



**BASI YÜKLERİ ALTINDA BURKULMAYA ZORLANAN ÇUBUKLARDA  
OPTİMUM ENİNE KESİT DEĞİŞİMİ ÜZERİNE  
BİR ARAŞTIRMA**

**(OPTIMUM CROSS SECTION DETERMINATION AGAINST BUCKLING OF BARS  
UNDER COMPRESSIVE LOADING)**

**Yeliz PEKBEY\*, A. ÖZDAMAR\***

**ÖZET/ABSTRACT**

Basmaya zorlanan çubukların kritik burkulma kuvvetleri, dört yataklama durumu için, 1744 yılında Euler tarafından sabit enine kesit kabulü altında hesaplanmıştır. Bu çubukların boyutlandırılmasında daha ekonomik çözüm arandığında, enine kesitin çubuk boyu ile değişmesi gerekir. Bugüne kadar yapılan çalışmalarda, bu problem değişik dört yataklama durumu için çözülmüştür. Bu çalışmada, bu yataklama durumlarına ek olarak, alt ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli ve üst ucu ankastre mesnetli ile alt ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli ve üst ucu kayıcı basit mesnetli iki yataklama durumu için problem çözülmüştür. Bu çözüm sonunda, her iki yeni durum için enine kesitin çubuk boyu ile değişimi ve kritik burkulma kuvveti verilmiş, sabit enine kesitli çubuklara nazaran optimum çözüm ile sağlanan malzeme tasarrufu yüzde olarak hesaplanmıştır.

*In 1744, the critical buckling loads with the assumption of uniform cross section for four support types were computed by Euler. The cross section must be varied with the length of the column whenever an economical solution is required. This problem has been solved up to now for four support types. In this study, in addition to these supports, two new support types are considered. While one of the support has lower end fixed and upper end fixed-roller supported, the other has upper end fixed and lower end fixed-roller supported. As a result of these solutions, for two new conditions, variation of cross section with the length of the bar and critical buckling loads of square, circle and equilateral triangle cross sections are calculated. The difference between the uniform cross section and the variable cross section solutions is compared in terms of material saving.*

**ANAHTAR KELİMELEK/KEYWORDS**

Mekanik, Mukavemet, Burkulma problemi, Yükselen hava akımlı rüzgar türbinleri, Enine kesit değişimi

*Mechanic, Strength of material, Problem of buckling, Wind turbines, Changing cross section*

## 1. GİRİŞ

Şekil değiştirebilen katı cisimlerin davranışını inceleyen mukavemet bilimi, gerilme problemi ve stabilite problemi olarak adlandırılan iki ana problemle uğraşır. Gerilme probleminde; belli yükler altında belli bir enine kesite sahip olan taşıyıcı sistemin gerilme değerlerinin, taşıyıcı sistemin malzemesine bağlı güvenli gerilmeyi aşmaması istenir. Stabilite probleminde ise aranan, taşıyıcı sistemin aniden çok büyük şekil değiştirmelere uğradığı yüküdür (Özdamar ve Pekbey, 2000). Yükselen hava akımlı rüzgar türbini kuleleri, madenlerde havalandırma bacaları, denizlerden çıkarılan ham petrolü gemilere aktarmakta kullanılan borular gibi uzun ve narin yapılarda, gerilme problemi açısından taşıyıcı sistem güvenli iken, belli bir kritik basma kuvvetinde denge durumu kararsız hale geçebilir ve sistem kullanılamaz hale gelir (Özdamar, 1996a; Özdamar, 1996b; Özdamar, 1997). Basmaya zorlanan sabit enine kesitli çubukların kritik burkulma kuvvetleri, Euler tarafından dört yataklama durumu için verilmiştir (Euler, 1744). Daha ekonomik bir çözüm istendiğinde ise, çubuğun enine kesiti çubuk boyunca değişmelidir.

Daha ekonomik çözüm amaçlı enine kesit değişimini hesaplayan ilk çalışma, basit mesnetli çubuklar için yapılmıştır. Bu çalışmada incelenen enine kesit, dairesel ve dikdörtgendir (Ratzersdorfer, 1936). Bunu, ankastre-ankastre, ankastre-serbest, ankastre-mafsallı olan çubuklar için kritik burkulma kuvvetleri ve çubuk enine kesitinin çubuk boyu ile değişiminin incelenmesi izlemiştir (Tadzbakhs ve Keller, 1962). Bu dalda literatürde izlenebilen son bir çalışmada da; alt ucu ankastre ve üst ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli çubuk için çözüm verilmiştir (Arpakçı, 2000).

Bu çalışmada ise, bugüne kadar incelenen durumlara ek olarak, alt ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli ve üst ucu ankastre mesnetli ile alt ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli ve üst ucu kayıcı basit mesnetli iki yataklama durumu için problem çözülmüştür. Sonuç olarak, her iki yeni durum için enine kesitin çubuk boyu ile değişimi ve kritik burkulma kuvveti verilmiş, sabit enine kesitli çubuklara nazaran optimum çözüm ile sağlanan malzeme tasarrufu yüzde olarak hesaplanmıştır.

## 2. PROBLEMİN DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Şekil 1'de basmaya zorlanan ve x noktasında kesilmiş bir çubuğun serbest cisim diyagramı verilmektedir. Burada moment denge denklemi yazıldığında

$$M_{ey}(x) = P w(x) \quad (1)$$

elde edilir. Burada  $M_{ey}(x)$  ile eğilme momenti kesit zoru,  $w(x)$  ile çökme fonksiyonu ve  $P$  ile de aksel basma kuvveti simgelenmiştir.  $I(x)$  çubuk enine kesitinin alan eylemsizlik momenti ve  $w''(x)$ ,  $w(x)$  çökme fonksiyonunun  $x$ 'e göre ikinci türevi olmak üzere, eğilme momenti kesit zoru; elastik eğri denkleminde

$$M_{ey}(x) = - E I(x) w''(x) \quad (2)$$

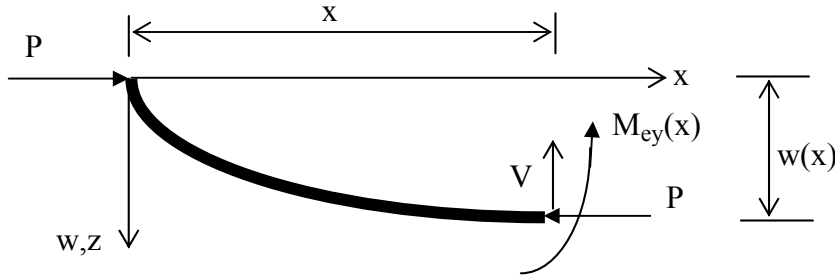
olarak bilinmektedir. Eşitlik 1 ve Eşitlik 2 birbirine eşitlenir ve ifadelerin iki kez  $x$ 'e göre türevleri alınır, problemin en genel haldeki diferansiyel denklemi

$$[-E I(x) w''(x)]'' - P w''(x) = 0 \quad (3)$$

olacaktır. Çubuk enine kesitlerinin çubuk boyunca aynı formda kalacağı kabul edildiğinde, çubuk enine kesiti alan eylemsizlik momenti  $I(x)$  ile çubuk enine kesit alanı  $A(x)$  arasında

$$I(x) = \alpha A^2(x) \quad (4)$$

bağıntısı mevcut olacaktır. Burada enine kesit form katsayısı  $\alpha$ , çubuk enine kesit formuna bağlı olarak değişen sabit bir değerdir ve bu çalışmada incelenen kare, daire ve eşkenar üçgen enine kesit formları için Çizelge 1'de verilmiştir.



Şekil 1. Basmaya zorlanan ve x'de kesilmiş çubuğun serbest cisim diyagramı

Çizelge 1. Çubuk enine kesit formuna bağlı olarak  $\alpha$  enine kesit form katsayısı değerleri

Enine Kesit Formu	Kare	Daire	Eşkenar Üçgen
Enine kesit form katsayısı: $\alpha$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{18}$

Eşitlik 3'deki diferansiyel denklemde Eşitlik 4 ve

$$\xi = x/L, \quad (5)$$

$$\phi(\xi) = L^2 A^2(x) w''(x) \quad (6)$$

değişkenleri ile

$$\lambda = \frac{PL^2}{E\alpha} \quad (7)$$

kısaltması yerine yazıldığında

$$\phi''(\xi) + \lambda A^{-2} \phi(\xi) = 0 \quad (8)$$

elde edilir. Bu denklemde,  $\phi''(\xi)$ ;  $\phi(\xi)$  fonksiyonunun  $\xi$ 'ye göre ikinci türevidir. Bu diferansiyel denklemin çözümü için

$$\phi^2 = A^3 \quad (9)$$

ifadesinden hareketle, problemin diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi olmaktadır (Tadzbakhsh ve Keller, 1962).

$$\phi(\xi) + \lambda \phi^{-1/3}(\xi) = 0 \quad (10)$$

### 3. İNCELENEN DURUMLAR VE SINIR ŞARTLARI

Bu çalışmada, literatürde daha önce incelenen dört yataklama durumuna ek olarak, alt ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli ve üst ucu ankastre mesnetli ile alt ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli ve üst ucu kayıcı basit mesnetli iki yataklama durumu incelenecektir. Burada incelenecek olan ek durumlar ve sınır şartları Çizelge 2'de verilmektedir. Ayrıca Q, kesme kuvveti kesit zorunu belirtmektedir.

Diferansiyel denklemin sınır şartlarındaki çökme ve türev ifadelerinin bulunabilmesi için, Eşitlik 6'dan elde edilen

$$A^{-2}\phi = L^2 w''(\xi) \quad (11)$$

ifade Eşitlik 8'de yerine yerleştirilirse

$$w''(\xi) = \frac{-1}{\lambda L^2} \phi(\xi) \quad (12)$$

elde edilir. Bu denklemin entegre edilmesiyle  $w'(\xi)$ ,  $w(\xi)$ 'nin entegre edilmesiyle de  $w(\xi)$  aşağıdaki, şekilde bulunur.

$$w'(\xi) = (\lambda L)^{-1} [\phi(\xi = 0) - \phi(\xi)] \quad (13)$$

$$w(x) = w(0) + w'(0)xL + I^{-1} [\phi(x = 0) - f(x) + f(0)] \quad (14)$$

Çizelge 2'de verilen sınır şartlarındaki kesme kuvveti kesit zorunu bulmak için, küçük bir çubuk elemanı alınır ve denge denklemleri yazılırsa

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} - P \frac{dw(x)}{dx} \quad (15)$$

elde edilir. Burada Eşitlik 2'de verilen kesme kuvveti kesit zoru ifadesi yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa, kesme kuvveti kesit zoru için

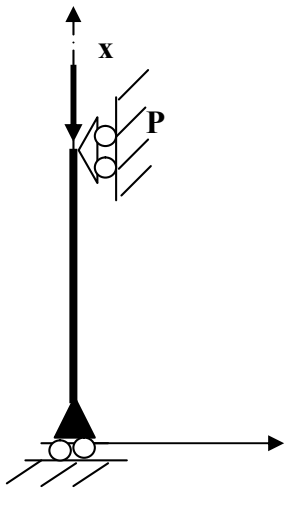
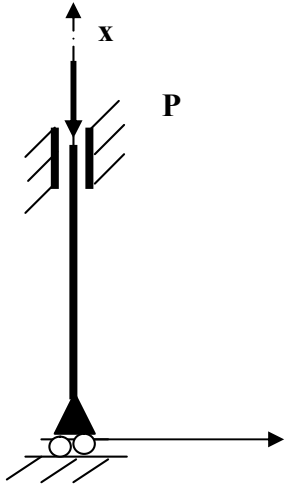
$$Q(x) = -[EI'(x)w''(x) + EI(x)w'''(x) + Pw'(x)] \quad (16)$$

ifadesi elde edilir. Kesme kuvveti kesit zoru ifadesinde yer alan çökme fonksiyonunun üçüncü türevi, Eşitlik 12'den hareketle

$$w'''(x) = \frac{-1}{L^2 A_0^{1/2}} \frac{\cos q(x)}{\sin^2 q(x)} \phi(x) \quad (17)$$

olmaktadır.

Çizelge 2. İncelenen durumlar ve sınır şartları

İncelenen Durumlar	Sınır Şartları
<p><b>YATAKLAMA DURUMU I</b></p> 	$x=L \Rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ w'' = 0 \end{cases}$ $x=0 \Rightarrow \begin{cases} w' = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$
<p><b>YATAKLAMA DURUMU II</b></p> 	$x=L \Rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ w' = 0 \end{cases}$ $x=0 \Rightarrow \begin{cases} w' = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$

#### 4. DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

Enine kesit değişimi

$$A(\xi) = A_0 \sin^2 \theta(\xi) \quad (18)$$

olarak kabul edilirse, Eşitlik 9'dan

$$\phi(\xi) = A_0^{3/2} \sin^3 \theta(\xi) \quad (19)$$

olur. Bu ifadeler, Eşitlik 10'da yerine yazılır ve entegrasyon işlemleri gerçekleştirilirse, diferansiyel denklemin çözümü

$$\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + a = 2(\lambda/3)^{1/2} A_0^{-1} \xi \quad (20)$$

olur. Bu denklemlerde  $A_0$  ve  $a$ , sabitlerdir ve incelenen duruma göre sınır şartlarından belirlenirler. Eşitlik 13 ve Eşitlik 14'de verilen sınır şartlarında geçen  $\phi(\xi)$  ifadesi ise, Eşitlik 19 ve Eşitlik 20'den

$$\phi(\xi) = (3\lambda A_0)^{1/2} \cos \theta(\xi) \quad (21)$$

olarak elde edilir.

## 5. YATAKLAMA DURUMU I VE II İÇİN OPTİMUM ENİNE KESİT DEĞİŞİMİ

Buraya kadar, problemin diferansiyel denklemini çıkarılmış, diferansiyel denklemin çözümü verilmiş ve iki durum için sınır şartları ifade edilmiştir. Bundan sonra, sınır şartları kullanılarak, kritik burkulma kuvveti ve optimum enine kesit değişimi ifadesi durum I için ayrıntılı olarak verilecektir.

Durum I için  $x=0$  noktasında kesme kuvvetinin sıfır olmasından Eşitlik 16 yardımıyla

$$E \frac{3aA_0^{3/2} \sin^2 q(0) \cos q(0)}{L^3} \frac{dq(x)}{dx} = 0 \quad (22)$$

elde edilir. Buradan da

$$\sin^2 q(0) \cos q(0) = 0 \quad (23)$$

olmak zorundadır. Eşitlik 22'de

$$\frac{d\theta(\xi)}{d\xi} = 0 \quad (24)$$

ifadesi de sınır şartını sağlamakla birlikte, bunun enine kesitin çubuk boyunca sabit olması anlamına gelmesi nedeniyle çözüm olmayacağı açıktır.  $x=0$ 'da  $w' = 0$  sınır şartı, Eşitlik 13 uyarınca kendiliğinden sağlanmaktadır.  $x=L$ 'de  $w''(x) = 0$  ile ifade edilen sınır şartından Eşitlik 12 yardımıyla

$$\phi(\xi) = 0 \quad (25)$$

elde edilir. Buradan da

$$\sin q(1) = 0 \text{ ve } \theta(1) = -n\pi, \dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi \quad (26)$$

bulunmaktadır.  $x=L$ 'deki son sınır şartından da

$$w(x=L) = w(0) + I^{-1} \left[ (3IA_0)^{1/2} \cos q(0) - A_0^{3/2} \sin^3 q(1) + A_0^{3/2} \sin^3 q(0) \right] = 0 \quad (27)$$

elde edilir. Buradan

$$w(0) = -I^{-1} \left[ (3IA_0)^{1/2} \cos q(0) + A_0^{3/2} \sin^3 q(0) \right] \quad (28)$$

bulunmakta, bu da  $x=0$ 'da beklenildiği gibi çökmenin sıfırdan farklı olması anlamına gelmektedir. Eşitlik 23, Eşitlik 26 ve Eşitlik 28 sınır şartlarını bir çok açı değeri sağlamakla birlikte, en küçük  $\lambda$  değerini

$$q(0) = \frac{p}{2},$$

$$q(1) = p$$

açıları vermektedir. Eşitlik 20'de  $x = 0$  için  $q(0)$  ve  $x = 1$  için  $q(1)$  değeri yazılırsa

$$a = -\frac{\pi}{2} \quad (29)$$

$$A_0 = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\lambda}{3} \right)^{1/2} \quad (30)$$

olarak bulunur. Bu değerler, Eşitlik 20'de yerine yazıldığında ise

$$q - \frac{1}{2} \sin 2q - \frac{p}{2} = \frac{p}{2} x \quad (31)$$

elde edilir. L boyundaki çubuğun hacmi

$$L \int_0^1 A(\xi) d\xi = V \quad (32)$$

bağıntısı ile verilmektedir. Bu entegralde, Eşitlik 31 denkleminde verilen  $x$  değişkeni yerine yazılır ve entegrasyon işlemi yapılırsa

$$\frac{V}{L} = \frac{3A_0}{4} \Rightarrow A_0 = \frac{4V}{3L} \quad (33)$$

bulunur. Bu durumda, çubuğun optimum enine kesit değişimi Eşitlik 18'den

$$A(x) = \frac{4V}{3L} \sin^2 q(x) \quad (34)$$

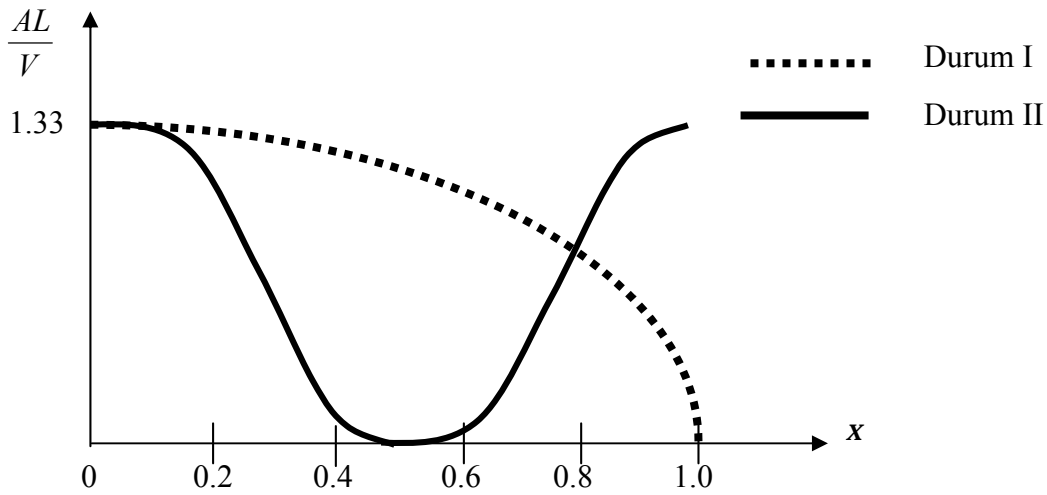
olarak elde edilir. Eşitlik 34 kullanılarak, bu çalışmada incelenen her iki yataklama durumu için enine kesit alanının çubuk boyu ile değişimi Şekil 2'de verilmiştir. Kritik burkulma kuvvetinin bulunabilmesi için, Eşitlik 30 ve Eşitlik 33'deki  $A_0$  değerleri eşitlendiğinde

$$\lambda = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{V}{L} \right)^2 \quad (35)$$

bulunur. Bu değer Eşitlik 7'de yerine yazıldığında da, kare enine kesitli çubukta durum I için kritik burkulma kuvveti

$$P_{kr} = 0,2741 \frac{EV^2}{L^4} \quad (36)$$

olarak elde edilir. Burada durum I için yapılan işlemler, durum II için benzer şekilde tekrarlandığında, Çizelge 3'deki sonuçlar bulunmaktadır. Şekil 2'de, incelenen her iki yataklama durumu için, en az malzeme ile en büyük burkulma kuvvetine dayanan çubuğun enine kesitlerinin çubuk boyu ile değişimi verilmiştir. Bu şekil incelendiğinde, durum I'de, çubuk enine kesit alanının ankastreli kayıcı basit mesnette en büyük değerini aldığı ve kayıcı basit mesnetli diğer uçta sıfır olacak şekilde azalım gösterdiği anlaşılmaktadır. Durum II'de de çubuk enine kesit alanı, çubuğun orta noktasında sıfır değerini almakta ve her iki uçta en büyük değere ulaşacak şekilde uçlara doğru artım göstermektedir. Çizelge 4'de de, sabit ve değişken enine kesitlerin daire ve eşkenar üçgen olması durumları için kritik burkulma kuvvetleri verilmektedir.



Şekil 2. Durum I ve II için enine kesit alanının çubuk boyu ile değişimi

Çizelge 4 incelendiğinde; en büyük kritik burkulma kuvvetinin, eşit boy ve hacme sahip enine kesitli çubuklarda, her iki yataklama durumunda da eşkenar üçgen enine kesitte olduğu anlaşılmaktadır. Eşkenar üçgen enine kesitli çubuğun kritik burkulma kuvveti 100 birim olarak alındığında, durum I için kare enine kesitli çubuğun burkulma kuvveti 87 birim, daire enine kesitli çubuğun burkulma kuvveti de 83 birim olmaktadır. Durum II için de aynı inceleme yapıldığında, eşkenar üçgen enine kesitli çubuğun kritik burkulma yükü 100 birim



iken, kare enine kesitli çubuğun burkulma kuvveti 86 birim, daire enine kesitli çubuğun burkulma kuvveti de 82 birim olarak elde edilmektedir.

Çizelge 3. Durum I ve Durum II için bulunan değerler (kare enine kesit)

Durumlar	$\theta(0)$	$\theta(1)$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{A}_0$	$\mathbf{P}_{kr.}$
Durum I	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{4}{\pi} \left( \frac{\lambda}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$	$0,2741 \frac{EV^2}{L^4}$
Durum II	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{2}{\pi} \left( \frac{\lambda}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$	$1,097 \frac{EV^2}{L^4}$

Çizelge 4. Durum I ve Durum II için bulunan kritik burkulma kuvvetleri

	Sabit Enine Kesit	Daire Enine Kesit	Kare Enine Kesit	Eşkenar Üçgen Enine Kesit
DURUM 1	$P_{kr} = \frac{EI\pi^2}{4L^2}$	$P_{kr} = 0,2618 \frac{EV^2}{L^4}$	$P_{kr} = 0,2741 \frac{EV^2}{L^4}$	$P_{kr} = 0,3166 \frac{EV^2}{L^4}$
DURUM 2	$P_{kr} = \frac{EI\pi^2}{L^2}$	$P_{kr} = 1,04 \frac{EV^2}{L^4}$	$P_{kr} = 1,09 \frac{EV^2}{L^4}$	$P_{kr} = 1,266 \frac{EV^2}{L^4}$

## 6. OPTİMUM ENİNE KESİT İLE SAĞLANAN MALZEME TASARRUFU

Basmaya zorlanan çubukların enine kesitlerinin çubuk boyu ile optimum değişim göstermesi sonucu sağlanan hacimsel malzeme tasarrufunu hesaplamak için, Çizelge 4 ile verilen sabit enine kesit ve değişken enine kesit durumlarındaki kritik burkulma kuvvetleri eşitlenmelidir. Bu eşitlikten hareketle, aynı kritik yük ve boya sahip iki çubuktan, sabit enine kesitli olanının hacminin değişken enine kesitli olanının hacmine oranı, yataklama durumu ve enine kesit formuna bağlı olmaksızın 1,15 çıkmaktadır. Sonuç olarak, belirli bir kritik yük için, çubuk enine kesitinin çubuk boyunca optimum olarak değişmesi ile, çubuk enine kesitinin sabit olmasına nazaran %15 hacimsel tasarruf elde edilmektedir.

## 7. SONUÇLAR

Basmaya zorlanan çubukların kritik burkulma kuvvetleri, dört yataklama durumu için, 1744 yılında Euler tarafından sabit enine kesit kabulü altında hesaplanmıştır. Bu çubukların boyutlandırılmasında daha ekonomik çözüm arandığında, enine kesitin çubuk boyu ile değişmesi gerekir. Bugüne kadar yapılan çalışmalarda; bu problem, değişik dört yataklama durumu için çözülmüştür. Bu çalışmada, bu yataklama durumlarına ek olarak, alt ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli ve üst ucu ankastre mesnetli ile alt ucu ankastreli kayıcı basit mesnetli ve üst ucu kayıcı basit mesnetli iki yataklama durumu için problem çözülmüş ve aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

Çizelge 4 incelendiğinde; en büyük kritik burkulma kuvvetinin, eşit boy ve hacme sahip enine kesitli çubuklarda, her iki yataklama durumunda da eşkenar üçgen enine kesitte olduğu anlaşılmaktadır. Eşkenar üçgen enine kesitli çubuğun kritik burkulma kuvveti 100 birim olarak alındığında, durum I için kare enine kesitli çubuğun burkulma kuvveti 87 birim, daire

enine kesitli çubuğun burkulma kuvveti de 83 birim olmaktadır. Durum II için de aynı inceleme yapıldığında, eşkenar üçgen enine kesitli çubuğun kritik burkulma yükü 100 birim iken, kare enine kesitli çubuğun burkulma kuvveti 86 birim, daire enine kesitli çubuğun burkulma kuvveti de 82 birim olarak elde edilmektedir.

Şekil 2 incelendiğinde; durum I'de, çubuk enine kesit alanının ankastreli kayıcı basit mesnette en büyük değerini aldığı ve kayıcı basit mesnetli diğer uçta sıfır olacak şekilde azalım gösterdiği anlaşılmaktadır. Durum II'de de çubuk enine kesit alanı, çubuğun orta noktasında sıfır değerini almakta ve her iki uçta en büyük değere ulaşacak şekilde uçlara doğru artım göstermektedir.

Bu çalışmada incelenen her iki yataklama durumunda; aynı kritik yük ve boya sahip iki çubuktan, sabit enine kesitli olanının hacminin değişken enine kesitli olanının hacmine oranı, yataklama durumu ve enine kesit formuna bağlı olmaksızın 1,15 çıkmaktadır. Bu da, belirli bir kritik yük için, çubuk enine kesitinin çubuk boyunca optimum olarak değişmesi ile, çubuk enine kesitinin sabit olmasına nazaran %15 hacimsel tasarruf demektir.

## KAYNAKLAR

- Arpakçı M. (2000): “Burkulma Zorlanmasında Optimum Enine Kesit Seçimi ve Malzeme Tasarrufu Üzerine Bir Araştırma”, E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, İzmir.
- Euler L. (1744): “De Curvis Elasticis”, Lausanne und Genf, 1744.
- Özdamar A. (1996a): “Das Knicken schwerer Gestänge”, Yayınlanmış Doktora Tezi, VWF Verlag für Wissenschaft und Forschung, Berlin.
- Özdamar A. (1996b): “Buckling of Heavy Bars”, Mathematical&Computational Applications, Vol. 1, Nr. 2, s.93-99.
- Özdamar A. (1997): “The Development of Euler Hyperbola in Heavy Bars”, Mathematical&Computational Applications, Vol.2, Nr. 3, s.137-140.
- Özdamar A., Pekbey Y. (2000): “Stabilite Teorisi Ders Notları”, Ege Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü, Yayınlanmamış Ders Notları, İzmir.
- Ratzersdorfer J. (1936): “Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken”, Springer Verlag, Wien, s.103-106.
- Tadjbakhsh I., Keller J.B. (1962): “Strongest Columns and Isoperimetric Inequalities for Eigenvalues”, J. App. Mec., Vol.29, No.1, s.154-164.