DEÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
FEN VE MÜHENDİSLİK DERGİSİ
Cilt: 7 Sayı: 3 s. 55-68 Ekim 2005

CEBİRSEL KATSAYILI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SPLİNE FONKSİYONU İLE ÇÖZÜMÜ

(*SOLUTION OF DIFFERENSIYEL EQUATIONS WITH ALGEBRAIC COEFFICIENTS BY SPLINE FUNCTIONS*)

Seval ÇATAL*

ÖZET/*ABSTRACT*

Genel olarak, cebirsel katsayılı homojen veya homojen olmayan adi diferansiyel denklemlerin kapalı çözümleri için geliştirilmiş genel bir çözüm yöntemi her zaman bulunamamaktadır. Bu tip adi diferansiyel denklemlerin genel çözümleri kapalı olarak elde edilemediğinde başlangıç veya sınır koşulları altındaki çözümleri sayısal yöntemler kullanılarak bulunabilir. Problemin sınır koşulları altındaki sayısal çözümlerini veren bu yöntemlere Shooting, sonlu farklar, Rayleigh-Ritz yöntemlerini örnek olarak verebiliriz. Bu çalışmada bu yöntemlerin dışında Spline fonksiyonu yaklaşımı ile sınır değer problemlerinin çözümü üzerinde durulmuş, ikinci mertebeden diferansiyel denklemin en genel hali için yöntem uygulanmış ve uygulanan yöntem örnekler ile desteklenmiştir.

In general, a general solution method developed for closed solutions of homogeneous or non-homogeneous ordinary differential equations with algebraic coefficients do not always exist. The solutions under initial and boundary conditions of these kind of ordinary differential equations can be made by numerical methods when their general solutions cannot be obtained in closed forms. Shooting, finite differences, and Rayleigh-Ritz methods are examples for these methods that give numerical solutions under boundary conditions of the problem. In this study, solution of boundary value problems by Spline function approach, different from those methods, is considered; the methods applied for general solution of second order differential equation and the applied method is supported by examples.

ANAHTAR KELİMELER/*KEYWORDS*

Adi diferansiyel denklemler, Sınır değer problemi, Spline fonksiyonları
Ordinary differential equations, Boundary value problems, Spline functions

*DEÜ, Mühendislik Fak., İnşaat Müh. Bölümü, Tınaztepe Yerleşkesi, 35160, Buca, İZMİR.

1.GİRİŞ

Yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin içinde özellikle ikinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklemlerin, gerek fizikte, gerekse elektrik, makine gibi mühendislik dallarında pek çok ve önemli uygulama alanı vardır. Bu tip diferansiyel denklemlerin her zaman analitik çözümlerini bulmak kolay olmayabilir. Bu durumda sayısal çözüm yöntemlerine başvurulur. Bu yöntemlere başlangıç değer problemleri için Taylor serisini, Euler yöntemini, Runge-Kutta yöntemlerini, Milne yöntemini; sınır değer problemleri için Shooting yöntemini, sonlu farklar yöntemini, Rayleigh-Ritz yöntemini verebiliriz (Çatal, 2000; Çatal, 2001). Sınır değer probleminin çözümünde kullanılan Shooting yönteminde problem başlangıç değer problemine dönüştürülerek çözümlenirken, sonlu farklar yönteminde türevlerin merkezi farklar cinsinden açılımından yararlanılarak elde edilen indis denkleminin eşit aralıklar için oluşan doğrusal denklem takımının çözümü ile elde edilirken, Rayleigh-Ritz yönteminde basit temel fonksiyonların sonlu sayıda doğrusal derlemesi ile yaklaşık çözümleri bulunur (Gerald ve Wheatley, 1989). Bu çalışmada, daha önce ifade edilen yöntemlerin dışında Spline fonksiyonları yardımı ile sınır değer probleminin çözümü üzerinde durulacaktır. Bu konuda; Sallam ve El-Hawaray Spline fonksiyonlarının birinci mertebeden diferansiyel denklemlere uygunluğunun stabilitesini ve yakınsaklığını incelemişlerdir (Salam ve El-Hawaray, 1983; Salam ve El-Hawaray, 1984). Jain ve Aziz, birinci mertebeden polinom ve trigonometrik spline fonksiyonlarının adi ve kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümleri üzerinde tartışmışlardır (Jain ve Aziz, 1981). Papamichael ve Worsey, dördüncü mertebeden doğrusal diferansiyel denklemleri içeren iki noktalı sınır değer problemlerinin sayısal çözümü için Spline yöntemini tanımlamış, 4.üncü mertebeden sonlu farklarla ilişkisi olduğunu göstermişlerdir (Papamichael ve Worsay, 1981). Raynor, iyonlar için tanımlı Thomas-Fermi Modeline spline yöntemini uygulamıştır (Raynor, 1982). Kadalbajoo ve Raman, sonsuz aralık üzerinde tanımlı sınır değer problemini asimptotik sınır koşulları altında sonlu aralığa indirgeyerek spline yöntemini iki noktalı sınır değer problemine uygulamışlardır (Kadalbajoo ve Raman, 1986). Sallam ve Hussein, ikinci mertebeden başlangıç değer problemine spline fonksiyonlarına uygulayarak stabilitesini vurgulamışlardır (Salam ve Hussein, 1984). Jain ve Aziz, diffizyon denkleminin nümerik çözümünde spline fonksiyonlarından yararlanmışlardır (Jain ve Aziz, 1983). Desai, non-lineer analizde, Wang ve Hsu, takviyeli beton kolonlarının non-lineer analizinde Spline fonksiyonlarından yararlanmışlardır (Desai, 1971; Wang ve Hsu, 1998). Behforooz Spline fonksiyonlarının yakınsaklık mertebelerinin üzerinde çalışmışlardır (Behforooz, 1993). Bundan sonraki bölümde önce Spline fonksiyonları tanımına daha sonra diferansiyel denklemlere uygulanmasına yer verilecektir.

2. SPLİNE FONKSİYONLARI

Kübik spline interpolasyonu: $(x_k,\ y_k)$ $(k = 0(1)N)$ noktaları verildiğinde bu noktalardan geçen eğriyi bulma işlemidir. $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N$ bağıntısı ile tanımlı $(N + 1)$ düğüm noktasına sahip $S(x)$ Spline fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$S(x) = S_k(x)\ x\in[x_k, x_{k+1}] = S_{k,0} + S_{k,1}(x-x_k) + S_{k,2}(x-x_k)^2 + S_{k,3}(x-x_k)^3 , \qquad k = 0(1)N-1$$

$S(x_k) = y_k$, $k = 0(1)N$, her noktadan geçen

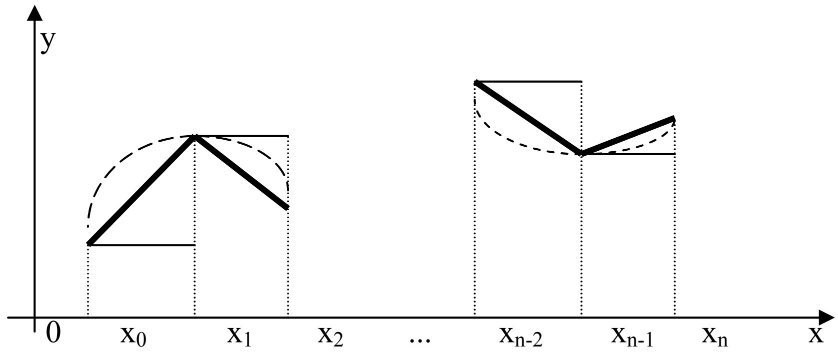
$S_k(x_{k+1}) = S^{/}_{k+1}(x_{k+1})$, $k = 0(1)N-2$, sürekli fonksiyon

$S^{/}_{k+1}(x_{k+1}) = S^{/}_{k+1}(x_{k+1})$, $k = 0(1)N-2$, düzenli fonksiyon

$S^{//}(x_{k+1}) = S^{//}_{k+1}(x_{k+1})$, $k = 0(1)N-2$, $y^{//}$ sürekli fonksiyon

$S_k(x)$ kübik polinomu 4 bilinmeyenli, 4N katsayılı, 4N serbestlik dereceli denklemdir. Veriler N+1 koşulu sağlar, (iii), (iv) ve (v) denklemlerinin her birisi N-1 koşul sağlar, böylece N+1+3(N-1) = 4N-2 koşul bulunmuş olur.

S(x) polinomu, parçalı sürekli bir fonksiyondur. Burada; sıfırıncı derece Spline fonksiyonu S(x) sürekli olmak üzere; $S(x) := S_k(x) = a_k$, $[x_k, x_{k+1}]$, k = 0(1)N birinci derece Spline fonksiyonu, S(x) ve $S^{/}(x)$ (birinci türevi) sürekli olmak üzere; $S(x) := S_k(x) = a_k\, x + b_k$, $[x_k, x_{k+1}]$, k = 0(1)N üçüncü derece (kübik) Spline fonksiyonu, $S(x) := S_k(x) = a_k\, x^3 + b_k\, x^2 + c_k\, x + d_k$, $[x_k, x_{k+1}]$, k = 0(1)N şeklinde tanımlıdır. Uygulamada kübik Spline fonksiyonu, kullanılan interpolasyonda yüksek dereceden seçilen polinom fonksiyonunda oluşan osilasyon gözlenmediğinden çok yaygın bir kullanıma sahiptir. Bu nedenle yaklaşım olarak kübik Spline tercih edilmiş ve formülasyon üçüncü dereceden için oluşturulmuştur.



Şekil 1. (—)Sıfırıncı, (▬)birinci ve (--)üçüncü dereceden Spline fonksiyonları

Doğrusal Lagrange interpolasyon formülü ile $S(x) = S^{//}{}_k(x)$ olmak üzere Eşitlik'de tanımlanmıştır.

$$S_k''(x) = S''(x_k)\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + S''(x_{k+1})\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \tag{1}$$

Burada $m_k = S^{//}(x_k)$; $m_{k+1} = S^{//}(x_{k+1})$ ve $h_k = x_{k+1} - x_k$ bağıntıları Eşitlik 1'de yerine yazılırsa $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ ve k = 0(1) N-1 için Eşitlik 2 elde edilir.

$$S_k''(x) = m_k\,\frac{x_{k+1} - x}{h_k} + m_{k+1}\,\frac{x - x_k}{h_k} \tag{2}$$

Eşitlik 2'nin iki kez ardışık olarak integre edilmesi ile iki integral sabitine bağlı olarak elde edilen bağıntı Eşitlik 3'te verilmiştir.

$$S_k''(x) = \frac{m_k}{6h_k}(x_{k+1} - x)^3 + \frac{m_{k+1}}{6h_k}(x - x_k)^3 + p_k(x_{k+1} - x) + q_k(x - x_k) \tag{3}$$

x_k ve x_{k+1} noktaları için Eşitlik 3'den $y_k = S_k(x_k)$ ve $S_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$, p_k ve q_k ya bağlı, sırası ile, aşağıdaki Eşitlik 4'deki bağıntılar elde edilir.

$$y_k = \frac{m_k}{6}h_k^2 + p_k h_k \quad ve \quad y_{k+1} = \frac{m_{k+1}}{6}h_k^2 + q_k h_k \tag{4}$$

Elde edilen p_k ve q_k değerleri Eşitlik 3'de yerine yazılırsa, Eşitlik 5 elde edilir.

$$S_k(x) = \frac{m_k}{6h_k}(x_{k+1}-x)^3 + \frac{m_{k+1}}{6h_k}(x-x_k)^3 + (\frac{y_k}{h_k} - \frac{m_k h_k}{6})(x_{k+1}-x) + (\frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{m_{k+1}h_k}{6})(x-x_k) \quad (5)$$

$\{m_k\}$ bilinmeyenlerini bulmak için $S_k(x)$'in birinci mertebeden türevini alırsak;

$$S'_k(x) = -\frac{m_k}{2h_k}(x_{k+1}-x)^2 + \frac{m_{k+1}}{2h_k}(x-x_k)^2 + (\frac{y_k}{h_k} - \frac{m_k h_k}{6}) + (\frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{m_{k+1}h_k}{6}) \quad (6)$$

Eşitlik 6'nin x_k noktasındaki değeri ise Eşitlik 7'de verilmiştir.

$$S'_k(x_k) = -\frac{m_k}{3}h_k - \frac{m_{k+1}}{6}h_k + d_k \ , \quad d_k = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} \quad (7)$$

Eşitlik 7'de k yerine k-1 yazıldığında Eşitlik 8 elde edilir.

$$S'_{k-1}(x_k) = -\frac{m_k}{3}h_{k-1} - \frac{m_{k-1}}{6}h_{k-1} + d_{k-1} \ , \quad d_{k-1} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} \quad (8)$$

Özellik (iv)'den ve Eşitlik 7, Eşitlik 8'den m_{k-1}, m_k ve m_{k+1} arasındaki ilişki Eşitlik 9'daki gibi elde edilir.

hk-1 mk-1 + 2(hk-1 + hk) + hk mk+1 = uk , uk = 6(dk –dk-1), k = 0(1)N-1 (9)

Eşitlik 9 ile tanımlı indis denkleminden (N+1) bilinmeyenli (N-1) denklem elde edilir. Elde edilen denklem sisteminin çözümü için iki ek koşula ihtiyaç vardır ve bu koşullar aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

	m_0 ve m_N değerleri
A. Yığılmış kübik spline	$m_0 = \frac{3}{h_0}[d_0 - S'(x_0)] - \frac{m_1}{2}; m_N = \frac{3}{h_{N-1}}[S'(x_N - d_{N-1})] - \frac{m_{N-1}}{2}$
B. Doğal spline	$m_0 = 0; m_N = 0$
C. uç noktalarda $S^{//}(x)$'in extrapolasyonu	$m_0 = m_1 - \frac{h_0(m_2 - m_1)}{h_1}; m_N = m_{N-1} - \frac{h_{N-1}(m_{N-1} - m_{N-2})}{h_{N-2}}$
D. Uç noktalar civarında $S^{//}(x)$ sabit ise	$m_0 = m_1; m_N = m_{N-1}$
E. Uç noktalar civarında özel $S^{//}(x)$	$m_0 = S^{//}(x_0); m_N = S^{//}(x_N)$

Eğer m_0 verilmiş ise h_0m_0'ın hesaplanması ile Eşitlik 9 indis bağıntısı k = 1 için Eşitlik 10 elde edilir.

$$2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1 - h_0 m_0 \quad (10)$$

Eğer m_N verilmiş ise $h_{N-1}m_N$'ın hesaplanması ile Eşitlik 9 indis bağıntısı k = N-1 için Eşitlik 11'deki bağıntıya indirgenir.

$$h_{N-2} m_{N-2} + 2(h_{N-2} + h_{N-1})m_{N-1} = u_{N-1} - h_{N-1} m_N \quad (11)$$

k = 1 için Eşitlik 10'da verilen bağıntı, k = 2,3,...,N-2 için Eşitlik 9 bağıntısı, k = N-1 için Eşitlik 11 bağıntısı ele alınırsa; bilinmeyenleri m_1, m_2,..., m_{N-1} olan (n-1) bağıntı oluşur. Elde edilen sistemin matris denklemi ve matris formu Eşitlik 12'deki gibidir.

$$[A]\{m\} = \{V\} \quad (12)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & & h_{N-3} & 2(h_{N-3}+h_{N-2}) & h_{N-2} \\ 0 & & & h_{N-2} & 2(h_{N-2}+h_{N-1}) \end{bmatrix}$$

$$\{m\} = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{N-1} \end{pmatrix}; \{V\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{Bmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} - h_0 m_0 \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_N-y_{N-1}}{h_{N-1}} - \frac{y_{N-1}-y_{N-2}}{h_{N-2}} - h_{N-1} m_N \end{pmatrix}$$

Sistemin çözümünden $\{m_k\}$ değerleri bulunarak kübik spline fonksiyonunun katsayıları hesaplanır (Eşitlik 13); ve her bir kübik spline Eşitlik 14'deki şekilde yazılabilir.

$$S_{k,0} = y_k\,;\; S_{k,1} = d_k - h_k\,(2m_k + m_{k+1})/6\,;\; S_{k,2} = m_k/2\,;\; S_{k,3} = (m_{k+1} - m_k)/6h_k \qquad (13)$$

$$S_k(x) = [(S_{k,3}W+S_{k,2})W+S_{k,1}]W+y_k,\; W = x - x_k,\; x_k \le x \le x_{k+1} \qquad (14)$$

Eşitlik 12 ile tanımlı sistemin çözümünden $\{m_k\}$ değerleri bulunup Eşitlik 13 denkleminde yerine yazılarak $S_{k,j}$ değerleri elde edilir. Elde edilen bu değerler Eşitlik 14'de yerine yerleştirildiğinde her bir $x_k \le x \le x_{k+1}$ aralığı için tanımlı spline fonksiyonları oluşmuş olur (Mathews, 1992). Spline fonksiyonlarının diferansiyel denkleme uygulanması aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

3. SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SPLINE FONKSİYONLARI İLE ÇÖZÜMÜ

İnterpolasyon teorisi, sayısal integral ve türev, yaklaşım teorisi ve diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde kullanılan yöntemlerin gelişimine temel teşkil etmektedir. Bilgisayarların gelişmesi ile interpolasyon teorisini içine alan sayısal analiz yöntemleri önem kazanmaya başlamıştır. Her problem matematiksel karakteristiklerle ifade edilerek sonlu fark tabloları oluşturularak çözülmeye çalışılmıştır. 1960'lı yılların başından beri parçalı polinom yaklaşım teorisi oldukça popülerdir, çok yaygın bir kullanım alanı vardır, örneğin diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin çözümü için Strang ve Fix bu tür bir çalışma yapmışlardır. Bu çalışma Spline fonksiyonlar üzerine yapılan pek çok çalışmanın merkezi olmuştur. Spline fonksiyon teorisinin başlangıcı olarak Prof. I. J. Schoenberg, 1946, bilinmektedir. Bu konu üzerinde ferdi ve grup çalışmaları olmak üzere pek çok yayını olmaktadır (Ahlberg ve Walsh, 1967). Bu çalışma grubu Spline fonksiyonlarının uygulamalarının gelişimi üzerine deneysel verilerin en küçük kareler modellemesinde gelecek olduğunu belirtmişlerdir. Bu çalışmalar ve interpolasyon teorisinin sayısal türeve uygulanışından yola çıkarak diferansiyel denkleme uyarlaması aşağıdaki şekilde tanımlanır:

S(x) Spline fonksiyonunun diferansiyel denkleme uygulamasını tanımlayabilmek için Eşitlik 15'deki formülasyonu kullanalım.

$$S''(x_k) = M_k\,,\; k = 0(1)N \qquad (15)$$

$S(x)$, $[x_k,\ x_{k+1}]$ aralığı üzerinde tanımlı kübik Spline, $S''(x)$ doğrusal Lagrange interpolasyonu olmak üzere; Eşitlik 1 ve Eşitlik 2'den Eşitlik 16 yazılabilir.

$$S''(x) = S''_k(x) = \frac{(x_{k+1} - x)M_k + (x - x_k)M_{k+1}}{h_k}, \qquad k = 0(1)N - 1 \tag{16}$$

Burada hk = xk+1 – xk şeklinde tanımlıdır. $S''(x)$, [x0, xN] aralığında sürekli olduğundan Eşitlik 16 bağıntısı ardışık olarak iki kez integre edilerek, integral sabitlerinin bulunması ile Eşitlik 17 ve Eşitlik 18'deki bağıntılar yazılır.

$$S'(x) = -\frac{(x_{k+1} - x)^2}{2h_k} M_k + \frac{(x - x_k)^2}{2h_k} M_{k+1} + \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{M_{k+1} - M_k}{6} h_k, k = 0(1)N - 1 \tag{17}$$

$$\begin{aligned} S(x) = {} & \frac{(x_{k+1} - x)^3 M_k + (x - x_k)^3 M_{k+1}}{6h_k} + (y_k - \frac{h_k^2}{6} M_k) \frac{(x_{k+1} - x)}{h_k} \\ & + (y_k - \frac{h_k^2}{6} M_{k+1}) \frac{(x - x_k)}{h_k}, \quad k = 0(1)N - 1 \end{aligned} \tag{18}$$

M_0, M_1, ... , M_n sabitlerini bulmak için Eşitlik 18 bağıntısı ile tanımlı S(x) Spline fonksiyonunun x_1, x_2, ... , x_{n-1} noktalarındaki sürekliliğinden, $[x_k, x_{k+1}]$ ve $[x_{k-1}, x_k]$ aralıkları için Eşitlik 19'un sağlanması halinde Eşitlik 10'deki indis denklemi elde edilir.

$$\lim_{x \to x_k^+} S(x) = \lim_{x \to x_k^-} S(x), \quad k = 1(1)N - 1 \tag{19}$$

$$\frac{h_{k-1}}{6} M_{k-1} + \frac{(h_k + h_{k-1})}{3} M_k + \frac{h_k}{6} M_{k+1} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}}, \quad k = 1(1)N - 1 \tag{20}$$

Buradan $\{M_k\}$ şeklinde (N+1) bilinmeyenli (N-1) eşitlik elde edilir. Genel olarak $y(x_0)=a=y_0$ ve $y(x_N)=b=y_N$ sınır koşulları ile tanımlı ikinci mertebeden diferansiyel denklem Eşitlik 21'deki gibi tanımlansın.

$$y''(x) + f(x)\, y'(x) + g(x)\, y(x) = r(x) \tag{21}$$

Eşitlik 21 bağıntısı x_k noktası için aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$y_k'' + f_k\, y_k' + g_k\, y_k = r_k, \qquad k = 0(1)N$$

$h = h_k = x_{k+1} - x_k = \Delta x_k$ olmak üzere Lagrange interpolasyonu yardımı ile oluşturulan Spline fonksiyonlarının kullanılması ile Eşitlik 21'in sınır koşulları altındaki özel çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

1.DURUM: Eşitlik 21 bağıntısı ile tanımlı diferansiyel denklem fk = 0 ve gk = 0 olması halinde aşağıdaki forma indirgenir.

$$y_k'' = r_k, \quad k = 0(1)N$$

Burada $M_k = r_k$, $M_{k+1} = r_{k+1}$, $M_{k-1} = r_{k-1}$ yaklaşımının Eşitlik 20 bağıntısında yerine yazılıp düzenlenmesi ile Eşitlik 22'deki indis eşitliği elde edilir.

$$6(y_{k+1} - 2\,y_k + y_{k-1}) = h^2\,(r_{k+1} + 4\,r_k + r_{k-1})\,,\;\; k = 1(1)N\text{-}1 \qquad (22)$$

Eşitlik 22'deki sınır koşullarının kullanılması ile (N-1)x(N-1) boyutlu denklem sisteminin çözümünden y_1, y_2, ..., y_{N-1} bilinmeyenleri elde edilir ve M_k ($k = 0(1)N$) ifadesinde yerine yazılarak sonuca ulaşılır.

2.DURUM: Eşitlik 21 bağıntısı ile tanımlı diferansiyel denklem fk = 0 olması halinde aşağıdaki forma indirgenir.

$$y_k^{II} + g_k\,y_k = r_k\,,\;\; k = 0(1)N$$

Burada $M_k = -\,g_k\,y_k + r_k$, $M_{k+1} = -\,g_{k+1}\,y_{k+1} + r_{k+1}$, $M_{k-1} = -\,g_{k-1}\,y_{k-1} + r_{k-1}$ yaklaşımının Eşitlik 20 bağıntısında yerine yazılıp düzenlenmesi ile Eşitlik 23'deki indis eşitliğine ulaşılır.

$$[1+(h^2/6)g_{k+1}]\,y_{k+1} - [2 - (2h^2/3)g_k]\,y_k + [1+(h^2/6)g_{k-1}]\,y_{k-1}$$
$$= h^2\,(r_{k+1} + 4\,r_k + r_{k-1})/6,\; k = 1(1)N\text{-}1 \qquad (23)$$

Eşitlik 23'deki sınır koşullarının kullanılması ile (N-1)x(N-1) boyutlu denklem sisteminin çözümünden elde edilen y_1, y_2 ,..., y_{N-1} bilinmeyenleri M_k ($k = 0(1)N$) denkleminde yerine yazılarak sonuca ulaşılır.

3.DURUM: Eşitlik 21 bağıntısı ile tanımlı diferansiyel denklemin homojen yani rk = 0 olması halinde aşağıdaki form elde edilir.

$$y_k^{II} + f_k\,y_k^{I} + g_k\,y_k = 0\,,\;\; k = 0(1)N$$

Burada $M_k = -\,f_k\,y^{I}_k - g_k\,y_k$, $M_{k+1} = -\,f_{k+1}\,y^{I}_{k+1} - g_{k+1}\,y_{k+1}$, $M_{k-1} = -\,f_{k-1}\,y^{I}_{k-1} - g_{k-1}\,y_{k-1}$; $S(x_k) = y_k$ ve $S^{I}_k(x_k) = y_k^{I} = (h/3)\,M_k + (h/6)\,M_{k-1} + (y_k - y_{k-1})/h$ olduğundan

$$M_k = -\,f_k\,[(h/3)\,M_k + (h/6)\,M_{k-1} + (y_k - y_{k-1})/h] - g_k\,y_k$$

$$(1+\frac{h}{3}f_k)M_k + \frac{h}{6}f_k M_{k-1} = -f_k\,\frac{y_k - y_{k-1}}{h} - g_k y_k\,,\quad k = 1(1)N-1 \qquad (24)$$

indis eşitliği elde edilir. $S^{I}_{k+1}(x_k) = y_k^{I} = -(h/3)\,M_k - (h/6)\,M_{k+1} + (y_{k+1} - y_k)/h$ bağıntısından

$$M_k = -\,f_k\,[-(h/3)\,M_k - (h/6)\,M_{k+1} + (y_{k+1} - y_k)/h] - g_k\,y_k$$

$$(1-\frac{h}{3}f_k)M_k - \frac{h}{6}f_k M_{k+1} = -f_k\,\frac{y_{k+1} - y_k}{h} - g_k y_k\,,\quad k = 1(1)N-1 \qquad (25)$$

indis eşitliği elde edilir. Eşitlik 24 ve Eşitlik 25 bağıntılarının eşitliğinden Eşitlik 26 indis eşitliğinden elde edilen (N-1)x(N-1) boyutlu sistemin çözümü ile sonuca ulaşılır.

$$y_{k+1} - 2\,y_k + y_{k-1} = h^2\,(M_{k+1} + 4\,M_k + M_{k-1})/6,\;\; k = 1(1)N\text{-}1 \qquad (26)$$

4.DURUM: Eşitlik 21 bağıntısı ile tanımlı diferansiyel denklemde Mk = rk – fk yık – gk yk , Mk+1 = rk+1 – fk+1 yık+1 – gk+1 yk+1 , Mk-1 = rk-1 – fk-1 yık-1 – gk-1 yk-1 olmak üzere Sık+1 (xk) = Sık(xk) süreklilik tanımından Eşitlik 24 ve Eşitlik 25 bağıntılarına benzer olarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$y^{I}k - = (1+\frac{h}{3}f_k)M_k + \frac{h}{6}f_k M_{k-1} = r_k - f_k\,\frac{y_k - y_{k-1}}{h} - g_k y_k\,,\quad k = 1(1)N-1 \qquad (27)$$

$$y^{I}k + = (1-\frac{h}{3}f_k)M_k - \frac{h}{6}f_k M_{k+1} = r_k - f_k\,\frac{y_{k+1} - y_k}{h} - g_k y_k\,,\quad k = 1(1)N-1 \qquad (28)$$

indis eşitlikleri elde edilir. Eşitlik 27 ve Eşitlik 28 bağıntılarının eşitliğinden elde edilen Eşitlik 26 indis eşitliğinin açık formu aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
&k = 1 \text{ için} \quad M_0 + 4M_1 + M_2 = 6\,(y_2 - 2\,y_1 + y_0) / h^2 \\
&k = 2 \text{ için} \quad M_1 + 4M_2 + M_3 = 6\,(y_3 - 2\,y_2 + y_1) / h^2 \quad \vdots \\
&k = N\text{-}1 \text{ için} \quad M_{N-2} + 4M_{N-1} + M_N = 6\,(y_{N-2} - 2\,y_{N-1} + y_N) / h^2
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Eşitlik 29 ile tanımlı sınır değer probleminde M_0 ve M_N değerleri için A,B,C, D, ve E koşullarından yararlanıldığında (N-1)x(N-1) boyutlu sisteme ulaşılır. Burada A ve C koşulları altında elde edilen çözüm değerleri, B, D ve E koşulları altında elde edilen çözümü değerlerinden gerçeğe daha yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Böylece Eşitlik 29 ile tanımlı eşitlik sistemi C yaklaşımı altında aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
&(-2 + hf_1 + h^2 g_1)\, y_1 + y_2 = h^2 r_1 + haf_1 - a \\
&(6 + hf_1 + h^2 g_1)\, y_1 + (-12 + 4hf_2 + 4h^2 g_2)\, y_2 + (6 + hf_3 + h^2 g_3)\, y_3 = h^2\, (r_1 + 4r_2 + r_3) + haf_1 \\
&-hf_2\, y_1 + (6 + hf_2 - 4\,hf_3 + h^2 g_2)\, y_2 + (-12 + 4hf_3 - h\,f_4 + 4h^2 g_3)\, y_3 + (6 + hf_4 + h^2 g_4)\, y_4 \\
&\qquad = h^2\, (r_2 + 4r_3 + r_4) \\
&-hf_3\, y_2 + (6 + hf_3 - 4\,hf_4 + h^2 g_3)\, y_3 + (-12 + 4hf_4 - h\,f_5 + 4h^2 g_4)\, y_4 + (6 + hf_5 + h^2 g_5)\, y_5 \\
&\qquad = h^2\, (r_3 + 4r_4 + r_5) \\
&\vdots \\
&-hf_{N-4}\, y_{N-5} + (6 + hf_{N-4} - 4\,hf_{N-3} + h^2 g_{N-4})\, y_{N-4} + (-12 + 4hf_{N-3} - hf_{N-2} + 4h^2 g_{N-3})\, y_{N-3} \\
&\qquad + (6 + hf_{N-2} + h^2 g_{N-2})\, y_{N-2} = h^2\, (r_{N-4} + 4r_{N-3} + r_{N-2}) \\
&-hf_{N-3}\, y_{N-4} + (6 + hf_{N-3} - 4\,hf_{N-2} + h^2 g_{N-3})\, y_{N-3} + (-12 + 4hf_{N-2} - h\,f_{N-1} + 4h^2 g_{N-2})\, y_{N-2} \\
&\qquad + (6 + hf_{N-1} + h^2 g_{N-1})\, y_{N-1} = h^2\, (r_{N-3} + 4r_{N-3} + r_{N-1}) \\
&(-2 + hf_{N-1} + h^2 g_{N-1})\, y_{N-1} + (1 - hf_{N-1})\, y_{N-2} = h^2\, r_{N-1} - b
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Eşitlik 30'un çözümünden y_1, y_2, ..., y_{N-1} bulunduktan sonra Eşitlik 13'de $S_{k,j}$, katsayıları yerine yazılır ve düzenlenirse diferansiyel denklemin çözümünden elde edilen kübik Spline yaklaşımı Eşitlik 31'deki formül ile oluşturulur.

$$
S_k(x) = \frac{M_{k+1} - M_k}{6h}(x - x_k)^3 + \frac{M_k}{2}(x - x_k)^2 + \left[\frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \frac{M_{k+1} + M_k}{6}h\right](x - x_k) + y_k \qquad k = 1(1)N-1 \qquad x_k \le x \le x_{k+1}
\tag{31}
$$

4. SAYISAL UYGULAMA

Bu bölümde, ikinci bölümde interpolasyon ile elde edilen Spline fonksiyonlarının üçüncü bölümde diferansiyel denkleme uygulamasına ve verilen yaklaşım yöntemini destekleyen örneklere yer verilmiştir.

Örnek 4.1: yıı = y diferansiyel denkleminin y(1) = 1.1752 ve y(3) = 10.0179 sınır koşulları altındaki çözümünü Spline fonksiyonlarının eşitliğe uygulanması yolu ile elde ediniz.

Çözüm: N = 4 için h = (b - a) / N = (3 – 1) / 4 = 0.5 olarak alalım.

$y_0 = 1.1752$ $y_1 = ?$ $y_2 = ?$ $y_3 = ?$ $y_4 = 10.0179$

$x_0 = 1$ $x_1 = 1.5$ $x_2 = 2$ $x_3 = 2.5$ $x_4 = 3$

verilen diferansiyel denklem 3.durumda $f_k = 0$ ve $g_k = -1$ ve $M_k = y_k$; $M_{k+1} = y_{k+1}$; $M_{k-1} = y_{k-1}$ olmak üzere diferansiyel denklem aşağıdaki indis eşitliği ile ifade edilir.

$$y_{k+1} - 2\,y_k + y_{k-1} = h^2\,(M_{k+1} + 4\,M_k + M_{k-1})/6$$

Elde edilen indis eşitliklerinde sınır koşullarının kullanılması ile aşağıdaki bağıntı bulunur.

$$\left(\frac{h^2}{6}-1\right)y_{k-1} + \left(2+\frac{2h^2}{3}\right)y_k + \left(\frac{h^2}{6}-1\right)y_{k+1} = 0, \quad k = 1,2,3 \tag{32}$$

Eşitlik 32'den elde edilen Eşitlik 30 bağıntısına benzer olan eşitlik sisteminin matris formu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} 2+\frac{2h^2}{3} & \frac{h^2}{6}-1 & 0 \\ \frac{h^2}{6}-1 & 2+\frac{2h^2}{3} & \frac{h^2}{6}-1 \\ 0 & \frac{h^2}{6}-1 & 2+\frac{2h^2}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\frac{h^2}{6})y_0 \\ 0 \\ (1-\frac{h^2}{6})y_4 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Sınır koşulları $y_0 = 1.1752$, $y_4 = 10.0179$ ve $h = 0.5$ için elde edilen eşitlik sisteminin çözümünden;

$y_1 = y(1.5) = 2.1106$ $y_2 = y(2) = 3.5968$ $y_3 = y(2.5) = 6.0218$

olarak bulunur. Spline fonksiyonları ise aşağıdaki gibi bulunur.

$S_1(x) = 0.4954\,x^3 - 1.174\,x^2 + 2.5261\,x - 0.7090$

$S_2(x) = 0.8083\,x^3 - 3.0516\,x^2 + 6.2551\,x - 3.1737$

$S_3(x) = 1.3320\,x^3 - 6.9793\,x^2 + 16.0749\,x - 11.3574$

Ele alınan diferansiyel denklemin sınır koşulları altındaki analitik çözümü olan y = Sinhx ile Spline fonksiyonları ve fark eşitlikleri ile çözümleri Çizelge 1'de sunulmuştur.

Çizelge 1. Örnek 4.1'de tanımlı diferansiyel denklemin çözüm değerleri

y(x)	y = Sinhx	Sonlu Farklar	Spline Fonksiyonları
y(1.0)	1.1752	1.1752	1.1752
y(1.5)	2.1293	2.1467	2.1106
y(2.0)	3.6269	3.6549	3.5968
y(2.5)	6.0502	6.0768	6.0218
y(3.0)	10.0179	10.0179	10.0179

Örnek 4.2: yıı – [1 – (x / 5)] y = x diferansiyel denkleminin y(1) = 2 ve y(3) = -1 sınır koşulları altındaki çözümünü elde ediniz.

Çözüm: N = 10 için h = (b – a) / N = (3 – 1) / 4 = 0.2 olarak alalım. Ele alınan diferansiyel denklem 4.durumda, fk = 0 ; gk = -1 + (xk / 5) ; Mk = xk + [-1 + (xk / 5)] yk ; Mk+1 = xk+1 + [-1 + (xk+1 / 5)] yk+1; Mk-1 = xk-1 + [-1 + (xk-1 / 5)]yk-1 olmak üzere Eşitlik 26, indis eşitliğinden aşağıdaki gibi ifade edilir. Elde edilen eşitlik sistemi ve matris formu aşağıdaki gibidir.

$$\left(\frac{6}{h^2}-\frac{1-x_{k+1}}{5}\right)y_{k+1}+\left(-\frac{12}{h^2}-\frac{4(1-x_k)}{5}\right)y_k+\left(\frac{6}{h^2}-\frac{1-x_{k-1}}{5}\right)y_{k-1}=x_{k-1}+4x_k+x_{k+1},\quad k=1(1)9 \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} 303.04 & -149.28 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -149.24 & 302.88 & -149.36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -149.28 & 302.72 & -149.36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -149.32 & 302.56 & -149.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -149.36 & 302.4 & -149.44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -149.4 & 302.24 & -149.48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -149.44 & 302.08 & -149.52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -149.48 & 301.92 & -149.56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -149.52 & 301.76 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 291.2 \\ -8.4 \\ -9.6 \\ -10.8 \\ -12 \\ -13.2 \\ -14.4 \\ -15.6 \\ -166.4 \end{pmatrix} \quad (35)$$

eşitlik sisteminin çözümünden aranılan değerler hesaplanır.

$y_1 = y(1.2) = 1.34931$ $y_2 = y(1.4) = 0.78842$ $y_3 = y(1.6) = 0.30681$

$y_4 = y(1.8) = -0.10189$ $y_5 = y(2.0) = -0.44069$ $y_6 = y(2.2) = -0.70963$

$y_7 = y(2.4) = -0.90608$ $y_8 = y(2.6) = -1.02501$ $y_9 = y(2.8) = -1.05932$

Bu değerler için Spline fonksiyonları ise aşağıdaki gibi bulunur.

$S_1(x) = -0.2149\, x^3 + 1.8862\, x^2 - 6.1892\, x + 6.4315$

$S_2(x) = -0.1325\, x^3 + 0.4272\, x^2 - 4.1920\, x + 5.4563$

$S_3(x) = -0.0615\, x^3 + 1.1997\, x^2 - 5.2315\, x + 5.8581$

$S_4(x) = 0.0007\, x^3 + 0.8638\, x^2 - 4.6366\, x + 5.4415$

$S_5(x) = 0.0559\, x^3 + 0.5327\, x^2 - 3.9699\, x + 4.9215$

$S_6(x) = 0.1052\, x^3 + 0.2071\, x^2 - 3.2362\, x + 4.2877$

$S_7(x) = 0.1493\, x^3 - 0.1105\, x^2 - 2.4451\, x + 3.5350$

$S_8(x) = 0.1883\, x^3 - 0.4144\, x^2 - 1.6163\, x + 2.6697$

$S_9(x) = 0.2218\, x^3 - 0.6958\, x^2 - 0.7805\, x + 1.7129$

Ele alınan diferansiyel denklemin sonlu farklar, Shooting ve Spline fonksiyonları yöntemi ile çözümünden elde edilen değerler Çizelge 2'de sunulmuştur.

Çizelge 2. Örnek 4.2' de tanımlı diferansiyel denklemin çözüm değerleri

x	Sonlu Farklar	Shooting Yöntemi	Spline Fonksiyonları
1.0	2.000	2.000	2.00000
1.2	1.351	1.348	1.34931
1.4	0.792	0.787	0.78842
1.6	0.311	0.305	0.30681
1.8	-0.097	-0.104	-0.10189
2.0	-0.436	-0.443	-0.44069
2.2	-0.705	-0.712	-0.70963
2.4	-0.903	-0.908	-0.90608
2.6	-1.022	-1.026	-1.02501
2.8	-1.058	-1.060	-1.05932
3.0	-1.000	-1.000	-1.00000

Örnek 4.3: yıı – yı = 0 diferansiyel denkleminin y(0) = 1 ve y(1) = 2 sınır koşulları altındaki çözümünü elde ediniz.

Çözüm: Mk = yık ; Mk+1 = yık+1; Mk-1 = yık-1 olmak üzere diferansiyel denklem

$$M_{k-1} + 4\,M_k + M_{k+1} = 6(y_{k-1} - 2\,y_k + y_{k+1})/h^2\,,\;\; k = 1(1)N\text{-}1:$$

şeklindedir. N = 4 için h = (b – a) / N = (2 – 1) / 4 = 0.25; $M_0 = 0$, $M_4 = 0$ (doğal Spline) tanımı ile; $y_0 = y(0) = 1$ ve $y_4 = y(1) = 2$ sınır koşulları altında elde edilen indis eşitliğinin matris formu, elde edilen sonuçlar ve spline fonksiyonları sırası ile aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} 51 & -23 & 0 \\ -27 & 51 & -23 \\ -1 & -27 & 52 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 1 \\ 48 \end{pmatrix}$$

$y_1 = y(0.25) = 1.1794$ $y_2 = y(0.50) = 1.3979$ $y_3 = y(0.75) = 1.6716$

$S_1(x) = 0.1043\,x^3 + 0.2806\,x^2 + 0.8104\,x + 0.9576$

$S_2(x) = 0.1472\,x^3 + 0.2162\,x^2 + 0.8867\,x + 0.8700$

$S_3(x) = -0.7299\,x^3 + 2.1881\,x^2 - 1.6468\,x + 1.9835$

N= 4 için h = (b – a) / N = (2 – 1) / 4 = 0.25; $M_0 = 2M_1 - M_2$, $M_4 = 2M_3 - M_2$ (doğrusal interpolasyon); $y_0 = y(0) = 1$ ve $y_4 = y(1) = 2$ sınır koşulları altında elde edilen indis eşitliğinin matris formu, sistemin çözümü ve bu değerler için Spline fonksiyonları ise aşağıdaki gibi sırası ile bulunur.

$$\begin{bmatrix} 2.25 & -1 & 0 \\ -27 & 51 & -23 \\ 0 & -1.25 & 2.25 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$y_1 = y(0.25) = 1.1733$ $y_2 = y(0.50) = 1.3898$ $y_3 = y(0.75) = 1.6610$

$S_1(x) = 0.1152\,x^3 + 0.2602\,x^2 + 0.8082\,x + 0.9532$

$S_2(x) = 0.1459\,x^3 + 0.2142\,x^2 + 0.8786\,x + 0.8787$

$S_3(x) = 0.1459\,x^3 + 0.2141\,x^2 + 0.8809\,x + 0.8183$

Diferansiyel denklemin analitik çözümü olan fonksiyon $y(x) = (e - 2 + e^x) / (e - 1)$'den gerçek çözüm değerleri; $y_1 = y(0.25) = 1.1653$; $y_2 = y(0.50) = 1.3775$; $y_3 = y(0.75) = 1.6501$ olarak bulunur. Sonuç olarak, doğrusal interpolasyon uyguladığında elde edilen değerlerin gerçeğe daha yakın olduğu gözlenmiş ve problemin çözümü N = 10 alınarak h = 0.1 için oluşan denklem sisteminin matris formu, elde edilen sonuçlar ve bu değerler için oluşturulan Spline fonksiyonları ise aşağıdaki gibi yazılır.

$y_1 = y(0.1) = 1.062709$ $y_2 = y(0.2) = 1.131689$ $y_3 = y(0.3) = 1.207577$

$y_4 = y(0.4) = 1.291066$ $y_5 = y(0.5) = 1.382917$ $y_6 = y(0.6) = 1.483966$

$y_7 = y(0.7) = 1.595136$ $y_8 = y(0.8) = 1.717440$ $y_9 = y(0.9) = 1.851992$

$$\begin{bmatrix} 2.1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6.3 & 12.3 & -5.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & -6.3 & 12.3 & -5.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & -6.3 & 12.3 & -5.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -6.3 & 12.3 & -5.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & -6.3 & 12.3 & -5.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & -6.3 & 12.3 & -5.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & -6.3 & 12.3 & -5.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.1 & 2.1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{38}$$

$S_1(x) = 0.104583\, x^3 + 0.282170\, x^2 + 0.662627\, x + 0.993520$

$S_2(x) = 0.115133\, x^3 + 0.275200\, x^2 + 0.670377\, x + 0.985660$

$S_3(x) = 0.126683\, x^3 + 0.265425\, x^2 + 0.680641\, x + 0.976076$

$S_4(x) = 0.139367\, x^3 + 0.250205\, x^2 + 0.694588\, x + 0.964278$

$S_5(x) = 0.153300\, x^3 + 0.229305\, x^2 + 0.713669\, x + 0.949594$

$S_6(x) = 0.168683\, x^3 + 0.201615\, x^2 + 0.739795\, x + 0.931072$

$S_7(x) = 0.185567\, x^3 + 0.166160\, x^2 + 0.775074\, x + 0.907517$

$S_8(x) = 0.204133\, x^3 + 0.121600\, x^2 + 0.822217\, x + 0.877326$

$S_9(x) = -2.03840\, x^3 + 6.176440\, x^2 - 3.291788\, x + 1.297678$

5. SONUÇ

Sınır değer problemlerinin kapalı çözümleri elde edilemediğinde sayısal yöntemlerin kullanılması ile çözüm değerleri bulunur. Bu tip problemlerin çözümlerinde genellikle sonlu farklar yöntemi kullanılır. Sonlu farklar yöntemi ile ara değerler n adım sayısına bağlı (h artışına göre) bulunur. N adım sayısı arttıkça (h artışı küçüldükçe) sınırlar arası ara değerlerin sayısı artacağından elde edilen denklem sisteminin boyut büyüyecek ve çözüm zorlaşacaktır. Bu çalışmada yer alan Spline fonksiyonları yardımı ile diferansiyel denklemin çözümünde yine n adım sayısına göre ara değerler hesaplanır. Sonlu farklar yönteminden farklı olarak bu ara değerler kullanılarak (N-1) tane kübik Spline fonksiyonu oluşturulur. Böylece n adım sayısını arttırmadan daha küçük artışlı ara değerler bulunabilir, ayrıca aralıklar içinde polinom şeklinde tanımlı kapalı fonksiyonlardan oluşan çözüm elde edilmiş olur. Örnek 4.1'de tanımlı diferansiyel denklemin, Spline fonksiyonları ile elde edilen Eşitlik 33 matris denkleminin sınır koşulları altındaki çözüm değerleri sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilen değerlerden analitik çözümden elde edilen değerlere daha yakın çıktığı gözlenmiş ve sonuçlar Çizelge 1'de ifade edilmiştir. Örnek 4.2'de tanımlı diferansiyel denklemin Spline fonksiyonları ile çözümü elde edilmiş, sonlu farklar ve Shooting yöntemi uygulanarak elde edilen sonuçlar ile birlikte Çizelge 2'de sunulmuştur. Elde edilen sonuçların birbirine yakın olduğu gözlenmiştir. Örnek 4.3'de tanımlı diferansiyel denklemin, Spline fonksiyonları ile çözümünde ek koşul bulmak için kullanılan doğrusal interpolasyon Eşitlik 37 bağıntısı ile tanımlı denklem sisteminin çözümü ile elde edilen sonuçlar doğal Spline fonksiyonunun uygulanması sonucu ulaşılan Eşitlik 36 matris denkleminin çözümü ile elde edilen sonuçlardan daha çok gerçeğe yakın olduğu vurgulanmıştır. Ayrıca Örnek 4.3'de farklı adım sayısı ile elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. N arttıkça gerçeğe yakın sonuçlara ulaşıldığı gözlenmiştir. Tüm bu örneklerde ifade edilen $S_k(x)$ fonksiyonları ile diferansiyel denklemin çözümündeki y_i değerleri h(artış) küçüldükçe de elde edilebileceğini bunun için denklem sisteminin tekrar oluşturulmasına gerek kalmadan ara değerler için $S_k(x)$ fonksiyonlarından sonucun ifade edilebileceği vurgulanmıştır. Ayrıca bu yöntemin doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinde de uygulanabilirliği incelenebilir.

KAYNAKLAR

Ahlberg J.E., Walsh J. (1967): "The Theory of Splines and Their Applications", Academic Press.

Behforooz G.H. (1993): "A new Approach to Spline Functions", Applied Numerical Mathematics, Vol. 13, No: 4, pp. 271-276.

Çatal S. (2000): "Deprem Mukabele Hesaplarında Matematiksel Çözüm Yöntemlerinin Kıyaslanması", Batı Anadolu'nun Depremselliği Sempozyumu, BADSEM 2000, 24-27 Mayıs, İzmir.

Çatal S. (2001): "Doğrusal Olmayan Elastik Eğri Diferansiyel Denkleminin Çözüm Yöntemlerinin Kıyaslanması", XII. Ulusal Mekanik Kongresi, TUMTMK, 10-14 Eylül, Konya.

Desai S.C. (1971): "Non-Linear Analyses using Spline Functions", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Vol. 97, No.10, pp. 1461-1480.

Gerald F.C., Wheatley P.O. (1989): "Applied Numerical Analysis", New York, Addison-Wesley Publishing Company, pp: 347-449.

Jain M.K., Aziz T. (1981): "Spline Function Approximation for Differential Equations", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 26, No: 2, pp. 129-143.

Jain M.K., Aziz T. (1983): "Numerical Solution of Stiff and Convection-Diffusion Equations Using Adaptive Spline Function Approximation", Applied Mathematical Modeling, Vol. 7, No: 1, pp. 57-62.

Kadalbajoo M.K., Raman K.S. (1986): "Cubic Spline Solutions of Boundary Value Problems Over Infinite Intervals", Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol: 15, No: 3, pp. 283-291.

Mathews J. H. (1992): "Numerical Methods", London, Prentice-Hall International Inc., pp. 284-298.

Papamichael N., Worsey A.J. (1981): "A Cubic Spline Method for the Solution of a Linear Forth-Order Two–Point Boundary Value Problem", Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol: 7, No. 3, pp. 187-189.

Raynor S. (1982): "Cubic Spline Method for Solving Second-Order Differential Equations Theory and Application to the Thomas-Fermi Model for Ions", Chemical Physics, Vol. 66, No: 3, pp. 409-415.

Sallam S., El-Hawaray H.M. (1983): "A Deficient Spline Function Approximation to Systems of First Order Differential Equations", Applied Mathematical Modeling, Volume 7, Issue 5, pp. 380-382.

Sallam S., El-Hawaray H.M. (1984): "A Deficient Spline Function Approximation to Systems of First Order Differential Equations: Part 2", Applied Mathematical Modeling, Vol: 8, No: 2, pp. 128-132.

Sallam S., Hussien M.A. (1984): "Deficient Spline Function Approximation to Second-Order Differential Equations", Applied Math. Modeling, Vol. 8, No: 6, pp. 408-412.

Wang G.G., Hsu C.T.T (1998): "Non-linear Analysis of Reinforced Concrete Columns by Cubic Spline Function", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 124, No. 7, pp. 803-810.