DEÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
FEN VE MÜHENDİSLİK DERGİSİ
Cilt: 8 Sayı: 2 s. 107-110 Mayıs 2006

YARI POZİTİF TANIMLI MATRİSLERİN İZ EŞİTSİZLİKLERİ

(TRACE INEQUALITIES OF POSITIVE SEMIDEFINITE MATRICES)

Mustafa ÖZEL*, Hamza BULUT*, Süleyman ŞAFAK*, Yılmaz ÇEVEN**

ÖZET / ABSTRACT

Bu çalışmada, bazı özel matris çarpımları ile ifade edilen yarı pozitif tanımlı çarpım matrislerinin izleri arasındaki eşitsizlikler incelenmiştir. Xin-Min Yang'ın makalesindeki eşitsizliklere bağlı olarak Kronecker çarpım ve toplam matrislerinin izleri arasındaki eşitsizlikler elde edilmiştir.

In this paper, the trace inequalities involving special products of the positive semidefinite matrices are investigated. The trace inequalities between the Kronecker product and Kronecker sum of two matrices is obtained as in the short note Yang's inequalities.

ANAHTAR KELİMELER / *KEYWORDS*

Kronecker çarpım, Kronecker toplam, Yarı pozitif tanımlı matrisler
Kronecker product, Kronecker sum, Positive semidefinite matrices

* Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İZMİR.
** Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Fak., Matematik Bölümü, SİVAS

1. GİRİŞ

İlk olarak R.Bellman tarafından ele alınan pozitif tanımlı matrislerdeki eşitsizlikler, Yang'ın iki matrisin çarpımı ve toplamının izi üzerine yaptığı çalışma ile bu alanda yapılacak birçok yeni çalışmanın ortaya çıkmasına olanak sağlamıştır (Yang, 1988; Brewer, 1978; Yang, 1995). Bu çalışmada, yarı pozitif tanımlı matrisler için Xin-MinYang'ın verdiği sonuçlardan yaralanarak iki yarı pozitif tanımlı matrisin Kronecker çarpım ve Kronecker toplamlarının izleri arasındaki eşitsizliği içeren bir teoremin kanıtı yapılacaktır (Yang, 1995).

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde ilgili teoremlerin kanıtının yapılmasına olanak sağlayan temel tanım ve teoremler verilecektir (Brewer, 1978; Rao ve Mitra, 1971; Yang, 1995).

$A=[a_{ij}]$, mxn ve $B=[b_{ij}]$, pxq matris olsun. $mpxnq$

$$A\otimes B=[Ab_{ij}] \tag{1}$$

matrisine A ve B nin *Kronecker çarpımı* denir. $mnxmn$

$$A\oplus B=A\otimes I_n + I_m \otimes B \tag{2}$$

matrisine de A ve B nin *Kronecker toplamı* denir. Burada, A ve B sırasıyla mxm ve nxn matrislerdir.

Teorem 2.1. A mxm ve B nxn matrisler ise

$$\mathrm{tr}(A\otimes B) = \mathrm{tr}A\ \mathrm{tr}B \tag{3}$$

dir.

Teorem 2.2. A yarı pozitif tanımlı bir matris ise

$$\mathrm{tr}(A^2) \leq (\mathrm{tr}\ A)^2 \tag{4}$$

dir.

Teorem 2.3. A ve B yarı pozitif tanımlı mxm matrisler ise

$$2\ \mathrm{tr}(AB) \leq \mathrm{tr}(A^2) + \mathrm{tr}\ (B^2) \tag{5}$$

dir.

3. YARI POZİTİF TANIMLI MATRİSLERDE BİR İZ EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölümde Xin-Min Yang'ın teoremini esas alan Kronecker çarpım ve Kronecker toplamdaki yarı pozitif tanımlı matrislerin izleri ile ilgili bir teoremin kanıtı verilecektir (Yang,1995).

Teorem 3.1. A ve B yarı pozitif tanımlı mxm matrisler ise

(i) $\mathrm{tr}(A\otimes B) \geq 0$ ve

(ii) $\sqrt{\mathrm{tr}(A\otimes B)} \leq \mathrm{tr}(A\oplus B)$

dir.

Kanıt. A ve B yarı pozitif tanımlı matrisler olduğundan trA $\geq$ 0 ve trB $\geq$ 0 olacaktır. Dolayısıyla trA trB = tr(A $\otimes$ B) $\geq$ 0 elde edilir.

Teoremin ikinci kısmı için A $\neq$ 0 ve B $\neq$ 0 ise paydaları sıfırdan farklı olmak üzere,

$C = \frac{A}{trA}$ ve $D = \frac{B}{trB}$ olsun. Teorem 3'den

$$2tr\left(\frac{A}{trA}\frac{B}{trB}\right) \leq tr\left(\frac{A}{trA}\right)^2 + tr\left(\frac{B}{trB}\right)^2$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ yanı düzenlenir ve Teorem 2 uygulanırsa

$$2tr\left(\frac{A}{trA}\frac{B}{trB}\right) \leq \frac{trA^2}{(trA)^2} + \frac{trB^2}{(trB)^2}$$

$$2tr\left(\frac{A}{trA}\frac{B}{trB}\right) \leq \frac{trA^2}{(trA)^2} + \frac{trB^2}{(trB)^2} \leq \frac{(trA)^2}{(trA)^2} + \frac{(trB)^2}{(trB)^2} = 2$$

$$tr(AB) \leq trA\ trB \tag{6}$$

bulunur. Ayrıca

$$(trA + trB)^2 - 4trA\ trB = (trA - trB)^2 \geq 0$$

ile Eşitsizlik 6'dan

$$tr(AB) \leq trA\ trB \leq \left(\frac{trA + trB}{2}\right)^2 \tag{7}$$

elde edilir. Eşitlik 2'deki matrisler nxn seçilirse

$$tr(A \oplus B) = n(trA + trB) \tag{8}$$

yazılır. Eşitlik 8 ve Eşitlik 6 birleştirilirse

$$tr(AB) \leq trA\ trB \leq \left(\frac{tr(A \oplus B)}{2n}\right)^2 \tag{9}$$

$$\sqrt{tr(AB)} \leq \sqrt{tr(A \otimes B)} \leq tr(A \oplus B) \tag{10}$$

elde edilir ve kanıt tamamlanır.

KAYNAKLAR

Brewer J.M. (1978): “Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory”, IEEE Transaction on Circuits and Systems, Vol. 25, no. 9, 772-781.

Rao S.S., Mitra S.K. (1971): “Generalized Inverse of Matrices and its Applications”, J.Wiley, New York.

Yang X.M. (1995): “A Generalization of a Matrix Trace Inequality”, J. Math. Anal. Appl., 189, 897-900.

Yang Y. (1988): “A Matrix Trace Inequality”, J. Math. Anal. Appl., 133, 573-574.