

Bootstrap Metodu ve Uygulanışı Üzerine Bir Çalışma 2. Güven Aralıkları, Hipotez Testi ve Regresyon Analizinde Bootstrap Metodu

Çiğdem TAKMA¹

Hülya ATIL²

Summary

A Study on Bootstrap Method and It's Application II. Confidence Interval, Hypothesis Testing and Regression Analysis with Bootstrap Method

Recent years, Bootstrap Method have gained wide acceptance. Sampling from large population will cause loss of the time and costs in the applied statistics. Separate sets in the different sizes and quantities therefore can be constituted by replacement of observations in the samples from observed data set by using Bootstrap Method. This study was conducted to give information about application of Bootstrap Method in confidence intervals, hypothesis testing and regression analysis by using a macro called from Resampling Excel-add-in written in Excel program.

Key words: Bootstrap, Excel-add-in confidence interval, hypothesis testing, regression analysis

Giriş

İstatistikte bazı matematik metodlarının kullanımı çoğu araştırmacı tarafından zor ve ürkütücü bulunmaktadır. Araştırmacıların bu yaklaşımı analizlerde hata yapma olasılığını da artırmaktadır. İstatistiksel paket programlarının giderek yaygınlaşması ile yapılacak analizin uygunluğu ve yapılışı hakkında daha doğru kararlar alınabilmektedir. Bootstrap metodu uygulamalı istatistik alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu metodun esası, mevcut veri setinden çok büyük veri setleri üretmek üzere yeniden örnekleme yapmaktır (Sacchi, 1998).

¹ Arş.Gör. Dr. E.Ü.Z.F., Zootekni Bölümü, Biyometri-Genetik A.B.D., Bornova-İZMİR (cigdem.takma@ege.edu.tr)

² Prof. Dr. E.Ü.Z.F., Zootekni Bölümü, Biyometri-Genetik A.B.D., Bornova-İZMİR

Böylece küçük sayıdaki veri setleri için de çeşitli istatistikler belirlenebilmektedir.

Bootstrap metodu, yoğun matematik formüllerden uzak, sınırlı varsayımlara sahip, anlaşılması ve kullanılması oldukça kolay bir methodur (Simon ve Bruce, 1991). Bu yöntem, özellikle bilinen istatistiksel metodların ve varsayımların yetersiz kaldığı durumlarda güvenilir sonuçlar vermektedir. Bootstrap metodu, olasılıkta olduğu gibi (Takma ve Atıl, 2003), güven aralıkları, hipotez testi ve regresyon analizinde de kullanılmaktadır (Efron ve Tibshirani 1993).

Bu çalışmada, Excel programı altında çalışan Excel-add-in makrosu (Blank, 1999) yardımıyla Bootstrap metodunun güven aralıkları, hipotez testi ve regresyon analizinde kullanımı hakkında bilgi verilmesi amaçlanmıştır.

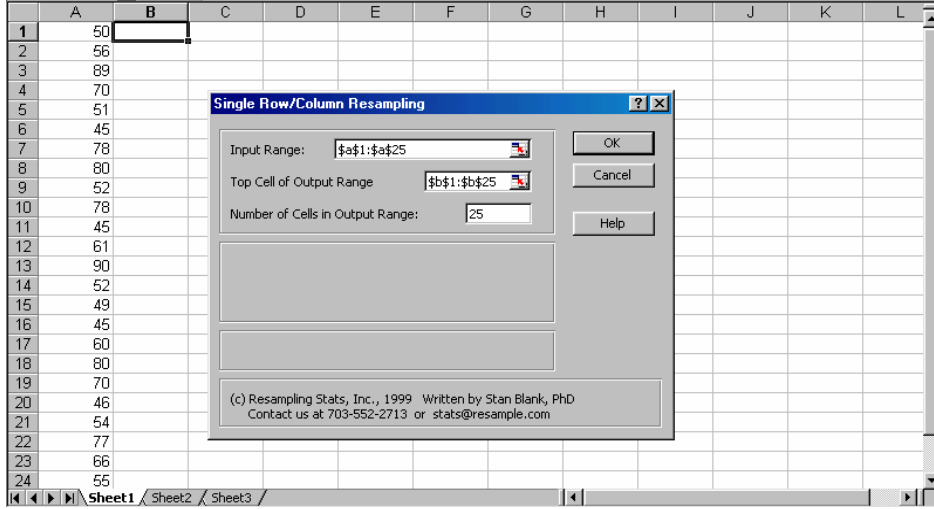
Güven Aralıkları ve Bootstrap Metodu

Genel olarak herhangi bir θ parametresi için güven aralığı, θ parametresinin nokta tahmininden daha fazla bilgi vermektedir. Güven aralıklarının oluşturulmasında çeşitli Bootstrap metodları önerilmektedir (Wehrens ve ark, 2000). Bu çalışmada, Klasik Bootstrap Metodu ile yaklaşık güven aralıklarının oluşturulmasında Bootstrap dağılışının örnek persentilleri kullanılmaktadır.

B Bootstrap örnek sayısı ve $\hat{\theta}^*$, tahminleyicisi olmak üzere sıralanmış değerler, $\hat{\theta}_1^* \leq \hat{\theta}_2^* \leq \dots \leq \hat{\theta}_B^*$ gibidir. Bootstrap güven aralığı, bootstrap sapmanın ve bootstrap standart hatanın tahminlemesine dayanmaktadır. θ parametresi için güven aralığı, $\hat{\theta}$ bu parametrenin tahminleyicisi olmak üzere, $\hat{\theta} - \theta$ 'nın olasılık dağılışı dikkate alınarak oluşturulmaktadır. $\hat{\theta} - \theta$ dağılışının α -persentili s_α ile gösterilirse, θ parametresinin güven aralığı $P(s_{\alpha/2} \leq \hat{\theta} - \theta \leq s_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$ gibi yazılmaktadır. $\hat{\theta} - \theta$ 'nın dağılışı $\hat{\theta}^* - \hat{\theta}$ dağılışına benzemektedir. Bir başka deyişle, $\hat{\theta} - \theta$ 'nın dağılışının quantilleri $\hat{\theta}^* - \hat{\theta}$ 'nın bootstrap dağılışının quantillerine yaklaşmaktadır. Bu nedenle, $\hat{\theta} - \theta$ 'nın dağılışının s_α persentilleri Bootstrap tahmininin quantilleri ile yer değiştirdiğinde Bootstrap güven aralığı $\hat{\theta} - s_{((B+1)(1-\alpha/2))}^* \leq \theta \leq \hat{\theta} - s_{((B+1)(\alpha/2))}^*$ şeklinde elde edilmektedir (Wehrens ve ark, 2000).

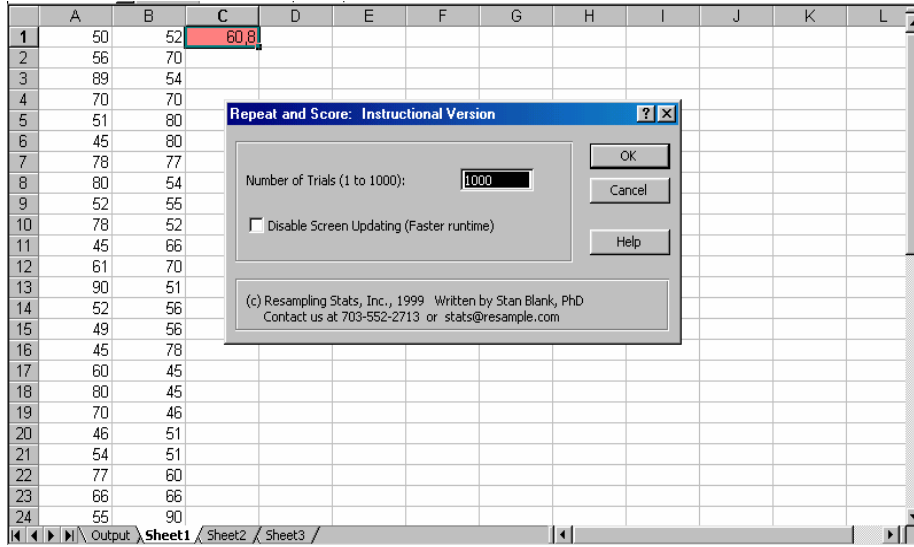
Uygulama

Bootstrap metodu ile güven aralıklarının hesaplanmasında 25 adet yumurtacı tavuğun 40. haftadaki yumurta ağırlıklarına ilişkin ölçümler kullanılmıştır. Bu ölçümlere ait %95'lik bootstrap güven aralığını oluşturmak için öncelikle “Resampling” menüsündeki “single row /column resampling” penceresi yardımı ile, A kolonundaki 25 gözlem değerinden şansa bağlı seçilen 25 adet gözlemlerle, B kolonunda yeni bir gözlem seti oluşturulmuştur (Şekil 1).

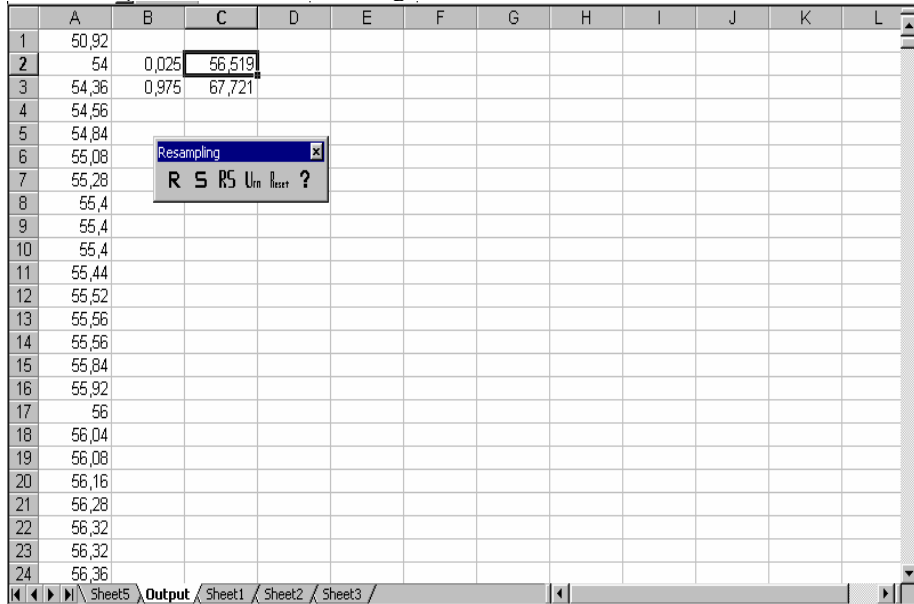


Şekil 1. Excel-Add-in “Single row /column resampling” penceresi

Bu yeni gözlem setinde tüm değerlerin ortalaması alınarak bir hücreye yazdırılmıştır. Bu işlemler 1000 kez yinelenmiş (Şekil 2) ve elde edilen 1000 ortalama bir çıktı dosyasına yazdırılmıştır (Şekil 3). Daha sonra ortalamalar küçükten büyüğe sıralanarak “PERCENTILE” komutuyla %95 güven aralığı hesaplanmıştır (Şekil3).



Şekil 2. Excel-Add-in ve güven aralıkları tahmini



Şekil 3. Ortalamalara ait çıktı dosyası ve güven aralıkları

Şekil 3'te görüldüğü gibi yumurta ağırlıkları için Bootstrap alt güven sınırı "56.52" ve üst güven sınırı "67.72" bulunmuştur. Hesaplanan bu aralık %95 olasılıkla tüm yumurta ağırlıkları ortalaması olan "58.65" gramı kapsamaktadır.

Hipotez Testi ve Bootstrap Metodu

Hipotez testi ile sıfır (H_0) hipotezine karşılık gösterilen alternatif hipotez (H_1) araştırılmaktadır. Hipotez testinde Bootstrap metodunun kullanılmasındaki amaç, mevcut veriler için özel bir dağılım varsayımına gerek duyulmadan testin yapılabilmesidir.

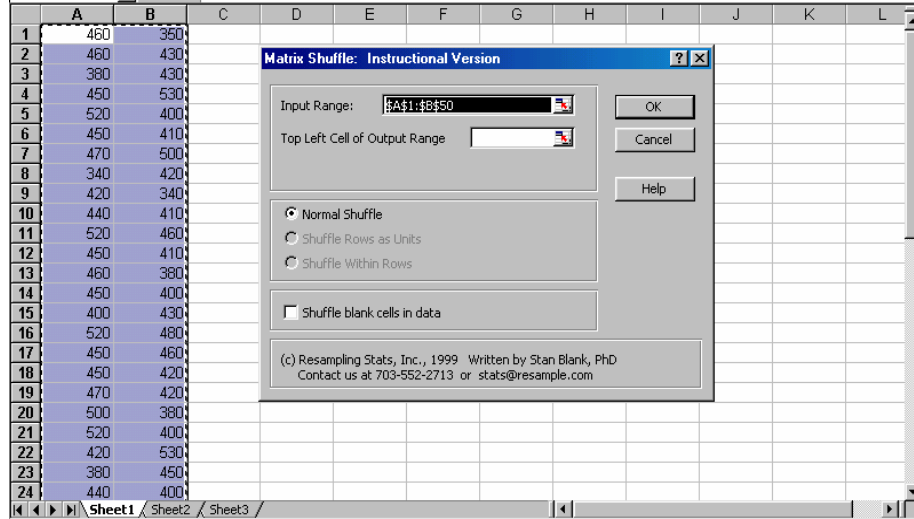
Bootstrap hipotez testinde aşağıdaki test istatistiği kullanılmaktadır:

$$t = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\text{se}(\hat{\theta})} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2}}$$

İki popülasyon ortalaması arasındaki farklılık araştırıldığında, alınan iki grup örnekten yer değiştirmeye yine aynı sayıda Bootstrap örnekleri elde edilmekte ve test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

Örneğin, yeni bir rasyonun etlik piliç canlı ağırlığını artırıp artırmadığını araştıralım. Bu amaçla, 50'şer adetlik iki farklı etlik piliç grubunun 3. hafta canlı ağırlıkları saptanmıştır. Buna göre H_0 ve H_1 hipotezleri $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ve $H_1: \mu_1 > \mu_2$ gibi olacaktır. I. tip hata olasılığı $\alpha = 0.05$ olarak seçildiğinde ilgili istatistik Bootstrap metodu kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

A kolonunda bulunan yeni rasyon ve B kolonunda bulunan eski rasyon uygulanan bireylere ait canlı ağırlık verileri program tarafından matris biçiminde algılanmaktadır. Bootstrap örneklerinin oluşturulması amacıyla bu gözlemler, "resampling" menüsündeki "Matrix Shuffle" seçeneğiyle yine iki ayrı (C ve D) kolonda bir kez karıştırılarak 50'şer adetlik örnekler elde edilmektedir (Şekil 4-5).



Şekil 4. Bootstrap metodu ile Bootstrap örneklerinin elde edilmesi

Şekil 5’de görüldüğü gibi yeni ve eski rasyon ortalamaları sırasıyla 445.8 ve 425.4 gr bulunmuştur. Buradan, yeni rasyonun eski rasyona göre etlik piliç canlı ağırlıklarını artırdığı görülmektedir. Bu artışın önemli olup olmadığını söylemek için, test istatistiğinin canlı ağırlık ortalamalarının farkının olasılık değerine bakılmalıdır.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	460	350	420	430	445,8	425,4	432,6	438,6		
2	480	430	480	380		ortalama A	ortalama B	ortalama C	ortalama D		
3	380	430	430	380		13,2		-6			
4	450	530	420	470		FARK		FARK			
5	520	400	380	440							
6	450	410	480	470							
7	470	500	480	460							
8	340	420	450	480							
9	420	340	500	530							
10	440	410	460	410							
11	520	480	420	440							
12	450	410	420	520							
13	480	300	350	430							
14	450	400	430	420							
15	400	430	450	420							
16	520	480	480	430							
17	450	460	420	530							
18	450	420	500	400							
19	470	420	350	520							
20	500	380	450	450							
21	520	400	470	520							
22	420	530	450	430							
23	380	450	370	420							
24	440	400	440	340							

Şekil 5. Bootstrap Metodu ile örnek ortalaması farklarının alınması

İki farklı canlı ağırlık veri seti ve bunların ortalamalarına ait farklar 100 defa alınıp bir çıktı dosyasına yazdırılmıştır (Şekil 5-6). Alınan sonuçlar içinde iki ortalama farkı olan “13.2” değerine eşit ve daha büyük olan ortalama farkların sayısı 100 deneme içinde 10 adet ($p=0.1$) bulunmuştur (Şekil 6). Buna göre, $\alpha=0.05$ için bulunan bu olasılık değeri büyük olduğundan yeni rasyonun etlik piliç canlı ağırlıklarını artırmadığı söylenebilmektedir.

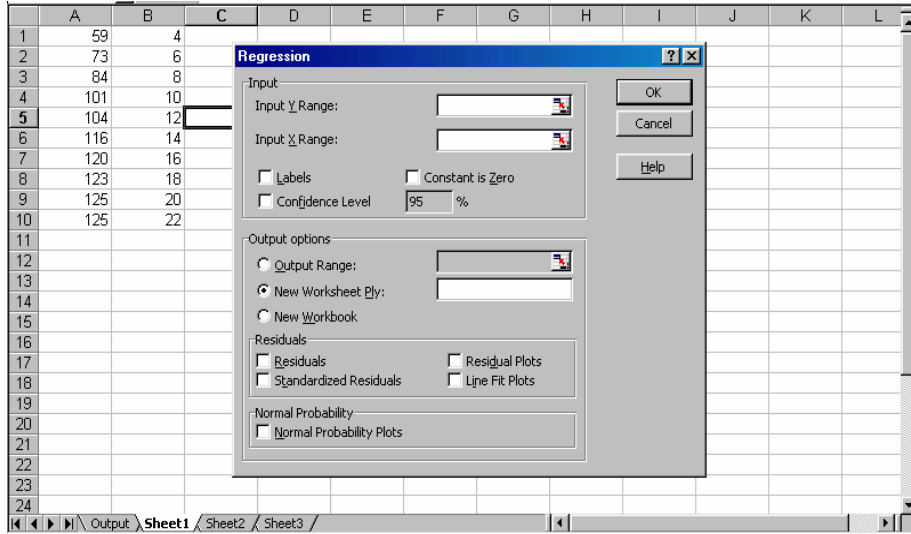
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
93	-8,8											
94	14											
95	-2											
96	-20											
97	-4,8											
98	8,4											
99	4,8											
100	-6											
101	10											
102												
103												
104												
105												
106												
107												
108												
109												
110												
111												
112												
113												
114												
115												
116												

Şekil 6. İki ortalama farkına eşit ve daha büyük ortalama farkların sayısı

Regresyon Analizi ve Bootstrap Metodu

Bootstrap regresyonu, parametrik varsayımların geçersizliğinden etkilenmemektedir. Örneğin, basit doğrusal regresyonda bir Bootstrap algoritması aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır: Öncelikle X_i ve Y_i değişkenleri için n sayıda gözlemden oluşan bir örnek seti elde edilmektedir. Gözlemlerin yer değiştirilmesiyle n adet gözlem yeniden örneklenmektedir. Yeni gözlem çifti X_{ij}^* , Y_{ij}^* ($i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, B$) olacaktır. En küçük kareler yöntemi kullanılarak b_{0j}^* ve b_{1j}^* tahminleyicileri hesaplanmaktadır. Yeniden örnekleme, yeni gözlem çiftlerinin elde edilmesi ve regresyon katsayılarının tahminlenmesi işlemleri bir çok kez tekrarlanmaktadır. Örneğin 1000 kez bu basamaklar tekrarlandığında β_0 ve β_1 için 1000 adet Bootstrap tahmini elde edilecektir. Bu tahminlerin ortalaması alınarak b_0 ve b_1 elde edilmektedir. Elde edilen bu tahminler Bootstrap regresyon tahminleridir (Wehrens ve ark, 2000).

Bootstrap metodunun regresyon analizinde uygulaması aşağıdaki örnek ile gösterilmektedir. Bu amaçla, bir yumurtacı tavuğun 4. haftadan 22. hafta yaşa kadar ikişer hafta aralıklarla ölçülen incik uzunlukları incelenmiştir. Excel-Add-in programında veri setinin tanımlaması “Data” menüsü, “Data Analysis” penceresindeki “Regression” seçeneği ile yapılmaktadır (Şekil 7). “Regression” penceresinde Y (incik uzunluğu) ve X (yaş) değişkenlerinin hücre adresleri belirtilebilmekte, çıktı dosyasının adı ve nereye yazdırılacağı tanımlanmakta, hatalar, standardize edilmiş hatalar ve bunlara ait grafikler istenebilmektedir (Şekil 7).



Şekil 7. Regresyon analizinde Bootstrap metodu tanımlamaları

Yapılan regresyon analizi sonucu elde edilen regresyon modeli F değeri, bu F değerinin önemliliği, regresyon denklemine ait katsayılar ve belirleme katsayısı değeri (R^2) Şekil 8’de verilmiştir.

Görüldüğü gibi, yaş ile incik uzunluğu arasında doğrusal bir ilişki vardır. Regresyon denklemi $\hat{Y} = 54.86 + 3.70X$ ($F=71.98^{**}$) ve $R^2 = 0.89$ olarak bulunmuştur.

SUMMARY OUTPUT								
Regression Statistics								
Multiple R	0,94867313							
R Square	0,89998071							
Adjusted R Square	0,8874783							
Standard Error	7,92856363							
Observations	10							
ANOVA								
	df	SS	MS	F	Significance F			
Regression	1	4525,10303	4525,10303	71,98457	2,85E-05			
Residual	8	502,8969697	62,8621212					
Total	9	5028						
	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	54,8606061	6,203163534	8,84397223	2,11E-05	40,55608	69,165136	40,556076	69,165136
X Variable 1	3,7030303	0,436453063	8,48437235	2,85E-05	2,696567	4,7094935	2,6965671	4,7094935
PROBABILITY OUTPUT								
Percentile	Y							

Şekil 8. Regresyon analizi sonuçları

Tartışma ve Sonuç

Bilgisayar teknolojisindeki ilerlemelere paralel olarak, istatistiksel hesaplamalarda da gelişmeler kaydedilmiştir. Yeni

yöntemlerin ortaya çıkışı ile uygulamalı istatistikte daha karmaşık problemler çözülebilmekte, detaylı araştırmalar yapılabilmektedir. Bootstrap metodu da son yıllarda geliştirilen bilgisayar destekli yöntemlerden biridir. Örneklere ait güvenilir tahminler veren bu metod Efron ve Tibshirani (1993) ile, herhangi bir istatistiğin örnek dağılışı tahminlenebilmektedir (Varian 2005).

Ayrıca, Bootstrap metodu inceleme konusu veri seti için herhangi bir varsayım taşımamaktadır. Bilinen klasik metodlarda, bazı analizler için gerekli olan varsayımların geçerliliğinden şüphe edildiğinde, elde edilen sonuçlara güvenilememektedir. Metod, bu durumlarda bile daha güvenilir çözümler vermektedir. Nitekim Bootstrap metodu, örnek dağılışının normal olmadığı durumlarda ya da çok küçük veri setlerinde varyans analizine göre üstünlük taşımaktadır. Öte yandan, klasik istatistik metodlar kullanılarak yapılan hesaplamalardan alınan sonuçlar ile Bootstrap metodu sonuçları benzerlik göstermektedir (Simon ve Bruce, 1991).

Bu çalışmada Bootstrap metodunun güven aralıkları, hipotez testi ve regresyon analizinde kullanımı ile ilgili olarak bilgiler verilmiş ve uygulamada oldukça kolay bir metod olduğu belirlenmiştir. Bunun yanı sıra, örnekler üzerinde klasik metodlarla yapılan hesaplama sonuçlarının Bootstrap metodu sonuçları ile benzer olduğu saptanmıştır. Bootstrap metodunun yukarıda söz edilen özelliklerle klasik metodlara göre üstünlüğü yapılan uygulamalarla ortaya konulmuştur.

Sonuç olarak, Bootstrap metodu klasik metodlara göre yukarıda söz edilen üstünlükleri ile tercih edilmektedir. Metodun kullanımının giderek yaygınlaşmasında farklı istatistiksel yöntemlerde kullanılan Bootstrap fonksiyonlarını içeren daha kapsamlı programların geliştirilmesinin yararlı olacağı düşünülmektedir.

Özet

Son yıllarda Bootstrap Metodu'nun kullanımı giderek yaygınlaşmıştır. Uygulamalı istatistikte büyük popülasyonlardan yapılan örnekleme zaman ve para kaybına neden olmaktadır. Bu nedenle, Bootstrap Metodu ile ölçüm yapılan veri setlerinde gözlemlerin yer değiştirilmesiyle farklı büyüklükte ve miktarlarda yeni veri setleri oluşturulabilmektedir. Bu çalışmada Bootstrap Metodu'nun güven aralıklarında, hipotez testinde ve regresyon analizinde uygulanışı, Excel programı altında yazılmış Resampling Excel-add-in makrosu yardımıyla yapılmıştır.

Anahtar sözcükler: Bootstrap, Excel-add-in güven aralıkları, hipotez testi, regresyon analizi

Kaynaklar

- Blank, S. 1999. Resampling Stats Excel Add-in, Online Trial Version, Resampling Stats, Inc. Eriřim:[<http://www.resample.com>, Ağustos, 2001].
- Efron, B. and R. Tibshirani, 1993. An introduction to the Bootstrap. Chapman and Hall. New York.
- Sacchi, M.D., 1998. A bootstrap procedure for high-resolution velocity analysis. Geophysics, Vol:63(5).
- Simon, J. L., and P. Bruce,. 1991. Resampling: A tool for everyday statistical work. Chance, 4(1), 22-32.
- Takma, Ç. ve H. Atıl, 2003. Bootstrap Metodu ve Uygulanışı Üzerine Bir Çalışma. 1. Olasılık ve Bootstrap Metodu. Ege Üniv. Ziraat Fak. Derg., 40(3):89-96.
- Wehrens, R., H. Putter, and L.M.C. Buydens, 2000. The bootstrap: a tutorial. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 54:35-52.
- Varian, H. 2005. Bootstrap Tutorial. Mathematica J., 9: 768-775.