DEÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
FEN VE MÜHENDİSLİK DERGİSİ
Cilt: 8 Sayı: 3 s. 19-25 Ekim 2006

ÇEŞİTLİ DÖNÜŞÜM YÖNTEMLERİNİN BAŞARIM ÖLÇÜTLERİ YÖNÜNDEN KARŞILAŞTIRILMASI

(PERFORMANS CRITERIONS COMPARISON OF THE SHOT TIME FOURIER TRANSFORM WITH DIFFERENT ORTHOGONAL TRANSFORMS)

Gülden KÖKTÜRK*

ÖZET/*ABSTRACT*

Bu çalışmada, kısa zaman Fourier dönüşüm (KZFD) yönteminin bozunum hızı ve ortalama karesel hata başarımı incelenmiştir. Sonuçların değerlendirilebilmesi için farklı dönüşüm yöntemlerine bu kriterler uygulanmıştır. Başarım kriterleri değerlendirilirken sayısal örnekler; hızlı Fourier dönüşümü, ayrık kosinüs dönüşümü (AKD) ve kısa zaman Fourier dönüşümü için gerçekleştirilmiştir.

This paper includes mean square error performance and the rate distortion of the short time Fourier transform. Investigation of criteria applies the different transformations to have constructed its results. Numerical examples of performance criteria represented for the fast Fourier transform, the dscrete cosine transform and the short time Fourier transform.

ANAHTAR KELİMELER/*KEYWORDS*

Başarım kriteri, Kısa zaman Fourier dönüşümü, Ortalama karesel hata, Bozunum oranı
Performance criteria, Short time Fourier transform, Mean square error performance, Rate distortion

* DEU Mühendislik Fak., Elektrik ve Elektronik Müh. Böl., Buca, İZMİR

1. GİRİŞ

Standart Fourier dönüşümü, bazı sınırlamalara sahip olan durağan olmayan sinyallere uygulandığında klasik zamanla değişen sinyal özelliklerini verir. Durağan olmayan sinyallerde, hem zamanda hem de sıklıkta bir değişim söz konusu olmasına rağmen Fourier dönüşümünde tüm sinyal, zamanda sabittir. KZFD, sinyalin zamana bağımlı izgel özelliklerini tanımlamaya yardımcı olabilecek bir dağılım olarak düşünülebilir (Kadembe ve Boudreaux, 1992).

En az öz nitelik çıkarımı ve aritmetik işlem azlığı ile gerçelleme, dikey dönüşümlerle yapılır. Bu bağlamda, Walsh-Hadamard dönüşümü, ayrık Fourier dönüşümü (AFD), Harr dönüşümü ve sessiz (silent) dönüşüm bir çok uygulamada kullanılmıştır (Ahmed vd., 1974). Bu dikey dönüşümler genelde başarım kriterlerine göre karşılaştırılır. Kullanılan kriterlerin çoğu varyans dağılımı, ses sinyalleri gibi yarı durağan sinyaller için temel ortalama gibi yöntemlerdir (Allen ve Rabiner, 1977; Kumar, 2005). Standart Fourier dönüşümü ve KZFD'ne dayanan bir çok araştırma bir çok uygulamada çok elverişli ve pratik olmaktadır (Archer ve Leen, 2000; David ve Dirk, 2002).

Dikey dönüşümler sinyal işleme uygulamalarında yıllardır kullanılmaktadır. Bu çalışmada, kısa zaman Fourier dönüşümü karesel hata başarımı ve bozulma oranı başarım ölçütleri yönünden karşılaştırılmış ve sonuçlar irdelenmiştir.

2. KISA ZAMAN FOURİER DÖNÜŞÜMÜ (KZFD)

Bir işaretin KZFD gösterimi, zaman ve sıklıkta işaretin yapısıyla ilişkilidir. KZFD ile işaret, bileşenlerine ayrılır ve her bileşenin gücü elde edilir. Fakat, KZFD yönteminde tüm sıklık karakteristiği bulunamaz. Durağan ve yarı durağan işaretler için KZFD yönteminde sıklık tüm zaman eksenine homojen olarak dağılmıştır. Çünkü durağan olmayan işaretler bir döneme sahip değildir. Böyle işaretler ani sıklık ve sonlu enerji içerirler.

Farzedelimki, tüm n'de tanımlı bir x(t) giriş işareti olsun. Bu işaret için KZFD

$$x_n(e^{jw_s}) = \sum_k w(n-k)\, e^{-jw_s k} \tag{1}$$

şeklinde tanımlanır.

KZFD yönteminde, istenilen zaman ve sıklık çözünürlüğü için bazı önemli kurallar vardır. Temel olarak en önemli etki, pencere seçimidir. Pencere fonksiyonu, istenen sıklık ve zaman çözünürlüğünü verebilecek şekilde seçilmelidir. En çok kullanılan pencere fonksiyoları; Gaussian pencere, Hamming pencere ve Hanning pencere fonksiyonlarıdır.

KZFD'nün kullanımı, Vocoder ve ses sinyali gibi yarı durağan sinyallerin gösterimi için uygundur. Bunun yanında, KZFD'nün Fourier dönüşümünden farklı özelliklerinden faydalanarak özellikle durağan olmayan işaretlerinin gösteriminde kullanışlı olduğu anlaşılmıştır.

3. MATRİS GÖSTERİMİ

Bilindiği gibi bir dikey dönüşümün matris tanımı

$$q = Ax \tag{2}$$

şeklindedir. Burada; θ, katsayı vektörü ve x, giriş işaret vektörüdür. Dönüşüm matrisi A, dönüşümün NxN'lik taban matrisini verir. Sonuç olarak, θ vektörü N boyutlu bir vektördür. Eğer A matrisi birim dik matris ise A, bir terse sahiptir (Akansu, 1987). Bu da

$$A^{-1} = A^{T} \tag{3}$$

ve

$$A^{T} A = A A^{T} = I \tag{4}$$

özellikleri ile verilir. Herhangi bir dönüşüm matrisinin açık şekli (Ahmed vd., 1974)

$$q(r) = \sum_{k} A(r,k) * x(k) \quad r,k = 1,2,...,N \tag{5}$$

formundadır. Farzedelimki giriş işareti sıfır ortalamalı bir Gaussian süreç olsun. Tanımdan dolayı

$$E\{x(r)\} = 0 \tag{6}$$

dir. Giriş işaretinin özilinti vektörü

$$R_{xx}(k) = E\{x(k+n)x(n)\} \tag{7}$$

ile tanımlanır. Eşitlik 7'de, matris katsayıları, özilinti fonksiyonunun özelliklerinden yararlanılarak tekrar düzenlendiğinde varyansın matris şekli

$$s^{2} = WR \tag{8}$$

vektörü ve W'da dönüşümünün özilinti ağırlıklı vektörüdür.

4. ALGORİTMA

Bu çalışmada; KZFD dönüşümünde pencere fonksiyonu olarak Hamming pencere fonksiyonu kullanılmıştır. Tipik bir Hamming pencere fonksiyonu

$$w(n) = \begin{cases} 0{,}54 - 0{,}46\cos(2pn/N) & ,0 \le \mathrm{n} \le \mathrm{N}-1 \\ 0 & \mathrm{n} > 0 \text{ ve } \mathrm{n} > \mathrm{N}-1 \end{cases} \tag{9}$$

şeklindedir. KZFD için tüm katsayılar 2M nokta kullanılarak hesaplanır. Hamming pencere fonksiyonu, kosinüs terimleri içerdiğinden dolayı ayrık kosinüs dönüşümü gibi pozitif bir dönüşümdür. KZFD tersi alınabilir özelliğe sahip olduğu için kolayca tersi bulunur.

5. BAŞARIM KRİTERLERİ

Farklı dikey dönüşümleri karşılaştırmada, bazı kriterler kullanılmaktadır. Bir kodlama sistemi için başarım kriteri sabit bozunum varken en az bilgi hızını belirlemektedir. Özbağlanımlı (1) kaynak modeli için bazı başarım kriterleri vardır. Bu çalışmada karşılaştırma için ortalama karesel hata ve bozunum hızı kriterleri kullanılmıştır. Tüm içerik ve sonuçlar bir sonraki bölümde anlatılmıştır.

5.1. Karesel Ortalama Hata Kriteri

Giriş işaret vektörü x'e bir gürültü vektörü N ekleyerek bir y vektörü elde edilsin. Yani

$$y = x + N \tag{10}$$

ifadesi bulunsun. Burada x vektörüne eklenen gürültü vektörü N, sıfır ortalamalı girişle ilişkisiz beyaz gürültüdür. Bu y vektörüne bir dönüşüm uygulandığında, dikey dönüşümün taban kümeleri, Toeplitz matrisinin öz vektörlerine iyi bir yaklaşım sağlamaktadır. Bu da

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \ldots & \rho^{M-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^{M-2} \\ & \ldots\ldots & & \\ \rho^{M-1} & \rho^{M-2} & & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

şeklinde gösterilir. ρ bir sabit ve $0 < \rho < 1$ arasındadır. Tüm çalışmada ρ; 0,9 olarak alınmıştır. Toeplitz matrisine bir örnek verilmek istenirse, M=8 için ayrık kosinüs dönüşümü

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\frac{(2m+1)kp}{16}; k, m = 1,2,\ldots,7 \right\} \tag{12}$$

şeklinde alınır (Şekil 1). Eğer kestirilmiş karesel ortalama hata e_Q şeklinde alınırsa

$$e_Q = 1 - \frac{1}{M} \sum_r \frac{y_x^2(r,r)}{y_x(r,r) + y_N(r,r)} \tag{13}$$

ifadesinden bulunur. Burada Ψ_X ve Ψ_N sırasıyla, giriş işareti ve gürültünün dönüşüm bölgesi ortak varyans matrisleridir. Şekil 1'de farklı dönüşümler için karesel ortalama hata başarımı verilmiştir. Şekil 1'den de görüldüğü gibi, hızlı Fourier dönüşümü ve ayrık kosinüs dönüşümünün karesel ortalama hata başarımı yaklaşık olarak benzerdir. Fakat, KZFD için bu başarım M artıkça oldukça kötüleşir. Karesel ortalama hata, hızlı Fourier dönüşümü va ayrık kosinüs dönüşümünde, dönüşüm boyutu büyükken en iyi değerine sahiptir. KZFD dönüşümünde ise tersine, küçük M değerlerinde karesel ortalama hata, en iyi değerine sahiptir.

5.2. Bozunum Hızı Kriteri

Farzedelimki, ayrık zaman sıfır ortalamalı Gaussian kaynağının, x_i'nin x_j ile ilintisine sahip çıkış dizisi $\{\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\}$ aşağıdaki gibi olsun (Viterbi ve Omura, 1973).

$$y_{ij} = y_{|i-j|} = E\{x_i x_j\} \tag{14}$$

şeklindedir. Bu ilişki sadece $|i-j|$ durumunda geçerlidir. Bu nedenle, ergodiktir. $v \in R$ için ortak yoğunluk fonksiyonunun değerleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Q_S(v) = \frac{1}{(2p)^{N/2} |y|^{1/2}} e^{-(1/2) v \Psi^{-1} v^T} \tag{15}$$

Burada Ψ, giriş işaretinin ortak değişinti matrisidir ve Ψ pozitif olduğunda tersi alınabilir, Ψ yani Ψ^{-1},olduğundan Ψ'nin pozitif durumunda hesaplanır. Aşağıda, ortak değişinti matrisi Φ'nin birimdik özvektörlerini içeren birimcil matrisi, U, verilmiştir.

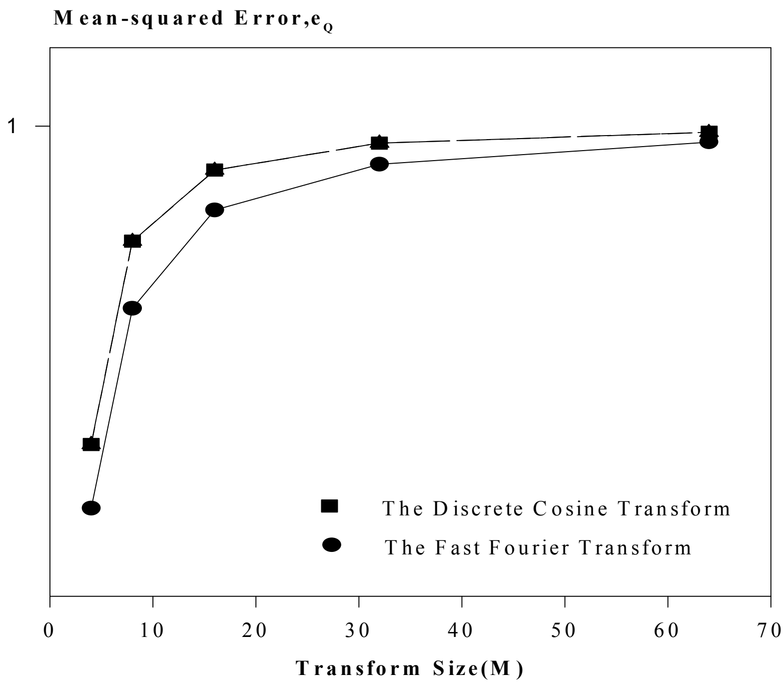
$$S = \begin{bmatrix} l_1 & . & . & . & 0 \\ . & l_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & l_M \end{bmatrix} \tag{16}$$

Burada

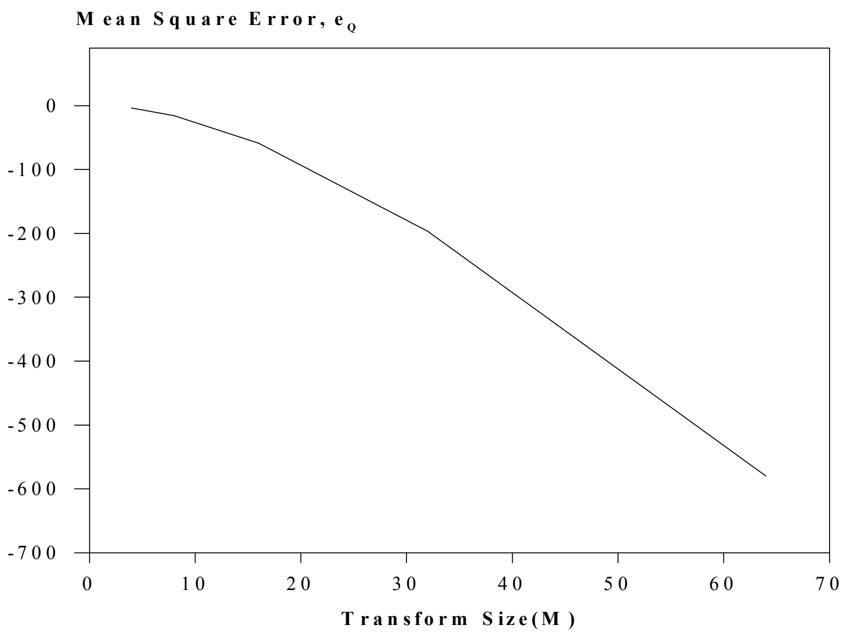
$$\Psi = USU^T \tag{17}$$

$$\Psi^{-1} = U^{-1}S^{-1}U^T$$

(a)



(b)



Şekil 1. Karesel ortalama hata başarımı, (a) AKD ve AFD'ü için (b)KSFD'ü için

Olup, dönüşüm kaynakları ve ortak değişinti matrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonunu, S, kullanarak bozunum hızı ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R(A,D) = \min_{(D_1,\ldots,D_M)\in D^*} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \min R_i(D_i) \tag{19}$$

$$\min R_i(D_i) = \max\left\{0, \frac{1}{2}\log\frac{s_i}{D_i}\right\} \tag{20}$$

Burada $R_i(D_i)$, is bozunum hızı fonksiyonunun i'ci elemanıdır ve $R_L(D)$ ile ilintili bozunum fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilir.

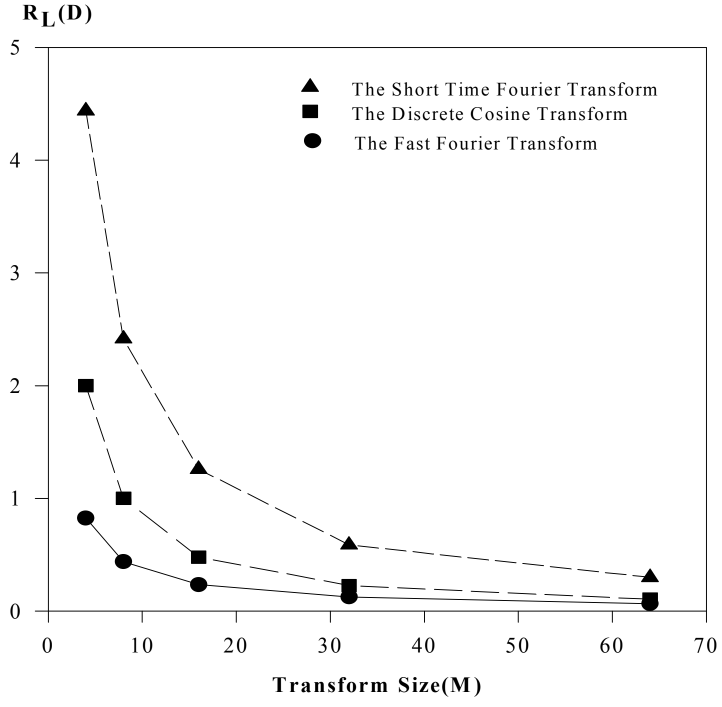
$$D_i = \min(q, s_i^2) \tag{21}$$

Eşitlik 19 ve Eşitlik 20'de, en küçültme sorunu verilmiştir. Bu sorun Kolmogorov tarafından çözümlenmiştir ve bunu takiben bozunum hızı fonksiyonu elde edilmiştir (Pearl vd., 1972).

$$R(A,D) = \frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{M} \max\left\{0, \log\frac{s_i}{q}\right\} \tag{22}$$

$$D = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \min(q, s_i) \tag{23}$$

Bu çalışmada farklı dönüşümler için bozunum hızı Şekil 2'de verilmiştir. Burada, dönüşüm boyutuna karşı bozunum hızı fonksiyonu gösterilmişitir ve, karşılaştırma için hızlı Fourier dönüşümü, AKD ve KZFD kullanılmıştır.



Şekil 2. KZFD, hızlı Fourier dönüşümü ve AKD için bozunum hızı başarımı

Şekil 3 incelendiğinde, küçük dönüşüm boyutlarında bozunum hızının KZFD ve diğer dikgen dönüşümler için yüksek başarımda olduğu görülmektedir. Bunun yanında, bu oran, dikgen dönüşümlere göre KZFD'de göreceli daha iyidir. Başka bir deyişle, KZFD'ün kullanımı, bozunum hızı yönünden etkinliği artırmaktadır. Dönüşüm boyutu küçük olduğunda, KZFD yüksek kaliteye sahiptir. Yüksek dönüşüm boyutunda ise hızlı Fourier dönüşümü ve AKD yaklaşık aynıdır ve KZFD ise diğer dikgen dönüşümlerle yaklaşık aynıdır.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmanın amacı, KZFD ile çeşitli dikgen dönüşümlerin karşılaştırılmasıdır. Bu nedenle, başarım kriterleri, KZFD ve farklı dikgen dönüşümler için karşılaştırılmıştır. Sonuçlardan anlaşılacağı gibi, KZFD'ün kare ortalama hata değeri, diğer dönüşümlere göre daha kötüdür. Buna karşın çözünürlüğü, diğer dönüşümlere göre çok daha iyidir. Sonuçta KZFD, küçük dönüşüm boyutlarında diğer dönüşümlere göre daha nitelikli yani kalitelidir. Bunun yanında, sonuçlardan da anlaşılacağı gibi başarım kriterleri yönünde dönüşümler karşılaştırıldığında durağan olmayan sinyaller için KZFD'ün kullanımı daha iyi sonuç vermektedir.

KAYNAKLAR

Ahmed N., Natarajan T., and Rao K.R. (1974): "Discrete Cosine Transform", IEEE Trans. on Computers, pp. 90-93.

Akansu A.N. (1987): "The Modified Hermite Transformation, A New Transform for Statistical Adaptive Transform Coding of Speech Signals", PhD. Thesis, June.

Akansu A.N., Haddad R.A. (1990): "On Asymmetrical Performance of Discrete Cosine Transform", IEEE Trans. on ASSP, vol. 38, no. 1, January.

Allen J.B., Rabiner L.R. (1977): "A Unified Approach to Short Time Fourier Analysis and Synthesis", Proc. of IEEE, vol. 65, no. 11, November.

Archer C., Leen T.K. (2000): "Adaptive Transform Coding as Constrained Vector Quantization", Neural Network in Signal Processing X, IEEE Press.

David M., Dirk S. (2002): "Backword Adaptive Transform Coding of Vectorial Signals: A Comparison between Unitary and Causal Approaches", Eurosipco.

Kadembe S., Boudreaux-B.G.F. (1992): "A Comparison of the Existence of Cross Terms in the Wigner Distributionand the Suare Magnitude of the Wavelet Transform and the Short Time Fourier Transform", IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 40, no. 10, October.

Kumar A. (2005): "Interpretability and Mean Square Error Performance of Fuzzy Inference Systems for Data Mining", Inter. Jour. of Intelligent Systems in Accounting and Finance Manangement, vol. 13, no. 4.

Pearl J., Andrews H.C., Pratt W.K. (1972): "Performance Measures for Transform Data Coding", IEEE Trans. on Commun., June.

Viterbi A.J., Omura J.K. (1979): "Principles of Digital Communication and Coding", Mc. Graw-Hill Comp.