

AYRIK ZAMANLI ELEKTRİK DEVRELERİNİN SONLU FARK DENKLEMLERİYLE MODELLENMESİ

*(MODELING OF DISCRETE TIME ELECTRIC CIRCUITS USING FINITE
DIFFERENCE EQUATION)*

Cem CİVELEK¹

ÖZ

Bu çalışma, sürekli zamanda diferansiyel denklemlerle modellenen klasik elektrik devrelerinin ayrik zamanlı olduklarında sonlu fark denklemleriyle nasıl modellenebileceğini incelemek amacıyla yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Sonlu fark denklemleri ve ayrik zaman analog devreleri, Modelleme, Devreler Teorisi

ABSTRACT

This study includes a research on application of finite difference equations for modellibility of discrete time analog electric circuits, which can be modeled in continuous time domain by differential equations

Keywords: *Finite difference equations and discrete time analog circuits, modeling, circuit theory*

¹ Ege Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Bornova Kampüs. 35100 Bornova, İzmir, cem.civelek@ege.edu.tr (sorumlu yazar)

1. GİRİŞ

Sürekli zaman bölgesinde analog devrelerin diferansiyel denklemlerle modellenmesi birçok Devre Teorisi kitabında bulunabilir, örneğin (Chua, 1987) gibi. Sonlu farklar ve fark denklemleriyle ilgili en temel bilgiler örnek olarak (Jordan and Smith 1997) ve (Spiegel, 1982) kitaplarında verilmiştir. Bu iki matematik kitabından ilki, aynı zamanda mühendislik matematiği ve diferansiyel denklemler için de çok değerli bir kaynaktır. Sonlu farklar ve temel uygulamaları üzerine yine değerli bir kaynak ise (MacKeown, P. K.; Newman D. J., 1987) kitabıdır. Mekanikteki konum ve hız gibi fiziksel büyüklüklerin ayrık zaman durumu için incelendiği ender bir kaynak (Greenspan, 1981) şeklindedir. Potansiyel ve kinetik enerjilerin, ayrık durum için ele alınarak incelendiği kaynak (Civelek, C.; Süsse, R., 2003) şeklinde verilebilir. Bu çalışmada klasik bir elektrik devresinin giriş ve çıkışının sürekli gözlemlenemediği; gözlemlenebilen değerlerin eşit aralıklı ayrık bir şekilde olduğu durumda devrenin nasıl modellenebileceği anlatılmaktadır.

2. SİSTEM TANIMLARI

Kullanılan büyüklükler genel anlamda ve kısaca şöyle tanımlanabilir:

Δt : örnekleme aralığı ; ℓ : örneklem $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$; ${}_{\ell} q$: (elektriksel) yükün ℓ 'inci örneklem ile elde edilen değeri ; ${}_{\ell} \Phi$: (manyetik) akının ℓ 'inci örneklem ile elde edilen değeri ; ${}_{\ell} I$: akımın ℓ 'inci örneklem ile elde edilen değeri ; ${}_{\ell} u$: gerilimin ℓ 'inci örneklem ile elde edilen değeri şeklindedir. Bu durumda Δt süresi içinde yük örneklemelerinin değişim hızı/gradienti

$$\frac{{}_{\ell+1} q - {}_{\ell} q}{\Delta t} \quad (1)$$

şeklindedir. Benzer şekilde; öndeki eksi işaret göz ardı edilerek, akı örneklemelerinin değişim hızı/gradienti

$$\frac{{}_{\ell+1} \Phi - {}_{\ell} \Phi}{\Delta t} \quad (2)$$

şeklinde olacaktır. Bilindiği üzere devrelerde yük ve akı hesaplanmalarından daha çok akım ve gerilim büyüklükleri kullanılır. Örnek olarak yük/akı değişiminin söz konusu olduğu bir durumda, önceki örneklem (akım/gerilim) ve sonraki örneklem (akım/gerilim) değerleri söz konusu olabilir. Bu iki örneklem arasında aşağıdaki gibi ortalama değer olarak akım

$$\frac{{}_{\ell+1} q - {}_{\ell} q}{\Delta t} = \frac{{}_{\ell+1} I + {}_{\ell} I}{2} \quad (3)$$

ve gerilim

$$\frac{{}_{\ell+1} \Phi - {}_{\ell} \Phi}{\Delta t} = \frac{{}_{\ell+1} u + {}_{\ell} u}{2} \quad (4)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi de elektrik devresinin temel bileşenleri ayrı zaman durumu için incelenir. Akım ve gerilimin sürekli olarak izlenemediği ve aynı örnekleme periyodu Δt ile örneklenerek işlemin ayrı zaman duruma dönüştürülmesiyle bileşenler aşağıdaki şekilde olurlar:

Direnç R:

Bu durumdaki direnç R değeri

$$R = \frac{\ell u_R}{\ell I_R} = \frac{\ell+1 u_R}{\ell+1 I_R} \quad (5)$$

olup direnç tanımının her iki tarafına da $\pm \frac{\ell u_R}{\ell+1 I_R}$ eklenmesi,

$$\frac{\ell+1 u_R}{\ell+1 I_R} \pm \frac{\ell u_R}{\ell+1 I_R} = \frac{\ell u_R}{\ell I_R} \pm \frac{\ell u_R}{\ell+1 I_R} \quad (6)$$

ve cebirsel işlemlerle direnç için

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ell+1 u_R}{\ell+1 I_R} \pm \frac{\ell u_R}{\ell+1 I_R} &= \frac{\ell+1 u_R \pm \ell u_R}{\ell+1 I_R} \\ \frac{\ell u_R}{\ell I_R} \pm \frac{\ell u_R}{\ell+1 I_R} &= \ell u_R \left(\frac{\ell+1 I_R \pm \ell I_R}{\ell+1 I_R \ell I_R} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\ell+1 u_R \pm \ell u_R}{\ell+1 I_R} = \ell u_R \left(\frac{\ell+1 I_R \pm \ell I_R}{\ell+1 I_R \ell I_R} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$R = \frac{\ell u_R}{\ell I_R} = \frac{\ell+1 u_R \pm \ell u_R}{\ell+1 I_R \pm \ell I_R} \quad (7)$$

bulunur. Bu sonuçlardan artılı olanı, direnç bağıntısında gerilimin akı değişimi türüyle ve akımın yük değişimi türünden yazılmasıyla şu şekilde de gösterilebilir:

$$R = \frac{\frac{\ell+1 \Phi_R - \ell \Phi_R}{\Delta t}}{\frac{\ell+1 q_R - \ell q_R}{\Delta t}} = \frac{\frac{\ell+1 u_R + \ell u_R}{2}}{\frac{\ell+1 I_R + \ell I_R}{2}} = \frac{\ell+1 u_R + \ell u_R}{\ell+1 I_R + \ell I_R} \quad (8)$$

Ancak aşağıdaki diğer edilgen/pasif bileşenlerin ilgili büyüklükleri, büyüklükler arası işaretin hep eksi olmasından yola çıkarak yapılacağından direncin de aşağıdaki eksi işaretli şekli, uyum açısından daha doğrudur ve ilgili gerilimler şu şekilde olurlar:

$$R = \frac{\ell+1 u_R - \ell u_R}{\ell+1 I_R - \ell I_R} \Rightarrow \ell+1 u_R = R \ell+1 I_R ; \ell u_R = R \ell I_R \quad (9)$$

Kondansatör / Sığaç C:

Böyle bir durumdaki kondansatörün/sığaçın kapasitesi/sığaçı dirençtekine benzer işlemlerle

$$C = \frac{{}_\ell q_C}{u_C} = \frac{{}_{\ell+1} q_C \pm {}_\ell q_C}{{}_{\ell+1} u_C \pm {}_\ell u_C} \quad (10)$$

şeklinde bulunur. Yine bu bağıntının artılı biçimi, örnekleme aralığında kondansatörde/sığaçta depolanan yükün ortalamasının alınması ve gerilimin akı değişimi türünden yazılmasıyla

$$C = \frac{\frac{{}_{\ell+1} q_C + {}_\ell q_C}{2}}{\frac{{}_{\ell+1} \Phi_C - {}_\ell \Phi_C}{\Delta t}} = \frac{\frac{{}_{\ell+1} q_C + {}_\ell q_C}{2}}{\frac{{}_{\ell+1} u_C + {}_\ell u_C}{2}} = \frac{{}_{\ell+1} q_C + {}_\ell q_C}{{}_{\ell+1} u_C + {}_\ell u_C} \quad (11)$$

şeklinde de bulunabilir. Akım ve gerilim tanımları yukarıda büyüklüklerin aralarındaki işaretin eksili biçimi için yapıldığından kondansatörün/sığaçın eksi işaretli tanımından, ortalama akım için bağıntı şu şekilde bulunur:

$$C = \frac{{}_{\ell+1} q_C - {}_\ell q_C}{{}_{\ell+1} u_C - {}_\ell u_C} \Rightarrow \left. \begin{aligned} &{}_{\ell+1} q_C - {}_\ell q_C = C({}_{\ell+1} u_C - {}_\ell u_C) \\ &\frac{{}_{\ell+1} q_C - {}_\ell q_C}{\Delta t} = \frac{{}_{\ell+1} I_C + {}_\ell I_C}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{{}_{\ell+1} I_C + {}_\ell I_C}{2} = C \frac{{}_{\ell+1} u_C - {}_\ell u_C}{\Delta t} \quad (12)$$

ve görülebildiği gibi akım değeri ortalama bir değerdir, çünkü akım değerleri her örnekleme değişebilir. Dolayısıyla akımlar

$${}_{\ell+1} I_C = 2C \frac{{}_{\ell+1} u_C}{\Delta t} \quad ; \quad {}_\ell I_C = -2C \frac{{}_\ell u_C}{\Delta t} \quad (13)$$

olarak elde edilir. Kondansatör/sığaç bağıntısı üzerinden örneklemler arasındaki gerilim farkı

$$C = \frac{{}_{\ell+1} q_C - {}_\ell q_C}{{}_{\ell+1} u_C - {}_\ell u_C} \Rightarrow {}_{\ell+1} u_C - {}_\ell u_C = \frac{1}{C} ({}_{\ell+1} q_C - {}_\ell q_C) = \frac{1}{C} \left(\frac{{}_{\ell+1} I_C + {}_\ell I_C}{2} \right) \Delta t \quad (14)$$

ve dolayısıyla gerilimler

$${}_{\ell+1} u_C = \frac{1}{C} \frac{{}_{\ell+1} I_C}{2} \Delta t \quad ; \quad {}_\ell u_C = -\frac{1}{C} \frac{{}_\ell I_C}{2} \Delta t \quad (15)$$

olarak bulunur.

İndüktör / İrkişteç L:

Tanım gereği İndüktör/irkişteç, direnç ve kondansatördeki/sığaçtaki benzer işlemlerle

$$L = \frac{\ell \Phi_L}{\ell I_L} = \frac{\ell+1 \Phi_L \pm \ell \Phi_L}{\ell+1 I_L \pm \ell I_L} \Phi_L \quad (16)$$

şeklinde olacağından, bağıntının artılı olanı için yukarıda direnç ve kondansatörde/sığaçta izlenen yaklaşımın benzeri ve ortalama akıyla,

$$L = \frac{\frac{\ell+1 \Phi_L + \ell \Phi_L}{2}}{\frac{\ell+1 q_L + \ell q_L}{\Delta t}} = \frac{\frac{\ell+1 \Phi_L + \ell \Phi_L}{2}}{\frac{\ell+1 I_L + \ell I_L}{2}} = \frac{\ell+1 \Phi_L + \ell \Phi_L}{\ell+1 I_L + \ell I_L} \quad (17)$$

elde edilir. İndüktör/irkişteç gerilim açısından ele alınsın. Yukarıda kondansatör/sığaç kısmında açıklanan nedenden dolayı indüktörün/irkişteçin akılar arası eksi işaretle tanımıdan, ortalama gerilim için bağıntı, benzer şekilde şöyle bulunur:

$$L = \frac{\ell+1 \Phi_L - \ell \Phi_L}{\ell+1 I_L - \ell I_L} \Rightarrow \ell+1 \Phi_L - \ell \Phi_L = L(\ell+1 I_L - \ell I_L) \left. \begin{array}{l} \\ \frac{\ell+1 \Phi_L - \ell \Phi_L}{\Delta t} = \frac{\ell+1 u_L + \ell u_L}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\ell+1 u_L + \ell u_L}{2} = L \frac{\ell+1 I_L - \ell I_L}{\Delta t} \quad (18)$$

ve dolayısıyla gerilimler

$$\ell+1 u_L = 2L \frac{\ell+1 I_L}{\Delta t} ; \ell u_L = -2L \frac{\ell I_L}{\Delta t} \quad (19)$$

şeklinde olurlar. İndüktör/irkişteç üzerinde ayrık zaman durumu için gerilimin, kondansatördeki/sığaçtaki akım gibi ortalama bir değer olduğu görülmektedir. İndüktör/irkişteç bağıntısı üzerinden örneklemler arasındaki akım farkı

$$L = \frac{\ell+1 \Phi_L - \ell \Phi_L}{\ell+1 I_L - \ell I_L} \Rightarrow \ell+1 I_L - \ell I_L = \frac{1}{L} (\ell+1 \Phi_L - \ell \Phi_L) = \frac{1}{L} \frac{\ell+1 u_L + \ell u_L}{2} \Delta t \quad (20)$$

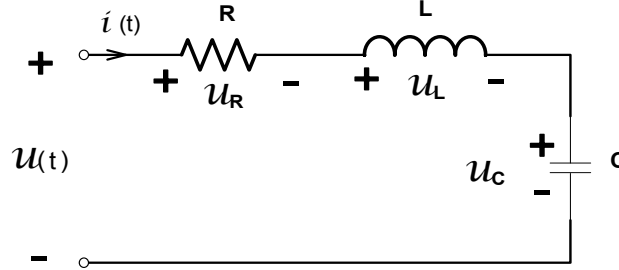
şeklinde bulunur ve buna göre de akımlar

$$\ell+1 I_L = \frac{1}{L} \frac{\ell+1 u_L}{2} \Delta t ; \ell I_L = -\frac{1}{L} \frac{\ell u_L}{2} \Delta t \quad (21)$$

şeklinde dir. Türetildiği üzere, kondansatörde/sığaçta gerilim örnekleme değerinin zamanla değişimi söz konusuysa akımın; indüktörde/irkişteçte akım örnekleme değerlerinin zamanla değişimi söz konusuysa gerilimin ortalaması alınmaktadır.

3. ÖRNEK

Şimdi de her üç pasif/edilgen bileşenleri içeren aşağıda Şekil 3.1'de görülen seri RLC devresi ayırık zaman durumu için incelenir.



Şekil 3.1

Sürekli zaman durumunda Kirchoff gerilim yasasıyla gerilimler için aşağıdaki bağıntı bulunur:

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + L \frac{di(t)}{dt} \quad (22)$$

Görüldüğü üzere bu bağıntı, $u(t) \neq 0$ için homojen olmayan bir integrodiferansiyel denklem biçimindedir. Aynı devre, ayırık zamanlı durum için incelenecek olursa; akım

$$I = I_R = I_C = I_L \quad (23)$$

şeklinde olacağından Kirchoff gerilim yasasıyla şöyle bir bağıntı elde edilir:

$$\begin{aligned} u_{\ell+1} - u_{\ell} &= (u_{R, \ell+1} - u_{R, \ell}) + (u_{C, \ell+1} - u_{C, \ell}) + (u_{L, \ell+1} - u_{L, \ell}) \\ &= R(I_{\ell+1} - I_{\ell}) + \frac{1}{C} \left(\frac{I_{\ell+1} + I_{\ell}}{2} \right) \Delta t + \frac{2L}{\Delta t} (I_{\ell+1} + I_{\ell}) \end{aligned} \quad (24)$$

Sürekli ve ayırık durumlar arasındaki benzerlikler görülmekle birlikte farklılıklar da çok açıktır. Sürekli durum için bulunan denklem bir integrodiferansiyel denklem olurken ayırık durum için elde edilen denklem bir fark denklemdir. İntegrodiferansiyel denklemin inhomojen durumda $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ şeklinde bir dürtüyle uyarıldığı varsayılırsa, akım için çözüm

$$i(t) = \frac{\omega C U_m}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + \omega^4 C^2 L^2 - 2\omega^2 CL + 1}} \cos(\omega t - \varphi) \quad (25)$$

şeklinde olur. Sonlu farklar denklemini ise, birinci dereceden sabit/değişmez katsayılı inhomojen bir denklem olup cebirsel işlemlerle

$$({}_{\ell+1}u - {}_{\ell}u)\Delta t = RC({}_{\ell+1}I - {}_{\ell}I)\Delta t + \left(\frac{{}_{\ell+1}I + {}_{\ell}I}{2}\right)(\Delta t)^2 + 2LC({}_{\ell+1}I + {}_{\ell}I)\Delta t \quad (26)$$

şeklini alır. Δt bir katsayı olduğundan, ayrık durumda çözüm kolaylığı açısından $\Delta t = 1$ alınabilir. Dolayısıyla fark denklemi

$${}_{\ell+1}u - {}_{\ell}u = RC({}_{\ell+1}I - {}_{\ell}I) + \left(\frac{{}_{\ell+1}I + {}_{\ell}I}{2}\right) + 2LC({}_{\ell+1}I + {}_{\ell}I) \quad (27)$$

şekline girer ve akımlar için

$$\begin{aligned} {}_{\ell+1}I &= \left(\frac{2}{2RC + 4LC + 1}\right) {}_{\ell+1}u \\ {}_{\ell}I &= \left(\frac{2}{2RC - 4LC - 1}\right) {}_{\ell}u \end{aligned} \quad (28)$$

bulunur. Buna göre ortalama akım şöyledir:

$$\frac{{}_{\ell+1}I + {}_{\ell}I}{2} = \left(\frac{1}{2RC + 4LC + 1}\right) {}_{\ell+1}u + \left(\frac{1}{2RC - 4LC - 1}\right) {}_{\ell}u \quad (29)$$

Gerilim şeklindeki dürtünün yine sinüzoidal, yani

$${}_{\ell}u = U_m \cos(\omega \ell \Delta t) \rightarrow {}_{\ell}u = U_m \cos(\omega \ell) \quad (30)$$

olmasıyla ortalama akım için

$$\frac{{}_{\ell+1}I + {}_{\ell}I}{2} = \left(\frac{U_m}{2RC + 4LC + 1}\right) \cos[\omega(\ell + 1)] + \left(\frac{U_m}{2RC - 4LC - 1}\right) \cos(\omega \ell) \quad (31)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuçla analitik sonuç karşılaştırılırsa, birebir tutmanın olmamasına rağmen benzerlik de açıktır.

4. SONUÇLAR

Bu araştırmayla ayrık zaman sinyalleriyle beslenen klasik bir devrenin tepkisini hesaplamak amaçlı bir yöntem teklif edilmiştir. Konu yeni ve bilindiği kadarıyla literatürde olmadığından, genişletilmesi ve yeni uygulama alanlarının araştırılması gerekmektedir. Ancak görülebildiği üzere; bilgisayar ağırlıklı ve nümerik Devre Analizi durumları için uygun görünmektedir. Özellikle doğrusal olmayan, parça parça doğrusallaştırılabilen devreler için uygun olabilir.

KAYNAKLAR

[1] Chua L. *Linear and Nonlinear Circuits*, McGraw-Hill, New York, 1987.

- [2] Jordan DW, Smith P. *Mathematical Techniques*, 2nd ed., Oxford: Oxford University Press, 1997.
- [3] Spiegel MR. *Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Difference Equations*. New York: McGraw-Hill, 1982.
- [4] MacKeown PK, Newman DJ. *Computational Techniques in Physics*, Bristol: IOP Publishing Limited, 1987.
- [5] Greenspan, D. *Computer-Oriented Mathematical Physics*, Oxford: Pergamon Press, 1982.
- [6] Civelek, C., Süsse, R. "Diskrete Behandlung von Energie- und Dissipationsfunktion bei zeitdiskreten Prozessen", *Internationales Wissenschaftliches Kolloquium Technische Universität Ilmenau*, 48, s. 22-25, 2003.

ÖZGEÇMİŞ / CV

Cem CİVELEK, Yard. Doç. Dr.

Elektronik ve İnfomasyon Mühendisliği dalında lisans-yüksek lisans birleşik eğitimini 1988 sonunda Bremen Üniversitesi, Almanya'da tamamladı. Türkiye'de kısa süre bir Alman sismik şirketi için 3D sismik veri topladı. Daha sonra İzmir'de bir bilgisayar şirketinde teknik müdür olarak çalıştı. 1990 yılı bahar döneminde Dokuz Eylül Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği adına ders verdi. 1991 sonunda bölümde Elektromanyetik Teori ve Mikrodalga Tekniği ana bilim dalında öğretim görevlisi olarak atandı. 1996 yılı ortalarında Ilmenau Teknik Üniversitesi/Almanya'da Teorik Elektroteknik dalında doktora eğitimine başladı, 2001 başlarında tamamladı ve bölümünde öğretim görevlisi Dr. olarak çalışmaya devam etti. Mayıs 2012 tarihinden beri Ege üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği, Devreler ve Sistemler konularında Yard. Doç. Dr. olarak çalışmaktadır. Temel çalışma alanları; Enerji fonksiyonlarıyla fiziksel sistemlerin matematik modellenmesi ve Sinyal ve Spektrum Analizi üzerinedir..

He got his Dipl.-Ing degree in Electrical and Information Engineering in the University of Bremen/Germany at the end of 1988. In Turkey, he worked in a german seismic company for 3D data acquisition for a short while. Later, he worked for a computer system company as a technical manager. In the spring semester 1990, he started to hold lectures in the name of Dokuz Eylül University, Electrical & Electronics Engineering. At the end of 1991, he was attended as an instructor for the chair of Electromagnetic Theory and Microwave Techniques at the department. In the middle of 1996, he started with his Ph.D studies in the chair of Theoretical Foundations of Electrical Engineering, Technical University of Ilmenau/Germany, completed his thesis at the beginning of 2001 and continued to work as an instructor Dr. in his department. Since May 2012, he works as an assistant. Prof. Dr. in Ege University, Electrical & Electronics Engineering Department, chair of Circuits & Systems. His major areas of interests are Mathematical Modelling of physical Systems using Energy Functions, Signal and Spectrum Analysis.