.207}$	$\frac{14}{14}$

Таблица 4. Зависимости критических нагрузок $(q/E_c)_{кр}$ при N=6

k / η	1.0 (m)	0.9 (m)	0.8 (m)	0.5 (m)	0.4 (m)	0.3 (m)	0.2 (m)
0.2	$\frac{0.185(16)}{0.178(16)}$	$\frac{0.198(16)}{0.191(14)}$	$\frac{0.214(16)}{0.205(14)}$	$\frac{0.281(12)}{0.259(12)}$	$\frac{0.400(8)}{0.358(10)}$	$\frac{0.357(10)}{0.317(10)}$	$\frac{0.313(12)}{0.284(12)}$
0.4	$\frac{0.207(16)}{0.192(14)}$	$\frac{0.220(16)}{0.202(14)}$	$\frac{0.234(16)}{0.211(14)}$	$\frac{0.280(12)}{0.238(12)}$	$\frac{0.335(16)}{0.260(10)}$	$\frac{0.300(8)}{0.253(10)}$	$\frac{0.298(10)}{0.247(10)}$
0.6	$\frac{0.237(16)}{0.206(12)}$	$\frac{0.248(16)}{0.211(12)}$	$\frac{0.258(14)}{0.214(12)}$	$\frac{0.278(10)}{0.217(10)}$	$\frac{0.249(16)}{0.204(10)}$	$\frac{0.270(16)}{0.209(10)}$	$\frac{0.265(8)}{0.214(10)}$

Таблица 5. Зависимости критических нагрузок $(q/E_c)_{кр}$ при N=7

k / η	1.0 (m)	0.9 (m)	0.8 (m)	0.5 (m)	0.4 (m)	0.3 (m)	0.2 (m)
0.2	$\frac{0.182(22)}{0.176(20)}$	$\frac{0.195(22)}{0.188(20)}$	$\frac{0.210(20)}{0.201(18)}$	$\frac{0.269(18)}{0.248(16)}$	$\frac{0.297(16)}{0.269(16)}$	$\frac{0.332(14)}{0.294(14)}$	$\frac{0.360(10)}{0.326(14)}$
0.4	$\frac{0.205(22)}{0.191(18)}$	$\frac{0.217(22)}{0.199(18)}$	$\frac{0.230(20)}{0.207(18)}$	$\frac{0.268(16)}{0.228(16)}$	$\frac{0.280(14)}{0.233(14)}$	$\frac{0.276(10)}{0.235(14)}$	$\frac{0.250(10)}{0.236(12)}$
0.6	$\frac{0.235(22)}{0.205(16)}$	$\frac{0.244(20)}{0.209(16)}$	$\frac{0.253(20)}{0.211(16)}$	$\frac{0.264(14)}{0.207(14)}$	$\frac{0.248(10)}{0.202(14)}$	$\frac{0.259(20)}{0.194(14)}$	$\frac{0.238(20)}{0.183(12)}$

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Значения наименьших положительных корней $\frac{q}{E_c^{'}}$ характеристического уравнения для различного числа координатных функций и различных значения параметра k в случае плоской формы потери устойчивости в зависимости от интенсивности поверхностных нагрузок приведены в таблицах 1-5. В всех таблицах верхние строчки соответствует следящей, а нижние строчки мертвой нагрузкам. В таблицах значения критических нагрузок получены в результате предварительной минимизации по m с ростом параметра на интервале $\eta = 0.2;.0.4;0.6$.

При N=6 и N=7 предварительно минимизированные по следящей и мертвой нагрузок приведены в таблицах 4 и 5. Из результатов таблиц 4 и 5 видно, что разница между значениями корней характеристического уравнения, полученный при N=6 и N=7, не превышает 5%. Поэтому при вычислении критических значений $(\frac{q}{E_c^{'}})_{kp}$ можно ограничиться семью координатных функциями. Это свидетельствует об эффективности применения вариационного метода при решении рассматриваемых задач.

Из результатов, приведенных в таблицах 1-3, следует, что влияние нагрузок, заданных на поверхности полости при слабо развитых k >0.5. Неоднородных пластических деформациях, аналогично случаю упругой задачи, т. е. как в упругих, так и в упруго- пластических задачах в случае малоразвитых пластических деформаций влияние нагрузки, действующей на поверхности полости, приводит к возрастанию величин критических сил потери устойчивости по сравнению с одноосным сжатием вдоль оси полости. В случае сильно развитых k ≤0.5 не однородных пластических деформаций, наблюдается обратная картина, т. е. при сильно развитых не однородных пластических деформациях приложение внешних сил на поверхности полости приводит к уменьшению величин критических сил потери устойчивости по сравнению со случаем одноосного нагружения полости вдоль ее оси.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, качественное соответствие результатов упругих и упруго- пластических задач при мало развитых не однородных пластических деформациях может служить одним из возможных путей основания применения обобщенной концепции продолжающегося нагружения в теории устойчивости трехмерной линеаризированной механике деформируемого твердого тела. Результаты, полученные в случае развитых не однородных пластических деформаций, по видимому, указывают на небходимость уточнения постановок самих задач трехмерной устойчивости и обоснования применения обобщенной концепции продолжающегося нагружения при их исследовании.

В рамках плоской задачи таблица 1-5, когда на поверхности полости приложения следящая (мертвая) нагрузка интенсивности ηQ, с увеличением параметра η на интервале 0≤η≤0.6 для конкретных значений 0.5≤k≤1 величина критической нагрузки q_{kp} возрастает соответственно при $k=1$-на 44%, при $k=0.9$-на 38%, при $k=0.8$-на 31% (при $k=1$-на 25%, при $k=0.9$-на 18%, при $k=0.8$-на 10%), а на интервале 0.2≤k≤0.5 критическая нагрузка потери устойчивости уменьшается, соответственно, при $k=0.5$-на 15%, при $k=0.4$-на 31%, при $k=0.3$-на 42% (при $k=0.5$-на 29%, при $k=0.4$-на 71%, при $k=0.3$-на 96%) по сравнению со случаем, когда поверхность полости не загружена. В скобках указаны результаты для случая задания на поверхности полости мертвых нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

[1] F.M.Asamıdınov’’Ob ustoycıvosty gorızontalnıch vırabotok ne krugovoy forme.Prıkladnaya Mechanıka,T.13,N6,s.112-115,1977.

[2] F.M.Asamıdınov’’Ustoycıvosty massıva vozle gorızontalnıch gjrnoy vırabotkyellıptıceskoy formı prı odnosnoy rastyajenıı-sjatıı.Prıkladnaya Mechanıka,T.13,N11,s.124-126,1977.

[3] I.Yu.Babıc , A.N.Guz ’’Ploskaya uprugo-plastıceskaya zadaca ustoycıvosty gorızontalnıch gornıch vırabotok.Prıkladnaya Mechanıka,T.14,N3,s.68-73,1978.

[4] I.Yu.Babich , A.N.Guz,A.N.Sulga ’’Issledovanıya dınamıkı ı ustoycıvosty kompozıtnıch materılov v trechmernoy postanovke.Prıkladnaya Mechanıka,T.18,N1,s.3-32,1982.

[5] Prıkladnaya Mechanıka,T.14,N3,s.68-73,1976.

[6] G.N.Baklanova ’’Ob ustoycıvosty gorızantalnıch vırabotok prı uprugo-plastıceskıch deformacıyach’’V kn: II Respublık conferenc molodıch ucennıch po mechanıke.Izd.Nauka dumka,K.s.21-24,1979.

[7] G.N.Baklanova ’’ Prostranstvennaya zadaca ob ustoycıvosty gorızantalnıch vırabotok prı uprugo-plastıceskıch deformacıyach’’.Prıkladnaya Mechanıka.T.16,N7,s.35-40,1980.

[8] G.N.Baklanova,A .V. Deriglazov ’’ Ustoycıvost gornogo anızatropnogo massıva v okrestnosty dvuch gorızantalnıch vırabotok.Prıkladnaya mechanıka T.18öN2ös.60-64,1980.

[9] A.N.Guz ’’O zadacach ustoycıvosty v mechanıke gornıch porod’’.V kn:Problemniy voprosi gornich porod.Izd.Nauka-Alma-ata,s.27-35,1972.

[10] A.N.Guz ’’ Ustoycıvosty uprıgıch tel prı konecnıch deformacıyac.Izd.Naukovo dumka.K.s.270,1973.

[11] A.N.Guz ’’ Osnovı teorıı ustoycıvosty gornıch vırabotok.Izd.Naukovo dumka.K.s.270,1976.

[12] A.N.Guz ’’Ustoycıvost uprıgıch tel prı vsestoronnem sjatıı,Prıkladnaya Mechanıka.T.12,N6,s.3-32,1976.

[13] A.N.Guz ’’ O zadacach ustoycıvosty gornıch vırabotok.DAN USSR253,N3,sç553-555,1980.

[14] V.V.Novojilov ’’Osnovı nelıneynoy teorıı ustoycıvocty’’ Gosttekızdat,M.212 s.1948.

[15] A.B.Krivocenko,’’Issledovanie ustoycivosty gornoy mechaniki v sjimaemich uprugo-plasticeskich sredach ’’,V кn: Kandidatskiy dissertaci. Vologda 142 s.2006.