MSU Fen Bil. Dergi., Cilt 6, Sayı 2, s 595-602 Araştırma Makalesi/ Research Article
MSU J. of Sci., Volume 6, Issue 2, p 595-602 DOI : 10.18586/msufbd.485733

G=S(1), G=S(2) ve alt Grubları için G- Yörüngeler

Muhsin İNCESU[1]🖉, Osman GÜRSOY[2]
[1]Matematik Eğitimi ABD, Eğitim Fakültesi, Muş Alparslan Üniversitesi, Muş, Türkiye.
[2]Matematik Bölümü, Eğitim Fakültesi, Maltepe Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.
✉: m.incesu@alparslan.edu.tr

Geliş (Received): 07.11.2018 Düzenleme (Revision):19.11.2018 Kabul (Accepted): 20.11.2018

ÖZ

(G, *) bir grup, X bir küme olmak üzere $G:X$ etkisi verilsin. Bir $x \in X$ noktası için $Gx = \{gx \,:\, g \in G\}$ kümesine *x* elemanının G- yörüngesi denir. (G, *) bir grup olmak üzere bir $x \in X$ elemanının kendisini içeren en küçük G-invaryant altküme *x*'in G-yörüngesidir. Bu çalışmada Benzerlik grubu G = S(n) ve tüm alt grupları için n=1 ve n=2 durumlarında G- invaryant alt uzaylar olan G- yörüngeler elde edilmiştir.
Anahtar Kelimeler: Benzerlik grubu, G- invariant altküme, G- yörüngeler

The G- orbits for *G=S(1)*, *G=S(2)* and their Subgroups

ABSTRACT

Let (G, *) is a group and *X* is a nonempty set and let group action $G:X$ are given. For any point $x \in X$ the set $Gx = \{gx \,:\, g \in G\}$ is called G- orbits of the element *x*. Let (G, *) is a group then, the smallest G- invariant subset containing $x \in X$ is G- orbit of *x*. In this paper G-orbits of the similarity group S(n) and all subgroups of it in case n=1 and n=2, which are G- invariant subspaces therewithal, are obtained.
Keywords: G- invariant subsets, G- orbits, Similarity group

GİRİŞ

Bir *G* dönüşüm grubunun herhangi bir küme üzerine etkisi *G:X* ile gösterilir. Bu etkiye *G* grubun *X* üzerinde hareketi de denir. Bir $x \in X$ elemanının G nin tüm dönüşümleri altındaki görüntülerinin kümesine *x* elemanının *G*- yürüngesi denir. (G, *) bir grup olmak üzere bir $x \in X$ elemanının kendisini içeren en küçük G-invaryant altküme *x*'in G-yörüngesidir ve bir G-invaryant altküme eğer bir noktayı kapsıyorsa onun yörüngesini de kapsamaktadır. İnvaryant altuzayların bulunması probleminin matematikte oldukça yaygın bir kullanım alanı vardır. Özellikle operatör teoride Hilbert uzaylarda ve tam sürekli operatörler için ve nonlineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan bir kavramdır [12-15].
Yörünge uzaylarının invaryant teoride pek çok alanda çalışıldığı görülür [1, 2, 10]. O(n) grubu için noktaların tam invaryant sistemini 1897 de E. Study vermiştir. Daha sonra bunu Hermann Weyl geliştirmiştir [16]. 1988 de, Djavvat Khadjiev, R. Aripov tüm öklid hareketlerinin grubu E(n) için bu problemi çözmüştür [17]. Daha sonra Weyl gösterimleri çok çeşitli alanlara uygulanmaya başlamıştır. Biyolojide bakterilerin sınıflandırılmasından, insanların kavramları algılama problemlerine kadar bir çok alana bu uygulamalar genişletilmiştir. Örneğin, E. Cassier [18], transformasyon grubunun invaryantlarını, algısal karakterizasyonlar olarak vermiştir. Daha sonra Hoffman [19,20] Lie transformasyon grupları ve Lie cebirlerine dayalı olarak algı teorisini geliştirmiştir. Bunları Chan ve Chan [21,22] ve Leyton [23] takip etmiştir. Invaryant parametrizasyon ve eğriler teorisi ile ilgili diğer çalışmalar [24-29] gösterilebilir.

MATERYAL ve YÖNTEM

Tanım: (G, *) bir grup, X bir küme ve $\mathrm{G} \times \mathrm{X} = \{ (\mathrm{g}, \mathrm{x}) \,;\, \mathrm{g} \in \mathrm{G}, \mathrm{x} \in \mathrm{X}\}$ olmak üzere $\varphi : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ dönüşümü verilsin. Eğer,

1. $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 * g_2, x)$, $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in X$;
2. $\varphi(e, x) = x$, $\forall x \in X$ *ve* e, G nin birim elemanı,

ise φ dönüşümüne G grubunun X kümesi üzerindeki etkisi denir. Bu etki $G:X$ ile $\varphi(g,x)$ ifadesi de *gx* ile belirtilir.

Örnek $G = LH(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda > 0, \lambda \in R \right\}$ kümesini alalım. Bu küme, matrislerin çarpma işlemine göre bir gruptur. G grubunun X = R^2 üzerindeki $G : R^2$ etkisini, $g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\varphi : \mathrm{G} \times \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$$
$$(\mathrm{g}, \mathrm{x}) \xrightarrow{\varphi} \varphi(\mathrm{g}, \mathrm{x}) = \mathrm{gx}$$

yani g matrisinin x sütun matrisi ile çarpımı olarak tanımlayalım. Gerçekten bu bir etkidir: Her

$$g_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix},\ g_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\in G \quad \text{ve} \quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in R^2$$

için,

1. $\varphi(g_1,\varphi(g_2,x))=\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda_2 x_1\\ \lambda_2 x_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\lambda_1\lambda_2 x_1\\ \lambda_1\lambda_2 x_2\end{pmatrix}$
$=\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right)$
$=\varphi(g_1g_2,x)$
2. $\varphi(1,x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix};\quad \forall x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in R^2$ ve $1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in$ G birim eleman.

dır. ♦

G bir grup olmak üzere, $\varphi_1=G:X_1$ ve $\varphi_2=G:X_2$ de G grubunun verilen X_1 ve X_2 kümeleri üzerindeki iki etkisi olsun.

$X_1xX_2=\{(x_1,x_2):x_1\in X_1,x_2\in X_2\}$ olmak üzere

$$\varphi:G\times(X_1xX_2)\to X_1xX_2$$
$$(g,(x_1,x_2))\xrightarrow{\varphi}\varphi(g,(x_1,x_2))=(\varphi_1(g,x_1),\varphi_2(g,x_2))$$

dönüşümü de bir etkidir. Bu etkiyi $\varphi=G:X_1xX_2$ ile göstereceğiz. Şimdi bunun bir etki olduğunu gösterelim:

φ_1 ve φ_2 birer etki olduklarından,

1. $\varphi(g_1,\varphi(g_2,(x_1,x_2)))=\varphi(g_1,(\varphi_1(g_2,x_1),\varphi_2(g_2,x_2)))=\varphi(g_1,(\varphi_1(g_2,x_1),\varphi_2(g_2,x_2)))$
$=(\varphi_1(g_1,\varphi_1(g_2,x_1)),\varphi_2(g_1,\varphi_2(g_2,x_2)))$
$=(\varphi_1(g_1g_2,x_1),\varphi_2(g_1g_2,x_2))$
$=\varphi(g_1g_2,(x_1,x_2))$
2. $\varphi(e,(x_1,x_2))=(\varphi_1(e,x_1),\varphi_2(e,x_2))=(x_1,x_2)$; $\forall\ (x_1,x_2)\in X_1xX_2$ ve $e\in$ G birim eleman.

Örnek: $G=LS(1)$ olmak üzere , $\varphi_1=G:R$ öyleki $\varphi_1(r,x)=rx$ ve $\varphi_2=G:R$ öyleki $\varphi_2(r,x)=r^2x$ verilsin.

$R^2=RxR=\{(x_1,x_2):x_1\in R,x_2\in R\}$ olmak üzere

$$\varphi:G\times R^2\to R^2$$
$$(r,(x_1,x_2))\xrightarrow{\varphi}\varphi(r,(x_1,x_2))=(\varphi_1(r,x_1),\varphi_2(r,x_2))$$

dönüşümü de bir etkidir. Şimdi bunun bir etki olduğunu gösterelim: φ_1 ve φ_2 birer etki olduklarından,

1. $\varphi(r_1,\varphi(r_2,(x_1,x_2)))=\varphi(r_1,(\varphi_1(r_2,x_1),\varphi_2(r_2,x_2)))$
$=\varphi(r_1,(r_2x_1,r_2{}^2x_2))$
$=(\varphi_1(r_1,r_2x_1),\varphi_2(r_1,r_2{}^2x_2))$
$=(r_1r_2x_1,r_1{}^2r_2{}^2x_2)$
$=\varphi(r_1r_2,(x_1,x_2))$
2. $\varphi(e,(x_1,x_2))=(\varphi_1(e,x_1),\varphi_2(e,x_2))=(x_1,x_2)$; $\forall\ (x_1,x_2)\in X_1xX_2$ ve $e\in$ G birim eleman.

dır. ♦

Bir $\varphi:G\times X\to X$ dönüşümüyle verilen bir etkide $g\in G$ elemanını seçip sabitlediğimizde

$$\varphi:G\times X\to X$$
$$(g,x)\xrightarrow{\varphi}\varphi(g,x)=gx$$

dönüşümü

$$\varphi(g,.):X\to X$$
$$x\xrightarrow{\varphi(g,.)}\varphi(g,x)=gx$$

dönüşümüne indirgenmiş olur.

Tanım: G bir grup olmak üzere , $\varphi_1=G:X_1$ ve $\varphi_2=G:X_2$ de G grubunun verilen X_1 ve X_2 kümeleri üzerindeki iki etkisi olsun. Eğer, $\exists F:X_1\longrightarrow X_2$ birebir ve örten dönüşümü,

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{F} & X_2\\ \varphi_1(g,.)\downarrow & & \downarrow\varphi_2(g,.)\\ X_1 & \xrightarrow[F]{} & X_2\end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde ya da $F\circ\varphi_1(g,.)=\varphi_2(g,.)\circ F$ eşitliğini sağlayacak biçimde bulunabilirse φ_1 ve φ_2 etkilerine denktir denir.

Örnek: $G=LH(2)$ olsun. G grubunun $X_1=\{(x,y):y>x\}\subset R^2$ ve $X_2=\{(x,y):x>y\}\subset R^2$ kümeleri üzerindeki etkileri $\lambda=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\varphi_1:G\times X_1\to X_1$$
$$(\lambda,(x,y))=\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{\varphi_1}\varphi_1(\lambda,(x,y))=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\end{pmatrix}$$

ve

$$\varphi_1:G\times X_2\to X_2$$
$$(\lambda,(x,y))=\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{\varphi_2}\varphi_2(\lambda,(x,y))=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\end{pmatrix}$$

olarak verilsin. Bu durumda bir $F : X_1 \to X_2$ dönüşümü olarak $F(x,y)=(y,x)$ alınabilir. F, birebir ve örten bir dönüşümdür. Buna göre;

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{F} & X_2 \\ \varphi_1(\lambda,.)\downarrow & & \downarrow\varphi_2(\lambda,.) \\ X_1 & \xrightarrow[F]{} & X_2 \end{array}$$

$$(F\circ\varphi_1(\lambda,.))(x,y)=F(\varphi_1(\lambda,.)(x,y))=F(\varphi_1(\lambda,(x,y)))=F(\lambda x,\lambda y)=(\lambda y,\lambda x)$$

öte yandan

$$(\varphi_2(\lambda,.)\circ F)(x,y)=\varphi_2(\lambda,.)(F(x,y))=\varphi_2(\lambda,.)(y,x)=\varphi_2(\lambda,(y,x))=(\lambda y,\lambda x)$$

olur. Böylece bu diyagramın değişmeli olduğu görülür. Buna göre bu iki etki denktir.

G- Denk Noktalar ve G- Yörünge

Tanım: G bir grup ve $\varphi = G : X$ etkisi verilmiş olsun Eğer $\forall\, h \in H$ ve $\forall g \in G$ için $gh \in H$ ise $H \subset X$ altkümesine *G*-invaryant altküme denir.

Bu tanımda *H* olarak $H=\{x_0\}\subset X$ alındığında; $\forall g \in G$ için $gx_0 = x_0$ ise bu x_0 noktasına *G*-invaryant nokta denir.

Tanım: $G : X$ verilsin. Bir $x \in X$ noktası için

$$Gx=\{gx : g\in G\}$$

kümesine x elemanının *G*-yörüngesi denir.

Önerme: $G : X$ etkisi verilmiş olsun. *Keyfi* $x \in X$ elemanının G- yörüngesi bir G-invaryant altkümedir.

İspat: $x \in X$ elemanının G- yörüngesi $Gx=\{gx : g\in G\}$ dir. Şimdi $Gx \subset X$ in bir G-invaryant altküme olduğunu gösterelim. Bunun için her $y \in Gx$ ve her $g \in G$ için $gy \in Gx$ olduğunu göstermeliyiz. $y \in Gx$ olduğundan $\exists g_1 \in G$ öyleki $y = g_1 x$ dir. Buna göre $gy = g(g_1 x)$ yazabiliriz. Etkinin tanımından $g(g_1x)=(gg_1)x$ dir. G bir grup ve $g^* = gg_1 \in G$ olduğundan $gy = g^* x \in Gx$ dir.

Önerme: $G : X$ etkisi verilmiş olsun. Keyfi bir $x \in X$ elemanının G- yörüngesi Gx olmak üzere Gx -in kendisinden farklı G-invaryant altkümesi yoktur.

İspat: $H \subset Gx$ alalım ve *H*, G-invaryant altküme olsun. $H = Gx$ olduğunu gösterelim. e, G nin birim elemanı olmak üzere $x = ex$ ve $e \in G$ olduğundan $x \in Gx$ dir. $y \in H$ olsun. Bu takdirde $\exists g_1 \in G$ öyleki $y = g_1 x \in H$ dir. H, G-invaryant altküme olduğundan her $g \in G$ için $gy = g(g_1x)\in H$ dir. O halde $g = g_1^{-1}$ için de doğrudur. Dolayısıyla, $gy = g_1^{-1}(g_1x)=(g_1^{-1}g_1)x = x \in H$ dir. $x \in H$ ve H, G-invaryant altküme ve her $g \in G$ için $gx \in H$ olduğundan $Gx \subset H$ dir. Buradan $Gx = H$ elde edilir. ♦

Burada bu önerme ile şu gösterilmiş oldu: bir G-invaryant altküme eğer bir noktayı kapsıyorsa onun yörüngesini de kapsamaktadır ve bir elemanın kendisini içeren en küçük G-invaryant altküme o elemanın yörüngesidir. Yani bir $x \in X$ için *x*- i kapsayan en küçük G-invaryant altküme *Gx* dir.

Sonuç: *Keyfi* $a \in Gx$ *için* $Ga = Gx$ *dir.*

İspat: Önceki önermelerden kolayca görülebilir.

Önerme: G bir grup ve $G : X$ etkisi verilmiş olsun. $x, y \in X$ ($x \neq y$) noktalarının yörüngeleri Gx ve Gy ler olmak üzere $Gx \cap Gy \neq \varnothing$ ise, $Gx = Gy$ dir. Başka bir ifade ile $Gx \neq Gy$ ise $Gx \cap Gy = \varnothing$ dir.

İspat: Varsayalım ki $Gx \cap Gy \neq \varnothing$ olsun. Bu takdirde $a \in Gx \cap Gy$ elemanı mevcuttur. Bir önceki Sonuç'a göre $Ga = Gx$ ve $Ga = Gy$ dir. Dolayısıyla $Gx = Gy$ dir. ♦

Tanım: G bir grup ve $G : X$ etkisi verilmiş olsun. Eğer, $\exists g \in G$ öyleki $x_2 = gx_1$ ise $x_1, x_2 \in X$

noktalarına G-denk noktalar denir. Bu noktaların G-denk olması $x_1 \overset{G}{\sim} x_2$ şeklinde gösterilir.

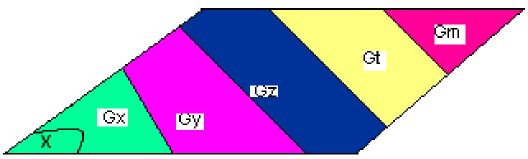
Önerme: Noktaların G- denklik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: 1. $x_1 \overset{G}{\sim} x_1$ dir. Çünkü e, G nin birim elemanı olmak üzere $x_1 = ex_1$ dir.

2. $x_1 \overset{G}{\sim} x_2$ olsun. Bu takdirde bir $g \in G$ vardır öyleki, $x_2 = gx_1$ dir. Bu durumda $g^{-1}x_2 = (g^{-1}g)x_1 = x_1$ olacağından $x_2 \overset{G}{\sim} x_1$ dir.

3. $x_1 \overset{G}{\sim} x_2$ ve $x_2 \overset{G}{\sim} x_3$ olsun. Buna göre bir $g_1 \in G$ vardır, öyleki $x_2 = g_1 x_1$ dir ve bir $g_2 \in G$ vardır öyleki, $x_3 = g_2 x_2$ dir. O halde $x_3 = g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)x$ ve $g_2 g_1 \in G$ olduğundan $x_1 \overset{G}{\sim} x_3$ dir. Dolayısıyla $\overset{G}{\sim}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. ♦

Böylece bir elemanın $\overset{G}{\sim}$ bağıntısına göre denklik sınıfları o elemanın G- yörüngeleridir. Bu $\overset{G}{\sim}$ bağıntısı kümenin elemanlarını arakesitleri boş olan denklik sınıflarına ayırmaktadır.



Şekil 1. X kümesinin elemanlarının $\overset{G}{\sim}$ bağıntısına göre yörüngeleri.

TARTIŞMA ve SONUÇ

Benzerlik Grupları İçin G- Yörüngeler

Bu çalışmada benzerlik grupları denince, benzerlik dönüşümlerin grubu ve bu grubun tüm alt grupları anlaşılacaktır. Şimdi n boyutlu uzayda benzerlik gruplarını ifade edelim.

1- $O(n) = \{ f : R^n \to R^n \mid f(x) = gx; g^{-1} = g^T \}$

2- $SO(n) = \{ f : R^n \to R^n \mid f(x) = gx; g^{-1} = g^T; \det g = +1 \}$

3- $Tr(n) = \{ f : R^n \to R^n \mid f(x) = x + b; b \in R^n \}$

4- $E(n) = \{ f : R^n \to R^n \mid f(x) = gx + b; g \in O(n); b \in R^n \}$

5- $SE(n) = \{ f : R^n \to R^n \mid f(x) = gx + b; g \in SO(n); b \in R^n \}$

6- $LH(n) = \{ f : R^n \to R^n \mid f(x) = \lambda x; \lambda > 0 \}$

7- $H(n) = \{ f : R^n \to R^n \mid f(x) = \lambda x + b; \lambda > 0; b \in R^n \}$

8- $LS(n) = \{ f : R^n \to R^n \mid f(x) = \lambda gx; g \in O(n); \lambda > 0 \}$

9- $SLS(n) = \{ f : R^n \to R^n \mid f(x) = \lambda gx; g \in SO(n); \lambda > 0 \}$

10- $SS(n) = \{ f : R^n \to R^n \mid f(x) = \lambda gx + b; g \in SO(n); \lambda > 0; b \in R^n \}$

11- $S(n) = \{ f : R^n \to R^n \mid f(x) = \lambda gx + b; g \in O(n); \lambda > 0; b \in R^n \}$

Şimdi tüm bu grupların n = 1 durumunda R deki, n = 2 durumunda da R^2 deki G-yörüngelerini bulalım:

1- SO(1) : R etkisini alalım. Bu etki gx biçiminde iki reel sayının çarpımı olarak verilsin. SO(1) = {1} olduğundan bu etki $\varphi(1, x) = x$ olur. Buna göre

Teorem: bir $x \in R$ elemanının SO(1) yörüngesi $Gx = \{x\}$ dir. Yani SO(1) R yi tek noktalı yörüngelere ayırır.
Böylece R de sonsuz sayıda SO(1)- yörünge mevcuttur.

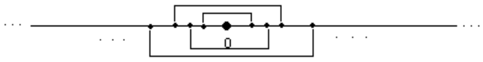
Şekil 2. R nin $SO(1)$ yörüngeleri

2- *O(1) : R* etkisini alalım. Bu etki *gx* biçiminde iki reel sayının çarpımı olarak verilsin. O(1) = {-1, 1} olduğundan bu etki $\varphi(1, x) = x$ ya da $\varphi(1, x) = -x$ biçiminde olur. Buna göre

Teorem: Bir $x \in R$ elemanının O(1) yörüngesi $Gx = \{\pm x\}$ dir. Yani O(1), R yi en fazla iki noktadan oluşan yörüngelere ayırır. O halde yörüngeler,

$$Gx = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \pm x & x \neq 0 \end{cases}$$

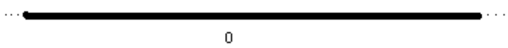
dir.



Şekil 3. R nin *O*(1) yörüngeleri

3- SE(1) : R ve Tr(1) : R etkilerini alalım. Bu etkiler $\varphi(x) = x + b \; , b \in R$ biçiminde olur. Buna göre

Teorem: Bir $x \in R$ elemanının SE(1) yörüngesi R nin kendisidir. Yani $Gx = R$ dir.



Şekil 4. R nin *SE*(1), *E*(1), *Tr(1), H(1),SS(1), S*(1) yörüngesi

4- E(1): R etkisini alalım. Bu etki $\varphi(x) = x + b \; , b \in R$ ya da $\varphi(x) = -x + b \; , b \in R$ biçiminde olur. Buna göre

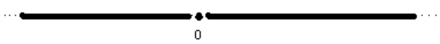
Teorem: Bir $x \in R$ elemanının E(1) yörüngesi de R nin kendisidir. Yani $Gx = R$ dir.

5- LH(1): R etkisini alalım. Bu etki gx biçiminde iki reel sayının çarpımı olduğundan bu etki $\varphi(x) = \lambda x \; , \lambda > 0$ olur. Buna göre

Teorem: Bir $x \in R$ elemanının LH(1) yörüngesi

$$Gx = \begin{cases} (-\infty, 0) & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ (0, \infty) & , x > 0 \end{cases}$$

dir. Yani LH(1), R yi 3 yörüngeye ayırır.



Şekil 5. R nin *LH*(1), *SLS*(1) yörüngeleri

6- H(1): R etkisini alalım. Bu etki $\varphi(x) = \lambda x + b \; , \lambda > 0, b \in R$ olur. Buna göre

Teorem: Bir $x \in R$ elemanının H(1) yörüngesi R nin kendisidir. Yani $Gx = R$ dir.

7- LS(1): R etkisini alalım. Bu etki $\varphi(x) = \lambda x \; , \lambda \neq 0$ biçiminde olur. Buna göre

Teorem: Bir $x \in R$ elemanının LS(1) yörüngesi

$$Gx = \begin{cases} \{0\} & x = 0 \\ R - \{0\} & x \neq 0 \end{cases}$$

dir. Yani LS(1), R yi 2 yörüngeye ayırır.

Şekil 6. R nin LS(1) yörüngeleri

8- SLS(1): R etkisini alalım. SLS(1) ve LH(1) çakışır. Buna göre

Teorem: SLS(1)- in R deki yörüngeleri LH(1) in yörüngeleri ile aynıdır.

9- SS(1) : R etkisini alalım. SS(1) ve H(1) çakışır. Buna göre

Teorem: SS(1) - in R deki yörüngeleri H(1) in yörüngeleri ile aynıdır.

10- S(1): R etkisini alalım. Bu etki $\varphi(x) = \lambda x + b \; , b \in R, \lambda \neq 0$ biçiminde olur. Buna göre

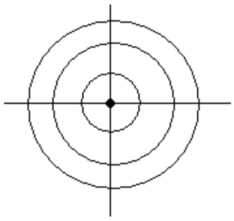
Teorem: Bir $x \in R$ elemanının S(1) yörüngesi de R nin kendisidir. Yani $Gx = R$ dir.

11- SO(2) : R ^{2} etkisini alalım. Bu etki $g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2)$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ olmak üzere $\varphi(x) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ biçiminde olur. Buna göre

Teorem: Bir $x \in R^2$ elemanının SO(2) yörüngesi

$$Gx = \begin{cases} (0,0), & x = (0,0) \\ C(0,r), \; r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & x \neq (0,0) \end{cases}$$

dir. Yani SO(2), R^2 yi orjin ve orjin merkezli çemberlerden oluşan yörüngelere ayırır.



Şekil 7. R^2 nin SO(2) ve O(2) nin yörüngeleri

12- O(2) : R^2 etkisini alalım. Bu etki $g \in SO(2)$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ olmak üzere

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g$$

biçiminde ifade edilirse $\varphi(x) = wx$ olur. Buna göre

Teorem: Bir $x \in R^2$ elemanının O(2) yörüngesi

$$Gx = \begin{cases} (0,0), & x = (0,0) \\ C(0,r),\ \mathrm{r} = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}} & x \neq (0,0) \end{cases}$$

dir. Yani O(2) de, R^2 yi orijin ve orijin merkezli çemberlerden oluşan yörüngelere ayırır.

13- SE(2): R^2 etkisini alalım. Bu etki

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in \text{SO(2)}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in R^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{biçiminde}$$

olur. Buna göre

Teorem: Bir $x \in R^2$ elemanının SE(2) yörüngesi R^2 nin kendisidir. Yani

$$Gx = R^2$$

dir.

14- E(2): R^2 etkisini alalım. Bu etki

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in \text{O(2)}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in R^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{biçiminde}$$

olur. Buna göre

Teorem: Bir $x \in R^2$ elemanının E(2) yörüngesi R^2 nin kendisidir. Yani $Gx = R^2$ dir.

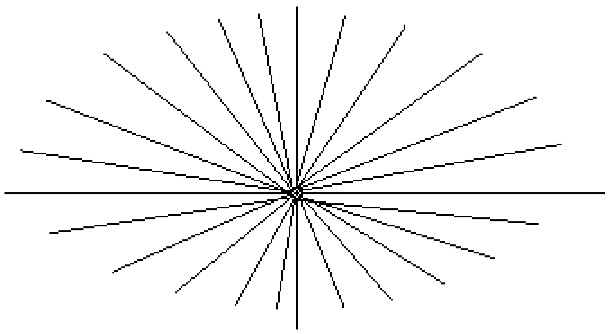
15- LH(2): R^2 etkisini alalım. Bu etki $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ olmak üzere

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

biçiminde olur. Buna göre

Teorem: Bir $x \in R^2$ elemanının LH(2) yörüngesi sıfır noktası için sıfır, diğer noktalar için ise başlangıç noktası orijin olan yarıdoğrudur (burada orjin yani (0,0) noktası yarıdoğrulara dahil değildir) .

Yani LH(2), R^2 yi orijin ve orijin çıkışlı açık yarıdoğrulardan oluşan yörüngelere ayırır.



Şekil 8. R^2 nin LH(2) yörüngeleri

16- H(2): R^2 etkisini alalım. Bu etki $\varphi(x) = \lambda x + b \ , \lambda > 0, b \in R^2$ biçiminde olur. Buna göre

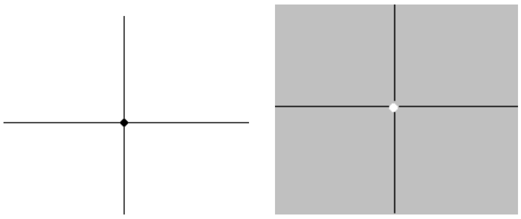
Teorem: Bir $x \in R^2$ elemanının H(2) yörüngesi R^2 nin kendisidir. Yani $Gx = R^2$ dir.

17- LS(2): R^2 etkisini alalım. Bu etki $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in$ O(2) ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ olmak üzere $\varphi(x)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ biçiminde olur. Buna göre

Teorem: Bir $x\in R^2$ elemanının LS(2) yörüngesi

$$Gx=\begin{cases}(0,0) & x=(0,0)\\ R^2-\{(0,0)\} & x\neq(0,0)\end{cases}$$

dir. Yani LS(2), R^2 yi 2 yörüngeye ayırır.



Şekil 9. R^2'nin LS(2) ve SLS(2) yörüngeleri

18- SLS(2): R^2 etkisini alalım. Bu etki $g=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\in$ SO(2) ve $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in R^2$ olmak üzere $\varphi(x)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ biçiminde olur. Buna göre

Teorem: Bir $x\in R^2$ elemanının SLS(2) yörüngesi

$$Gx=\begin{cases}(0,0) & x=(0,0)\\ R^2-\{(0,0)\} & x\neq(0,0)\end{cases}$$

dir. Yani SLS(2), R^2 yi 2 yörüngeye ayırır.

19- SS(2): R^2 etkisini alalım. Bu etki $g=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\in$ SO(2), $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}\in R^2$ olmak üzere $\varphi(x)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ biçiminde olur. Buna göre

Teorem: Bir $x\in R^2$ elemanının SS(2) yörüngesi R^2 nin kendisidir. Yani

$$Gx=R^2$$

dir.

20- S(2): R etkisini alalım. Bu etki $g=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\in$ O(2), $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}\in R^2$ olmak üzere $\varphi(x)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ biçiminde olur. Buna göre

Teorem: Bir $x\in R^2$ elemanının S(2) yörüngesi de R^2 nin kendisidir. Yani $Gx=R^2$ dir.

ORCID

Muhsin İncesu http://orcid.org/0000-0003-2515-9627
Osman Gürsoy http://orcid.org/0000-0002-6391-6214

KAYNAKÇA

[1] Sartori G. A theorem on orbit structures (strata) of compact linear Lie groups, Journal of Mathematical Physics, 24:4 765-768, 1983.

[2] Symonds P., The orbit space of the p-subgroup complex is contractible, Commentarii Mathematici Helvetici, 73 400-405, 1998.

[3] Kenzi O. Generic homeomorphisms have the pseudo-orbit tracing property, Proceeding American Mathematical Society, 110 281-284, 1990.

[4] Mukhi S. SL(2,R) conformal field theory, minimal models and two dimensional gravity, Modern Quantum Field Theory Proceedings of the International Colloquium International Colloquium on Modern Quantum Field Theory, TIFR, Bombay, India, 1991.

[5] Gatto R., Sartori G. Zeros of the *D*-term and complexification of the gauge group in supersymmetric theories, Physics Letters B, 157: 5–6 389-392, 1985.

[6] Richardson R.W. Affine Coset Spaces of Reductive Algebraic Groups, Bulletin of the London Mathematical Society, 9:1 38-41,1977.

[7] Ozeki I. On the microlocal structure of the regular prehomogeneous vector space associated with $\mathrm{SL}\left(5 \right) \times \mathrm{GL} \left(4 \right)$. I. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 55:2 37-40,1979.

[8] Kirillov S.A., Kuznetsov M.I., Chebochko N.G. on deformations of the lie algebra of type g_2 of characteristic 3, Russian Mathematics (Iz. VUZ), 44:3 31-36, 2000.

[9] Guralnick RM., Invertible Preservers and Algebraic Groups II: Preservers of Similarity Invariants and Overgroups of $PSL_n(F)$, Linear and Multilinear Algebra, 43:1-3 221-255, 1997.

[10] Hinrichsen D., O'Halloran J. A Complete Characterization of Orbit Closures of Controllable Singular Systems under Restricted System Equivalence, SIAM J. Control and Optimization, 28:3 602-623, 1990.

[11] Incesu M. The complete system of point invariants in the similarity geometry. PhD Thesis,Karadeniz Technical University, Trabzon. 2008.

[12] Kolmogoroff A.N. Interpolation und Extrapolation, Bull. Acad. Sci. U.S.S.R. Ser. Math. 5 3-14, 1941.

[13] Wiener N. Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, New York, 1949.

[14] Aronszajn N., Stmith K.T. invariant subspaces of completely continuous operators, Annals of Mathematics 60:2 345–350, 1954.

[15] Galaktionov VA. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 125A 225-246,1995.

[16] Weyl H. The Classical Groups, Their Invariants and Representations, 2nd ed., with suppl.. Princeton, Princeton University Press, 1946.

[17] Khadjiev Dj. An Application of the Invariant Theory to the Differential Geometry of Curves, Fan, Tashkent, 1988. (in Russian)

[18] Cassier E.T. The concept of group and the theory of perception, Philosophy and Phenomenological Research,5 1-35, 1944.

[19] Hoffman W.C. The Lie algebra of visual perception, Journal of Mathematical Psychology, 3 65-98, 1966.

[20] Hoffman W.C. The Lie transformation group approach to visual neuropsychology, in E.L.J. Leewenberg H.F.J.M. Buffart, Formal theories of visual perception, 27-66, Chichester, UK. Wiley, 1978.

[21] Chan K.C., Chan M. A transformational analysis of form recognition under plane isometries, Journal of Mathematical Psychology, 26:3 237-251, 1982.

[22] Chan K.C., Chan M. A mental space similarity Group model of Shape constancy, Journal of Mathematical Psychology, 43 410-432,1999.

[23] Leyton M. A theory of information structure: II.A theory of perceptual organization, Journal of Mathematical Psychology, 30, 257-305,1986.

[24] Asil V., Körpınar T., Bas S. New Parametric Representation of a Surfaces B-Pencil with a Common Line of Curvature, Siauliai Math. Semin. 9:17 5-14, 2014.

[25] Körpınar T., Bas S. Characterization of Quaternionic Curves by Inextensible Flows, Prespactime Journal 7:12 1680-1684, 2016.

[26] Khadjiev D., Ören İ., Pekşen Ö. Global invariants of paths and curves for the group of all linear similarities in the two-dimensional Euclidean space. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 15:06 1850092, 2018.

[27] Khadjiev D. Ören İ., Pekşen Ö. Generating systems of differential invariants and the theorem on existence for curves in the pseudo-Euclidean geometry. Turkish Journal of Mathematics, 37:1, 80-94, 2013.

[28] Sağiroğlu Y. Equi-affine differential invariants of a pair of curves, TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, 6 238-245, 2015.

[29] Yapar Z., Sağiroğlu Y. Curvature Motion On Dual Hyperbolic Unit Sphere H_0^2, Journal of Applied Mathematics and Physics, 2:8 828-826, 2014.