DEÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
FEN ve MÜHENDİSLİK DERGİSİ
Cilt: 2 Sayı: 2 sh. 107-112 Mayıs 2000

DAĞITIM PROBLEMİNİN OPTİMALLİK KOŞULLARININ İNCELENMESİ

(INVESTIGATION OF OPTIMALITY CONDITIONS OF THE TRANSPORTATION PROBLEM)

Süleyman ŞAFAK*

ÖZET/*ABSTRACT*

Bu çalışmada, m çıkış ve n varışlı bir dağıtım probleminin optimallik koşulları, Lagrange fonksiyonu ve Hessian matrisinin özellikleri kullanılarak incelenmiştir. Problemin ve indirgenmiş halinin aynı cebirsel özelliklere sahip olduğu görülmüştür.

In this study, optimality conditions of the transportation problem with m origins and n destinations have been investigated by using properties of Lagrange functions and Hessian matrix. It is shown that the problem and its reduced cases have common algebraic characterizations.

ANAHTAR KELİMELER/*KEY WORDS*

Dağıtım problemi, Lagrange fonksiyonu, Hessian matrisi
Transportation problem, Lagrange function, Hessian matrix

*Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, 35100, Bornova, İZMİR

1. GİRİŞ

Dağıtım problemi, doğrusal programlamanın ilk problemlerindendir. İlk kez 1941 de Hitchcock tarafından ortaya atılan, 1947 de Koopmans tarafından ayrıntıları ile incelenen ve 1951 de Dantzig tarafından Simplex yöntemi ile çözümü yapılan dağıtım problemi, kaynakların (sources) bir kümesinden tüketenlerin (sinks) bir kümesine minimum maliyette göndermeler olarak tanımlanır (Bazaraa vd., 1990; Bulut 1982, 1991; Bulut vd., 1993; Ford vd., 1962).

Dağıtım problemi, bir çok bilimci tarafından ele alınmış ve farklı yöntemlerle incelenmiştir (Bazaraa vd., 1990; Carre, 1979; Hu, 1970; Simonnard, 1966). Son yıllarda, dağıtım probleminin ağ (network) teknikleriyle incelenmesi dikkat çekmektedir. Bu çalışmada da, dağıtım problemi özel bir çizge (graph) problemi olarak ele alınmış ve problemin Lagrange fonksiyonu ile Hessian matrisinin özellikleri kullanılarak incelenmiştir. Elde edilen bulguların (Pyle, 1972) ve (Bulut, 1991) tarafından verilen sonuçları sağladığı görülmüştür.

2. DAĞITIM PROBLEMİ

m çıkış ve n varışlı bir dağıtım problemi

$$\text{Min}\left\{ \underline{c}^T \underline{x} \;\middle|\; M\underline{x} = \underline{\beta},\ 1_m \underline{a} = 1_n \underline{b},\ \underline{x} \geq 0 \right\} \tag{1}$$

dir. Burada

$$M = \begin{bmatrix} 1_n \otimes I_m \\ I_n \otimes 1_m \end{bmatrix},\quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^T = [a_1, a_2, ..., a_m],\ \ \underline{b}^T = [b_1, b_2, ..., b_n]$$

$$\underline{c}^T = [c_{11}, c_{12}, ..., c_{mn}],\ \ \underline{x}^T = [x_{11}, x_{12}, ..., x_{mn}]$$

1_m, tüm elemanları 1 olan 1xm boyutlu vektör ve $\otimes$, Kronecker çarpma işlemi olup; M

$$G \supset G_0 = (\ S, D, SxD) \tag{2}$$

ile tanımlı iki kısımlı çizgenin (bipartite graph) bağlantı matrisidir (Bulut, 1982).

Denklem 1'in, temel (basic) ve temel olmayan bilinmeyenlere bağlı olarak düzenlenebilir. Eğer $\underline{x}_B$ ve $\underline{x}_N$, sırası ile, temel ve temel olmayan bilinmeyenlerin vektörleri ve $|B| \neq 0$ ise, Denklem 1

$$\text{Min}\left\{ \underline{c}_B{}^T \underline{x}_B + \underline{c}_N{}^T \underline{x}_N \;\middle|\; B\underline{x}_B + N\underline{x}_N = \underline{\beta},\ \underline{x}_B \geq 0,\ \underline{x}_N \geq 0 \right\} \tag{3}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\underline{x}^T = [\ \underline{x}_B{}^T, \underline{x}_N{}^T\ ],\ \ \underline{c}^T = [\ \underline{c}_B{}^T, \underline{c}_N{}^T\ ]\ \text{ ve }\ A = [B, N]$$

dir. Denklem 3'ün Simplex çizelgesi

$$\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -\underline{c}_B^{\,T} B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & N & \underline{\beta} \\ \underline{c}_B^{\,T} & \underline{c}_N^{\,T} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B^{-1}N & B^{-1}\underline{\beta} \\ 0 & \underline{c}_N^{\,T} - \underline{c}_B^{\,T} B^{-1} N & -\underline{c}_B^{\,T} B^{-1}\underline{\beta} \end{bmatrix} \tag{4}$$

dir. Buradan

$$\underline{x}_B = B^{-1}\underline{\beta}, \quad \underline{x}_N = 0 \quad \text{ve} \quad \underline{c}^{\,T}\underline{x} = -\underline{c}_B^{\,T} B^{-1}\underline{\beta} \tag{5}$$

olduğu görülür.

Denklem 4'de, $\underline{d} = \underline{c}_N^{\,T} - \underline{c}_B^{\,T} B^{-1} N$ vektörüne Denklem 1'in optimallik koşulu denir. Eğer $\underline{d} \geq 0$ ise, $\underline{x}^T = [\, \underline{x}_B^{\,T}, \underline{x}_N^{\,T} \,]$ problemin en iyi çözümü olur. Eğer $\underline{d} < 0$ ise, $\underline{x}^T = [\, \underline{x}_B^{\,T}, \underline{x}_N^{\,T} \,]$ en iyi çözüm olmaz ve bu durumda Simplex yöntemi tekrar uygulanır (Bazaraa vd., 1990; Carre, 1979; Marlow, 1978; Simonnard, 1966).

M, (m+n)xmn boyutlu m+n-1 ranklı bir matristir. Bu nedenle, Denklem 1, Denklem 1'de $M\underline{x} = \underline{\beta}$ sisteminden m+n-1 denklem alınarak çözülebilir. Aşağıdaki problem, $M\underline{x} = \underline{\beta}$ sisteminin birinci denklemi kaldırılarak elde edilmiştir.

$$\underset{\underline{x}}{\mathrm{Min}} \left\{ \underline{c}^{\,T}\underline{x} \,\middle|\, T\underline{x} = \underline{g}, \underline{x} \geq 0 \right\} \tag{6}$$

dir. Burada

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \otimes I_{m-1} \\ I_n & I_n \otimes 1_{m-1} \end{bmatrix}, \ \underline{g}^T = \left[\, a_2, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \,\right] \tag{7}$$

dir (Bulut, 1982). Denklem 6'ya, Denklem 1'in indirgenmiş problemi denir. Dikkat edilirse, T matrisi (m+n-1)xmn boyutlu ve m+n-1 ranklı bir matristir.

3. DAĞITIM PROBLEMİNİN OPTİMALLİK KOŞULLARI

Denklem 6'da verilen problemin Lagrange fonksiyonu ve Hessian matrisi yazılabilir. Eğer $x_{ij} = w_{ij}^{\,2}$ alınırsa, Denklem 6

$$\mathrm{Min} \left\{ \underline{c}^{\,T}\underline{w} \,\middle|\, T\underline{w} = \underline{g} \right\} \tag{8}$$

biçiminde yazılabilir. Denklem 8'in Lagrange fonksiyonu

$$L(\underline{w}_B, \underline{w}_N, \underline{\lambda}) = \underline{c}_B^{\,T}\underline{w}_B + \underline{c}_N^{\,T}\underline{w}_N + \underline{\lambda}^T(\underline{g} - B\underline{w}_B - N\underline{w}_N) \tag{9}$$

olup

$$T = [\, B, N \,], \ \underline{c}^T = \left[\underline{c}_B^{\,T}, \ \underline{c}_N^{\,T} \right], \ \underline{w}^T = \left[\underline{w}_B^{\,T}, \ \underline{w}_N^{\,T} \right]$$

ve

$$\underline{w}^T = \left[w_{11}{}^2, w_{12}{}^2, ..., w_{mn}{}^2 \right]$$

dir. Burada $\underline{w}_B$ ve $\underline{w}_N$, sırası ile, temel ve temel olmayan bilinmeyenlerin vektörleridir. Denklem 9'dan

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{w}_B} = 2\left(\underline{c}_B{}^T - \underline{\lambda}^T B\right) D_B = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{w}_N} = 2\left(\underline{c}_N{}^T - \underline{\lambda}^T N\right) D_N = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} = \underline{g} - B\underline{w}_B - N\underline{w}_N = 0 \tag{12}$$

yazılır. Burada D_B ve D_N, sırası ile, köşegenleri temel ve temel olmayan değişkenler olan köşegen matrislerdir. Denklem 4, 10, 11 ve 12'den

$$\underline{\lambda}^T = \underline{c}_B{}^T B^{-1}\ ,\ \ \underline{w}_B = B^{-1}\underline{g},\ \ \underline{w}_N = 0 \tag{13}$$

ve

$$\underline{d}^T = \underline{c}_N{}^T - \underline{c}_B{}^T B^{-1} N \tag{14}$$

elde edilir. Burada $\underline{d}$, (m-1)(n-1)x1 boyutlu vektör olup; optimallik koşulu olarak adlandırılır. Denklem 9'un Hessian matrisi

$$H_B = 2\begin{bmatrix} P & 0 & Q \\ 0 & R & U \\ Q^T & U^T & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

olarak elde edilir. Burada

$$P = \text{Köş}\left\{ d_1, d_2, ..., d_{m+n-1} \right\},\ \ R = \text{Köş}\left\{ d_{m+n}, d_{m+n+1}, ..., d_{mn} \right\}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -w_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -w_{12} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -w_{1n} \\ -w_{21} & 0 & \cdots & 0 & -w_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w_{31} & \cdots & 0 & -w_{31} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -w_{m1} & -w_{m1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$U = \begin{bmatrix} -w_{22} & 0 & \cdots & 0 & -w_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -w_{32} & \cdots & 0 & -w_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -w_{m2} & -w_{m2} & 0 & \cdots & 0 \\ -w_{23} & 0 & \cdots & 0 & -w_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -w_{33} & \cdots & 0 & -w_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -w_{mn} & -w_{mn} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 3.1: Denklem 8'in optimal çözümü $\underline{w}_0$ ise

$$H_B(\underline{w}_0) = 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & Q \\ 0 & R & 0 \\ Q^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

dir. Burada, R pozitif tanımlı matristir.

Kanıt: Denklem 13, 14 ve 15 kullanılarak kanıtlanabilir. Varsayalım ki

$$\underline{d}^T = [\, d_{m+n},\ d_{m+n+1}, \ldots,\ d_{mn}\,]$$

olsun. Buna göre aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

Sonuç 3.1: $\underline{x}_0$**,** Denklem 7'nin en iyi çözümü ise $\underline{d}>0$ dır.

Sonuç 3.2: $H_B(\underline{w}_0)$ matrisinin özdenklemi

$$\left|H_B(\underline{w}_0) - \mu I\right| = 2^{mn+m+n-1}\mu^{m+n-1}(d_{m+n} - \mu)\ldots(d_{mn} - \mu)\left|\frac{1}{\mu}(BD_B{}^2B^T - \mu^2 I)\right| = 0 \tag{17}$$

dır.

Görüldüğü gibi, dağıtım probleminin optimal çözümü Q ve R matrislerine bağlıdır. Bu sonuç, dağıtım probleminin, Q ve R matrislerinin özellikleriyle incelenebileceğini göstermektedir. Burada, Q optimal çözümü ve R de optimallik koşulunu vermektedir. Ayrıca; $\underline{\lambda}^T = \underline{c}_B{}^T B^{-1}$ duyarlılık katsayısı ise ikilem (dual) probleminin çözümüne karşılık gelmektedir.

KAYNAKLAR

Bazaraa M.S., Jarvis J.J., Sherali H.D., (1990): "Linear Programming and Network Flows", Canada, John Wiley and Sons Inc.

Bulut H., (1982): "Bir Ağ Akışı Probleminin Genelleştirilmiş Ters Matrislerle İncelenmesi", İzmir, Doçentlik Tezi.

Bulut H., (1991): "Algebraic Characterizations of the Singular Value Decompositions in the Transportation Problem", J. Math. Anal. Appl., 154 , 13-21.

Bulut H., (1991): "Further Results on the Spectral Decomposition of an Incidence Matrix", J.Math. Anal. Appl., 158, 466-475.

Bulut H., Bulut S.A., (1993): "Spectral Decompositions and Generalized Inverses in a Circularization Network Flow Problem", J.Math. Anal. Appl., 174, 390-402.

Carre B., (1979): "Graph and Networks", New York, Oxford University Press.

Ford L.R., Fulkerson D.R., (1962): "Flows in Networks", New Jersey, Princeton University Press.

Hu T. C., (1970): "Integer Programming and Network Flows", London, Addison-Wesley.

Marlow W.H., (1978): "Mathematics for Operations Research", New York, John Wiley and Sons Inc.

Pyle L.D., (1972): "The Generalized Inverse in Linear Programming Basic Structure", SIAM J. Appl. Math., 22, pp.335-355.

Simonnard M., (1966): "Linear Programming", New Jersey, Prentice Hall.