Görsel Teoremler Üzerine Matematik Öğretmenleriyle Nitel Bir Çalışma[1]

Yaşar AKKAN[2]
Pınar AKKAN[3]
Mesut ÖZTÜRK[4]
Ümit DEMİR[5]

Özet

Farklı disiplinlerde etkili olmasına rağmen özellikle geometri alanında daha etkili olduğu düşünülen ve zihinsel yeteneğin bir parçası olarak kabul edilen görsel akıl yürütme becerisi birçok araştırmacının üzerinde durduğu bir konudur. Geleceğin bilim insanlarının öğretim için gerekli görsel akıl yürütme becerilerini sağlayabilmede ve geliştirebilmede matematik öğretmenlerine sorumluluk düşmektedir. Bu çalışma ile matematik öğretmenlerinin görsel teoremleri ispatlama bağlamında, görsel akıl yürütme becerileri ile geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal görselleştirme becerileri arasındaki ilişkiyi nitel olarak özel durum yöntemiyle inceleme amaçlanmıştır. Çalışma grubunu on lise matematik öğretmeni oluşturmaktadır. Çalışmadan elde edilen veriler iki farklı görüşme sürecinde elde edilmiştir. İlk görüşmede öğretmenlerden "van Hiele Geometri Düzeyleri Testini ve Uzamsal Görselleştirme Beceri Testini" doldurmaları istenmiş, ikinci görüşmede ise öğretmenlerle üç farklı görsel teorem üzerinden klinik mülakatlar yürütülmüştür. Bu iki süreçten elde edilen veriler betimsel olarak analiz edilmiştir. Sonuç olarak, matematik öğretmenlerinin görsel akıl yürütme becerileri ile geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal görselleştirme becerileri arasında bir ilişki olduğu, daha yüksek geometrik düşünme düzeyine ulaşan öğretmenlerin, görsel teoremleri tanımada, onlar üzerine akıl yürütmede ve ispatlamada daha yetenekli olduğu tespit edilmiştir.

Anahtar sözcükler: Geometri, görsel akıl yürütme, matematik öğretmenleri

1. Giriş

Nokta, doğru, düzlemsel ve uzaysal şekiller ile bunlar arasındaki ilişkileri ve geometrik şekillerin uzunluk, açı, alan gibi özelliklerini konu alan matematiğin dalı olan geometri (Dursun ve Çoban, 2006); düşünmeyi kolaylaştırır ve şekilleri göz önünde canlandırarak çözüme ulaşmayı sağlar (Hızarcı, 2004). Ayrıca bireylerin estetik duygusunu geliştiren ve bir olayı birçok açıdan düşünmelerini sağlayan geometri; bireylerin içinde bulundukları dünyayı daha iyi anlamalarına ve matematiksel kavramlarla yaşamdaki olaylar arasında ilişki kurmalarına yardımcı olmaktadır (Türnüklü vd., 2016). Bu anlamda geometri, bireylerin hem temel becerilerini (genelleme yapma, karşılaştırma vb.) hem de bilişsel becerilerini (araştırma, öğrendiklerini şema biçiminde ortaya koyma, düşüncelerini açık ve seçik ifade etme vb.) geliştirmelerine imkân tanımaktadır (Baykul, 2009).

Farklı disiplinlerde etkili olmasına rağmen özellikle geometri alanında daha etkili olduğu düşünülen ve zihinsel yeteneğin bir parçası olarak kabul edilen görsel veya diyagramatik akıl yürütme birçok araştırmacının üzerinde durduğu bir konudur (Bakker ve Hoffman, 2005; Hoffman, 1998; Lakoff ve Núñez, 2000; Terao vd., 2004; Whiteley, 2004). Görsel temsillerle akıl yürütmeyi içeren görsel akıl yürütme; dilbilimsel veya cebirsel araçlarla değil, diyagramların ve imgelerin kullanımıyla görselleştirilen kavram ve fikirlerin anlaşılmasıyla ilgilidir (Anderson ve McCartney 1997). Fischbein (1987) görsel akıl yürütmenin, sadece anlamlı yapılarda veriyi organize etmede değil, aynı zamanda çözümün analitik gelişimini yönlendiren önemli bir faktör olduğunu belirtmektedir. Hoffmann (2007) ise görsel akıl yürütmeyi, düşünmeyi kolaylaştırma süreci olarak tanımlar ve bu çeşit akıl yürütmenin karar verme ve bilgi geliştirme ile ilgili olduğunu ifade eder. Karrass (2012)'a göre görsel akıl yürütme; görsellerle (grafik, diyagram, resim vb.) sunulan bilişsel yapıyı gözlemlemek, bilişsel yapının bileşenlerini ve içsel yapılarını anlamak veya algılamak, bu algılar üzerine kafa yormak, sezgisel olarak yeni hipotezler üretmek ve bunları doğrulamak, düşünceleri iletmek ve bağlantıları yapmakla ilgilidir. Görüntüleri veya imajları algılamak, manipüle etmek, analiz etmek ve matematiği anlamak için görüntüleri etkili şekilde kullanma süreci (Zimmermann ve Cunningham, 1991) olan görselleştirme ise; görsel akıl yürütme için önemlidir (Aspinwall, Shaw ve Presmeg, 1997; Presmeg, 1986;). Görselleştirme, görülmeyenin görülmesini sağlayan bir yöntem (Zimmermann ve Cunningham, 1991) veya verilerin görsellerle (resim, grafik vb.) görme duyusunun kolayca algılayabileceği şekilde somutlaştırılarak düzenlenmesi (Sevimli, Yıldız ve Delice, 2008) olarak da tanımlanabilir. Arcavi (1994), görsel ipuçların yorumlanmasının, gözlemcinin iyi bir sembol algısı veya duyusu ile ortaya çıkan sembolik bir temsil vasıtasıyla desteklenebileceğini ileri sürmektedir. Ayrıca Arcavi, görsel sürecin bazı sözelleştirmeleri içerdiğini inanmakta ve bir süreç olarak görselleştirmenin, sözelleştirmeyi tamamlamak için tasarlandığını iddia etmektedir. O halde görsel akıl yürütme sadece zihnimizdeki görsel imajları görme ve oluşturma yeteneğini değil, aynı zamanda bunları anlamlandırma (görsel imajıyla canlandırma) kabiliyetimizle de ilgilidir (Karrass, 2012). Ayrıca uzay ve mekân ilişkileri ile ilgili akıl

[1] Bu çalışma, X. Uluslararası Eğitim Araştırmaları Kongresinde sunulan sözlü bildirinin genişletilmiş halidir.
[2] Doç. Dr., Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fak., Matematik Müh. Bölümü,, akkanyasar61@hotmail.com
[3] Öğr. Gör., Gümüşhane Üniversitesi, Gümüşhane MYO, Elektrik ve Otomasyon Bölümü p.akkan@gumushane.edu.tr
[4] Dr. Öğr. Üyesi, Bayburt Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, mesutozturk@live.com
[5] Öğr. Gör., Bayburt Üniversitesi, Sosyal Bilimler MYO, Finans Bankacılık ve Sigortacılık Bölümü, umitdemir@bayburt.edu.tr

yürütmeyi içeren bir dizi zihinsel beceriyi veya nesneleri zihinsel olarak manipüle etme, aralarındaki ilişkileri ve uzaklıkları anlama yeteneğini ifade eden uzamsal düşünme (Kösa, 2011; Lawton 2010; Zhang, Ding, Stegall ve Mo, 2012) ve zihinsel resimlerin karşılaştırılması, manipülasyonu ve dönüştürülmesi yoluyla düşünme yeteneğini içerin uzamsal görselleştirme (Casey, Jones ve Hare, 2008) ile ilgili tanımlamalar, görsel akıl yürütme becerisinin önemini ortaya koymaktadır. Çünkü şekil (görsel) ve uzayla ilgili her akıl yürütmede uzamsal beceriler işe koşulur, yani uzamsal beceri nesneleri görsel açıdan tanımayı gerektirir ve geometri açısından bu beceri, geometrik şekilleri tanımada öğretmenler için önemli bir araçtır (Turğut, 2007).

Geometrik bir problemin çözüm sürecinde görsel veya diyagramatik akıl yürütme farklı açılardan ele alınabilir. Pinto ve Tall'a (2002) göre geometrik bir problemin çözümünde; ilk olarak problemi tanımlayan bir görsel incelenir veya oluşturulur ve bu betimleme yorumlanır. Daha sonra ise düşünme deneyimleri ile ilgili varsayımlar ispat olarak adlandırılan formel ifadelere dönüştürülür. Görselden sözele bu geçiş, görsel matematikten formel matematiğe geçmenin olası bir yöntemini ortaya koymaktadır. Bu süreçte ihtiyaç duyulan şey ise özel görüntülerle geneli görme ve teoremleri kanıtlamak için görüntü ile biçimcilik (içerik ya da anlatı yerine bir imgenin formuna veya görünümüne bakma) arasındaki bağlantıları kullanma yeteneğine sahip olmadır (Pinto ve Tall, 2002). Görsel akıl yürütme becerisi ile ilgili bu tanımlamalar, van Hiele'in geometrik düşünme düzeylerini de yansıtmaktadır. van Hiele'e göre, geometrik düşünme, her seviyenin yeniden örgütlenmeyi veya önceki düzeyde edinilen bilginin iyileştirilmesini gerektirdiği beş seviyeden (bkz. yöntem kısmına) oluşur. Bu beş düzey öğrencilerin geometriyi anlama ve geometriye yaklaşım biçimlerini ortaya koymaktadır (Baki, 2008). van Hiele'in kuramı iki bölümden oluşmaktadır (Gutierrez, 1992): (1) Öğrencilerin geometrideki düşünme yollarını ifade eden düşünme düzeyleri, (2) Öğretmenlere öğrencilerin bulunduğu düzeyden bir sonraki düzeye geçmesini kolaylaştırmak ve desteklemek için geometri öğretimini nasıl düzenlemeleri gerektiğinin açıklandığı öğrenme aşamaları. van Hiele daha yüksek bir geometrik düşünme seviyesinde çalışan bir bireyin, daha güçlü görsel akıl yürütme becerilerine sahip olması gerektiğini ve görsel akıl yürütmenin geometrik öğretim ile de geliştirilebileceğini ifade etmiştir (van Hiele, 1986). van Hiele'e (1986) göre öğrencilerin geometriyi anlamaları için öğrencilerin olduğu kadar öğretmenlerin de geometrik düşünme düzeyleri önemlidir. Ayrıca öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri ile ilgili olarak yapılan araştırmalar ise özellikle van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin öğretmenler tarafından dikkate alınmadığını göstermektedir (Clements ve Battista, 1992; Senk, 1989; van De Walle, 2001). O halde geometri öğretimine yön veren öğretmenlerin bu gibi becerilere sahip olması gerekmektedir. Nitekim görsel akıl yürütme becerisi, öğretmenlerin öğretme konusundaki içerik bilgisinin merkezinde yer alan konulardan biridir (Karrass, 2012).

İçerik bilgisi ise öğretilecek veya öğrenilecek konu hakkındaki bilgidir. Bu nedenle öğretmenler öğretecekleri içeriği bilmek zorunda ve bu bilginin doğasının çeşitli içerik alanlarından nasıl farklı olduğunu da anlamak zorundadırlar (Pamuk, Ülken ve Dilek, 2012). Öğretmenin öğretilen konu ile diğer konular arasındaki ilişkileri de anlaması ve açıklayabilmesi gereklidir. O halde farklı bilgilerle ilişkili olan matematik öğretiminin kalitesi, öğretmenlerin içeriğe ilişkin bilgisine de bağlıdır (Ball, Hill ve Bass, 2005). Öğretmenlerin matematik (özelde ise geometri) alanındaki bilgileri, öğrenci başarısı üzerinde olumlu bir etki yaratır (Hill, Rowan ve Ball, 2005) ve öğretmenlerin konuyla ilgili kapsamlı anlayışı ise öğrencilerin öğrenme fırsatlarını artırır (Ma, 1999). National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]'e (2000) göre öğrencilerin matematiksel kavramlarla ilgili anlamaları, problem çözme becerileri, matematiğe karşı eğilimleri ve inançları okulda karşılaştıkları öğretmenler tarafından şekillendirilir. Nitekim araştırmacılar son yıllarda öğretmenlerin öğrenmede oynadığı role dikkat çekmişlerdir. Cross'a (2009) göre öğretmenler öğrenme ortamını örgütleyip biçimlendirir; bundan dolayı, öğretmenler öğretilen ve öğrenilen şey üzerinde muazzam bir etkiye sahiptir. Geleceğin insan gücünün oluşturacak bireylerin (matematikçiler, bilim adamları, mühendisler, doktorlar, grafik tasarımcıları vb.) görsel akıl yürütme becerilerini geliştirebilmek için, matematik öğretmenlerinin öğretimleri için gerekli görsel akıl yürütme becerilerine sahip olması gerekmektedir. Bu anlamda çalışmanın amacı, matematik öğretmenlerinin görsel teoremleri ispatlama bağlamında, görsel akıl yürütme becerileri ile geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal görselleştirme becerileri arasında ne tür ilişkiler olduğu nitel olarak araştırmaktır.

2. Yöntem

2.1. Araştırmanın Deseni

Bu araştırma, betimsel bir çalışma olup özel durum çalışması (case study) yöntemi kullanılarak yürütülmüştür. Çünkü özel durum çalışmaları araştırılan konunun derinlemesine incelenmesine imkan sağlamakta, elde edilen verilerin sistematik bir biçimde birbirleriyle olan ilişkilerini inceleyip, bu ilişkileri sebep sonuç çerçevesinde açıklayabilme fırsatı vermektedir (Cohen, Manion ve Morrison, 2000). Bu yöntemde, nitel ve nicel veri toplama teknikleri kullanılabilmektedir (Çepni, 2012).

2.2. Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu Doğu Karadeniz Bölgesinde yer alan bir üniversitede yüksek lisans yapan 10 matematik öğretmeni (gönüllülük esasına dayalı) oluşturmaktadır. Çalışma grubunun seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden, maksimum çeşitlilik yöntemi tercih edilmiştir. Buradaki amaç, göreli olarak küçük bir örneklem oluşturmak ve bu örneklemde çalışılan probleme taraf olabilecek bireylerin çeşitliliğini maksimum derecede yansıtmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Araştırmaya katılan öğretmenlerin ait kişisel özellikler Tablo 1 de verilmiştir.

Tablo 1. *Öğretmenlere ait kişisel özellikler*

Öğretmenler	Mezun olduğu fakülte	Deneyim yılı	Kadro durumu
Ö1	Eğitim Fakültesi	2-3 yıl arası	Kadrolu öğretmen
Ö2	Eğitim Fakültesi	0-1 yıl arası	Ücretli öğretmen
Ö3	Eğitim Fakültesi	3-4 yıl arası	Kadrolu öğretmen
Ö4	Fen-Edebiyat Fakültesi	2-3 yıl arası	Ücretli öğretmen
Ö5	Fen-Edebiyat Fakültesi	3-4 yıl arası	Kadrolu öğretmen
Ö6	Fen-Edebiyat Fakültesi	5-6 yıl arası	Kadrolu öğretmen
Ö7	Fen-Edebiyat Fakültesi	1-2 yıl arası	Ücretli öğretmen
Ö8	Eğitim Fakültesi	1-2 yıl arası	Ücretli öğretmen
Ö9	Mühendislik Fakültesi	0-1 yıl arası	Ücretli öğretmen
Ö10	Fen-Edebiyat Fakültesi	0-1 yıl arası	Ücretli öğretmen

*Ö1- Ö10, katılımcı öğretmenleri temsil etmektedir.

2.3. Veri Toplama Aracı

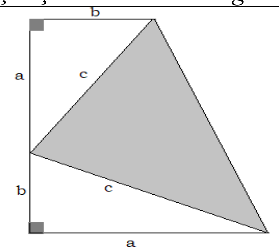
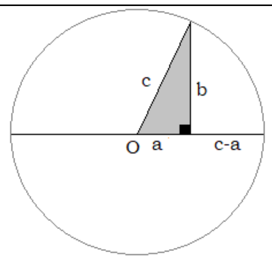
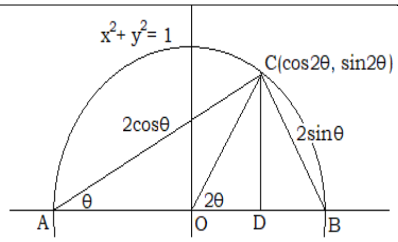
Çalışmadan iki farklı görüşme süreci sonucunda veriler elde edilmiştir. İlk görüşmede öğretmenlerin geometri özgeçmişlerini belirlemek amacıyla araştırmacılar tarafından literatür destekli hazırlanan ve Tablo 2 de verilen açık uçlu soruları cevaplamaları, daha sonra ise öğretmenlerden "van Hiele Geometri Düşünme Düzeyi Testini (GDDT) ve Uzamsal Görselleştirme Becerisi Testini (UGBT)" cevaplamaları istenmiştir. Öğretmenlerin geometrik düşünme düzeyini belirlemek amacıyla Usiskin (1982) tarafından geliştirilen ve Duatepe (2000) tarafından Türkçeye çevrilen 25 maddelik van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ölçeği kullanılmıştır. Ayrıca öğretmenlerin uzamsal görselleştirme becerilerini ölçmede, Guay (1976) tarafından geliştirilen ve üç bölümde (oluşturma, döndürme ve görünüm) toplam 36 sorudan oluşan test kullanılmıştır.

Tablo 2. *Bu araştırma kapsamında öğretmenlerin geometri özgeçmişlerini belirlemek için hazırlanmış sorular ve puanlar*

Maddeler	Puanlama	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5	Ö6	Ö7	Ö8	Ö9	Ö10
Geometriyi üniversitede ayrı bir ders olarak mı okudunuz?	Hayır: 0 Evet: 1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
"Kuralları veya formülleri" içeren işlemsel uygulamalarla mı, yoksa ispatlar yaparak mı geometri öğrendiniz?	Hiçbiri: 0 Sadece Biri:1 Her İkisi:2	2	1	2	0	0	2	0	1	0	0
İspat yapma yöntemlerinin öğretimi ile ilgili bir ders aldınız mı?	Hayır: 0 Evet: 1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
Lisede geometri dersiyle ilişkili herhangi bir ders aldınız mı?	Hayır: 0 Evet: 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Üniversitede geometri dersiyle ilişkili herhangi bir ders aldınız mı?	Hayır: 0 Evet: 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Problem çözme (stratejileri) ile ilgili bir ders aldınız mı?	Hayır: 0 Evet: 1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
Geometri ile ilgili (Cabri-2D, Cabri-3D; GeoGebra vb.) programlar kullandınız mı?	Hayır: 0 Evet: 1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
Geometrik çizimleri pergel ve cetvel kullanarak mı, yoksa teknolojiden yararlanarak mı yaptınız.	Hiçbiri:0 Sadece Biri:1 Her İkisi:2	2	0	2	1	1	1	0	1	0	0
Geometri özgeçmişleri ile ilgili toplam puanlar		10	6	10	4	4	8	2	6	3	2

İkinci görüşmede ise öğretmenlerin problem çözme davranışlarını, akıl yürütme becerilerini ve görsellerle ilgili geometrik bilgilerini ve doğrulama durumlarını ortaya çıkarma amacıyla; dört farklı görsel teorem üzerinden klinik mülakatlar yürütülmüştür. Klinik mülakat, öğretmenlerin düşüncelerini derinlemesine incelemek amacıyla öğretmenler ile karşılıklı yapılan görüşmelerdir. Bu mülakat çeşidinin esas amacı, bireyin sahip olduğu kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkararak bireyin bilişsel becerilerini tespit etmek ve düşüncelerindeki zenginliği keşfetmektir (Zazkis ve Hazzan, 1999). Bu klinik mülakatlar esnasında öğretmenlerden görsel teoremleri ispatlamaları, bu ispatlama sürecinde sesli olarak düşünmeleri ve çözümlerini etkinlik kartları üzerine not etmeleri istenmiştir. Davis'e (1993) göre görsel teoremler diyagramlardır ve üç tip görsel teorem vardır: (1) Sezgisel olarak açık bir şekilde anlaşılabilen basit düzlem ve uzay geometrinin tüm sonuçlarını içeren görsel teoremler, (2) Sezgisel olarak geometrik veya görsel temeli olan tüm analizle (veya daha yüksek matematiksel disiplinler) ilgili görsel teoremler, (3) Bazı pür veya uygulamalı matematiksel sonuçların neredeyse inceleme ile elde edilebildiği tüm grafiksel gösterimleri içeren teoremler (elle veya başka araçla çizilmiş). Bu bağlamda Nelsen (1993) tarafından kaleme alınan “Proofs Without Words” kitabından 1.tip görsel teoremlerden dört problem seçilmiştir. Ancak bu dört farklı teorem içinden Tablo 3’te sunulan sadece üç teoremden düzgün ve geçerli veriler toplanmış, diğer teoremden çok fazla veri elde edilemediğinden çalışmaya dahil edilmemiştir. Seçilen problemler hem öğretmenlerin daha çok aşina oldukları hem de NCTM’in önerdiği konularla içermektedir.

Tablo 3. *Çalışmada kullanılan görsel problemler*

Görsel teoremler			
Açıklamalar	Pisagor Teoremini doğrulamak için üç üçgenin ve yamuğun alanlarının kullanımını içeren problem	Pisagor Teoremini doğrulamak için ortaya çıkan üçgenlerin (üçgenlerden biri ek çizimle oluşturulur) benzerliğinin kullanımını içeren problem	Trigonometrik yarım açı formüllerini doğrulamayı içeren bir problem

2.4. Verilerin Analizi

İki farklı testten elde edilen veriler betimsel istatistikten yararlanarak sunulmuştur. Çünkü betimsel istatistik, elde edilen verilerden verinin geneli hakkında sayısal bilgilerin üretilmesini ve verilerin anlaşılabilir olması için düzenlenerek tablo ve grafiklerle sunulmasını sağlar. Bu bağlamda öğretmenlerin geometrik düşünme düzeylerini belirlemek için, öğretmenlerin her düzeye ait “5 sorudan en az 4’ünü doğru” yanıtlamaları ölçütü kullanılmıştır. Ölçeğin ağırlıklı puanı hesaplanırken; 1-5.sorulara verilen cevaplar için ölçüt sağlanırsa 1 puan (düzey 0), 6–10. sorulara verilen cevaplar için ölçüt sağlanırsa 2 puan (düzey 1), 11–15. sorulara verilen cevaplar için ölçüt sağlanırsa 4 puan (düzey 2), 16–20. sorulara verilen cevaplar için ölçüt sağlanırsa 8 puan (düzey 3), 21–25. sorulara verilen cevaplar için ölçüt sağlanırsa 16 (düzey 4) puan alınmış ve ölçütü sağlanan düzeylerin puanı toplanarak ağırlıklı puan elde edilmiştir. Uzamsal görselleştirme beceri testinde ise öğretmenlerin doğru cevapladıkları sorulara 1 puan, yanlış cevapladıkları ya da boş bıraktıkları sorulara 0 puan verilerek her bir öğretmen için 36 puan üzerinden bir sınav notu verilmiştir. Elde edilen verilerle daha önce testlerden elde edilen verilerin karşılaştırılması yapılmıştır.

Araştırmada, klinik mülakatlarla toplanan veriler betimsel analiz tekniği kullanılarak çözümlenmiştir. Betimsel analiz; nitel çözümlemelerdeki verilerin özgün biçimlerine sadık kalınarak, kişilerin söylediklerinden, yazdıklarından ve dokümanların içeriklerinden doğrudan alıntılar yaparak, betimsel bir yaklaşımla verilerin sunumudur (Kümbetoğlu, 2005). Bu çalışmada ilk önce araştırmanın kavramsal çerçevesi dâhilinde veri analizi için bir çerçeve oluşturulmuş, daha sonra bir önceki aşamada oluşturulan genel çerçeveye göre elde edilen veriler okunarak düzenlenmiş ve düzenlenen verilerin tanımlanması ve gerekli olan yerlere doğrudan alıntılar yapılmış, en son aşamada ise bulguların açıklanması, ilişkilendirilmesi ve açıklanması yapılmıştır. Elde edilen veriler, literatürde daha önce yapılan araştırmalardaki (Fuys, Geddes ve Tiskler, 1988; van Hiele, 1986; Altun, 2005; Baykul, 2002) düşünme düzeylerine ait özellikler (akt. Akay, 2013, s:6-11) dikkate alınarak oluşturulan Tablo 4’ deki çerçeveye göre analiz edilmiştir.

Tablo 4. *Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine ait özellikler*

Düzeyler	Özellikleri
Düzey 0 (Görsel dönem): Bu düzeydeki öğrenciler geometrik şekilleri görünümlerine göre tanımlar, adlandırır ve karşılaştırır. Algı ise sadece görsel üzerindir. Bu düzeydeki öğrenciler şekli tamamlayan parçalara dikkat etmeden şekli bütün olarak tanır.	• Bütün olarak verilen şekilleri basit çizimlerde, farklı konumlarda veya daha karışık yapılarda tanır. • Bir şekli inşa eder, çizer veya kopyalar. • Şekilleri ve diğer geometrik yapıları isimlendirir ve sınıflandırır, standart ve standart olmayan isimleri ve sınıflandırmaları uygun bir şekilde kullanır. • Bütün olarak verilen şekilleri görünümlerine göre karşılaştır, sınıflandırır ve sözel açıklamalar yapar. • Problemleri özellikleri kullanarak değil, şekiller üzerinde çalışarak çözerler. • Şeklin parçalarını tanır ama bileşenleri açısından analiz edemez. Bir şekil sınıfını niteleyen özellikleri düşünemez. Şekiller hakkında genelleme yapamaz ve ilgili dili kullanamaz.

Düzey 1 (Analiz veya Betimsel): Bu düzeyde olan öğrenciler şekil sınıflarının özelliklerini ampirik olarak keşfeder. Bu düzeyde şeklin bileşenleri ve bileşenlerin özellikleri şekli tanımlamak ve karakterize etmek için kullanılır. Aynı öğrenci bir şeklin farklı şekil sınıflarına ait olabileceğini ve birkaç isim alabileceğini düşünemeyebilir. Bu düzeyde bir şekil özelliklerinin bir bütünü olarak görülür. Öğrenci bir tanım ifade edebilir ama tanım öğrenci tarafından anlaşılmış olmayabilir.	• Şekillerin bileşenleri arasındaki ilişkileri anlar ve test eder. • Bileşenler ve ilişkiler için uygun kelimeleri hatırlar ve kullanır. • İki şekli bileşenleri arasındaki ilişkilere göre karşılaştırır. • Şekilleri belirli özelliklerine göre farklı şekillerde sınıflandırır. • Özellikleri açısından bir şeklin sözel açıklamalarını kullanır, yorumlar ve bu açıklamaları şekil çizmek için kullanır. • Kuralların sözel ve sembolik ifadelerini yorumlar ve kullanır. • Şekillerin özelliklerini deneysel olarak keşfeder ve geneller. • Belirli özellikleri verilen şeklin ne olduğunu söyler. • Bir şekil sınıfını nitelendirmek için başka bir şekil sınıfında da uygulanan özellikleri kullanır ve şekil sınıflarını özelliklerine göre karşılaştırır. • Geometrik problemleri şeklin bilinen özelliklerini kullanarak, anlaşılır yaklaşımlarla çözer. • Şekillerin özellikleriyle ilgili formal olmayan genellemeler kullanır. • Geometrik şekillerin özelliklerini fark edebilir ve analiz edebilir ama şekiller arasındaki ilişkileri görmeye yarayan ve çıkarımda bulunmalarını sağlayan akıl yürütme yapılamaz.
Düzey 2 (Formal Olmayan (Basit) Çıkarım): Bu düzeydeki öğrenciler daha önceki düzeylerde keşfettiği özellikleri ve kuralları formal olmayan kanıtları takip ederek ilişkilendirirler. Öğrenciler bir şekle kendi içinde ve benzer şekiller ile arasındaki ilişkileri üzerinde çalışabilir. Bu düzeyde iki genel düşünme türü vardır: Öğrenciler şekiller arasındaki soyut ilişkileri anlar, düzey 1'de yapılan gözlemleri ispat eden çıkarımları kullanabilir. Geometrik bir anlama gelişmesine rağmen formal tanım ve ispat oluşturma yeteneği henüz gelişmemiştir.	• Bir şekil sınıfını niteleyen özellikleri bilir ve bir şekil sınıfını nitelemek için yeterli sayıda özelliği belirtir. • Bir şekil sınıfını formülleştirir ve tanımlar. • Formal olmayan çıkarımlar yapar, verilen bilgiden bir sonuç çıkarır, mantıksal ilişkileri kullanarak sonuçları doğrular. • Tümdengelimle yeni özellikleri keşfeder. • Bir şeyi ispatlamak için açıklamadan fazlasını yapar, diyagram kullanarak bu açıklamaları doğrular. • Birbirinin tersi ifadeler arasındaki farklılığı informal olarak ifade eder. • Problemleri çözmek için stratejiler kullanır. • Aksiyomatik anlamda çıkarımların anlamını kavramaz, teoremlerin ağları arasındaki karşılıklı ilişkiyi henüz kuramaz. • Bu düzeydeki öğrenciler şekillerin özelliklerinin önemini fark ederler.
Düzey 3 (Formal Çıkarım): Bu düzeydeki öğrenciler teoremleri tümdengelim yoluyla ispatlar ve teorem ağları arasında ilişkiler kurar. Öğrenciler düzey 2'de geliştirilen şekil ilişkilerini farklı durumlara uyarlayabilir. Bu düzeydeki bireylerde ispatlama yapmanın gereği anlaşılır ve bu bireyler tanımları yeterli bir biçimde geliştirebilir.	• Tanımsız terimlerin, tanımların ve temel varsayımlarım gerekliliğini bilir. • Bir formal tanımın özelliklerini ve tanımların denkliğini bilir. • Düzey 2'de informal olarak açıklanan bir aksiyomatik ilişki ispatlanır. • Bir teorem ile ilgili ifadeleri arasındaki ilişkileri ispatlar. • Teoremlerin ağları arasında karşılıklı ilişkiler oluşturur. • Teoremlerin farklı ispatlarını karşılaştırır. • Bir tanımın veya postulatın değişiminin etkilerini mantıksal bir sırada inceler. • Birkaç farklı teoremi birleştiren genel bir ilke oluşturur. • Formal çıkarımlar yapar ama aksiyomatik sistemleri karşılaştırmaz. • Bu düzeydeki öğrenciler bir aksiyomatik yapıyı kullanabilir ve bu sistem içinde kendi kendilerine ispat yapabilir.
Düzey 4 (Kesinlik (En üst)): Bu düzeydeki öğrenciler farklı aksiyomatik sistemlerdeki teoremleri belirler, bu sistemleri analiz eder ve karşılaştırır. Düzey 4'te geometri çalışmaları son derece soyuttur ve somut veya resimli modeller içermesi gerekmez. Önermeler veya aksiyomlar bu düzeyin nesneleridir ve soyutlama oldukça önemlidir.	• Farklı aksiyomatik sistemlerde teoremler kurar. • Aksiyomatik sistemleri karşılaştırır. Aksiyomlardaki farklılığın geometri sonuçlarını nasıl etkilediğini araştırır. • Aksiyom kümelerinin tutarlılığını, bir aksiyomun bağımsızlığını ve farklı aksiyom kümelerinin denkliğini sağlar, geometri için bir aksiyomatik sistem oluşturur. • Problemleri çözmek için genel yöntemler bulur. • Bir matematiksel teoreme uygulama alanları bulur. • Mantıksal çıkarımlara yeni anlayışlar ve yaklaşımlar geliştirmek için mantık konularında derinlemesine çalışır.

Bu çalışmada dış geçerliği sağlamak için örneklem detaylı biçimde tanımlanmış ve katılımcı özellikleri tüm detaylarıyla ortaya konulmuştur. Bunun yanı sıra katılımcıların görüşleri ile etkinlik kartlarından görsellere yer verilmiştir. İç geçerliğin sağlanması için katılımcılarla tekrar görüşülerek sesli düşünme protokolünde kurduğu cümlelerden çıkarılan özelliklerin kendilerine sunularak doğruluğunu uygun/ uygun değil şeklinde değerlendirmeleri istenmiştir. Katılımcıların tamamı özelliklerin uygun olduğu yönünde görüş belirtmişlerdir. Ayrıca araştırmacı çeşitlemesi için veri toplama süreci ayrıntılı biçimde betimlenmiş ve çalışma sürecinin tamamı alanında uzman bir öğretim üyesine kontrol ettirilerek ilerlenmiştir. Çalışmanın dış güvenirliğini sağlamak amacıyla veri toplama sürecinde yapılan görüşmeler ses kayıt cihazıyla kayıt altına alınmış, doğrudan aktarmalara yer verilmiştir. İç güvenirliği sağlamak için araştırma problemine uygun araştırma modeli kullanılmış, seçilen araştırma modeline uygun olarak katılımcılar ve veri toplama araçları belirlenmiştir. Toplanan veriler de araştırma problemine uygun olarak analiz edilmiştir. Araştırma sonuçlarında genellemeler yapılmamış sadece analitik genellemelere yer verilmiştir.

3. Bulgular ve Tartışma

Matematik öğretmenlerinin geometrik özgeçmişlerine, van Hiele geometrik düşünme düzeylerine ve uzamsal görselleştirme becerilerine ilişkin açık uçlu sorulardan ve testlerden elde edilen sonuçlar Tablo 5 sunulmuş ve yorumlanmıştır.

Tablo 5. *Öğretmenlerin geometrik özgeçmişlerine, düşünme düzeylerine ve görselleştirme becerilerine ait veriler*

Öğretmen	GÖP	van Hiele GDDT												UGBT			
		van Hiele Düzeyleri										ATP	ÖD	Boyutları			TP (%)
		0.D		1.D		2.D		3.D		4.D							
		DS	2^0	DS	2^1	DS	2^2	DS	2^3	DS	2^4			O	D	G	
Ö1	10	5	1	5	2	5	4	4	8	5	16	31	4.D	12	11	10	33 (%92)
Ö2	6	5	1	5	2	4	4	1	-	2	-	7	2.D	8	7	7	22 (%61)
Ö3	10	5	1	5	2	5	4	4	8	4	16	31	4.D	11	11	9	31 (%86)
Ö4	4	5	1	5	2	5	4	2	-	3	-	7	2.D	10	8	8	26 (%74)
Ö5	4	5	1	5	2	4	4	4	8	3	-	15	3.D	9	8	8	25 (%69)
Ö6	8	5	1	5	2	5	4	4	8	5	16	31	4.D	11	9	8	28 (%78)
Ö7	2	5	1	4	2	4	4	2	-	2	-	7	2.D	8	6	6	22 (%61)
Ö8	6	5	1	5	2	4	4	3	-	3	-	7	2.D	10	9	8	27 (%75)
Ö9	3	4	1	4	2	2	-	1	-	1	-	3	1.D	7	7	6	20 (%56)
Ö10	2	5	1	5	2	2	-	2	-	2	-	3	1.D	8	7	7	22 %61)

Kısaltmalar: GÖP (Geometrik Özgeçmiş Puanı), GDDT (Geometrik Düşünme Düzey Testi), DS (Doğru Sayısı), ATP (Ağırlıklı Toplam Puan), ÖD (Öğretmen Düzeyleri), UGBT (Uzamsal Görselleştirme Beceri Testi), O (Oluşturma), D (Döndürme), G (Görünüm), TP (Toplam Puan), 0.D-1.D-.2.D-3.D-4.D (Düzeyler)

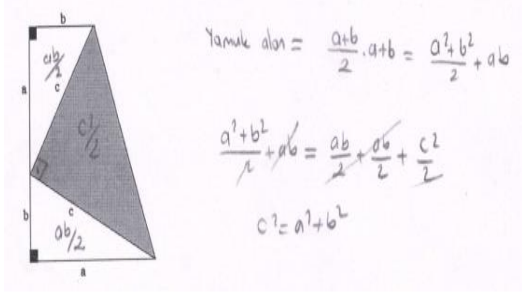
Tablo 5'e göre genel olarak daha iyi bir geometrik özgeçmişe sahip olan öğretmenlerin daha yüksek van Hiele geometrik düşünme düzeylerine ulaştıkları ve daha iyi uzamsal görselleştirme becerilerinin sahip oldukları belirlenmiştir. Örneğin geometrik özgeçmiş puanları en yüksek olan Ö1, Ö3 ve Ö6 öğretmenlerinin, uzamsal görselleştirme beceri puanları sırasıyla 33, 31 ve 28'dir. Ayrıca düzey 4'e ulaşan bu üç öğretmenin geometrik düşünme düzey belirleme testi ağırlıklı puanları 31'dir. Yani daha yüksek geometrik özgeçmiş puanına sahip Eğitim Fakültesi mezunu matematik öğretmenleri ile kadrolu olarak çalışan matematik öğretmenlerinin van Hiele geometri düşünme düzeyi testine göre düzey 4 kadar ulaştıkları ve uzamsal görselleştirme beceri testinden ise daha yüksek puanlar aldıkları tespit edilmiştir.

Bulguların bu kısmında ise on matematik öğretmeniyle görsel teoremler üzerinden yürütülen klinik mülakatlardan elde edilen veriler sırasıyla sunulmuştur. Öğretmenlere ait bu özel durumlar sunulurken mülakatlardan kesitlere, çözümlere ve yorumlamalara yer verilmiş, ancak Ö9 öğretmeninden çok fazla veri elde edilemediği için onunla ilgili özel duruma çalışmada yer verilmemiştir.

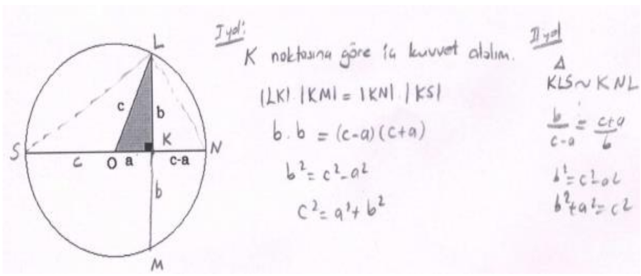
3.1. Ö1 Öğretmenine Ait Özel Durum

Eğitim Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık 3 yıldır kadrolu öğretmenlik yapan bu öğretmenin; geometrik özgeçmiş puanı 10, uzamsal görselleştirme beceri testi puanı 33, van Hiele düzeyleri testi doğru sayıları sırasıyla (5, 5, 5, 4, 5), ağırlıklı puanı 31 ve düzeyi ise Düzey 4'dir. Bu öğretmene ait mülakatlardan kesitler ve çözümler Tablo 6 da sunulmuştur.

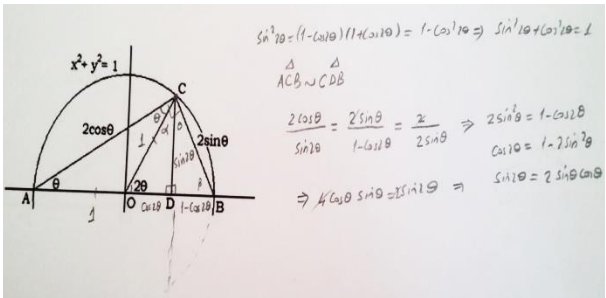
Tablo 6. *Ö1 öğretmenine ait mülakattan kesitler ve çözümler*

Mülakattan kesitler	**Çözümler**
A: Böyle bir görsel daha önce gördünüz mü? Ö1: Hatırlamıyorum. Ancak benzerlerini gördüm gibi. Çok emin değilim… A: Sen bu gösterimle ilgili ne düşünüyorsun, Yani ne elde edebilirsin? Ö1: Yamuğun alanından ve içindeki alanlardan bir şeyler elde edilebilir.[A: Ne gibi?] Ö1: Yamuğun alan formülünü ilk yazalım… Daha sonra iç kısımdaki üç üçgenin alanlarını toplamını yamuğun alanına eşitleyelim. Bu üçgenlerin üçü de dik üçgendir… Tamam, Pisagor bağıntısı elde edilmiş oldu. İlginç ve güzel…	

A: Bu görseli daha önce gördünüz mü?
Ö1: Hayır. Ancak yine a, b, c'yi görünce aklıma Pisagor bağıntısı geliyor. Fakat çemberi görünce de aklıma çember ile ilgili bağıntılar ve trigonometri geliyor. Anlamadım.
A: Belki sizce bu görselden ne elde edilebilir.
Ö1: Dik açılı üçgen ve a, b ve c varsa Pisagor teoremi veya Öklid bağıntıları… Bir ek çizim yapalım… Gerek yok… [A: Niçin?]
Ö1: Çemberde iç kuvvetten yararlanabilirim… [A: Nasıl yani?]
Ö1: İç kuvvetten bağıntı yazarsak… Evet, Pisagor bağıntısı çıkıyor. Ayrıca benzer üçgenleri kullanarak bir şey elde edebilirim gibi… [A: Ne gibi?]
Ö1: KLS ile KNL üçgenlerin benzerliğinden yararlanalım… Evet, buradan da Pisagor bağıntısı doğrulanıyor…



A: Daha önce böyle bir şekil gördün mü?
Ö1: Birim çember ve trigonometrik ifadeler var. Çok benzerlerini gördüm…
A: Bu ne amaçla verilmiş olabilir?
Ö1: Bilmiyorum… Birkaç çözüm yapalım…
A: Ne gibi?
Ö1: Tamam, ikinci şekildeki gibi iç kuvvet yazarsak. Bu çok işime yaramadı…
A: Şimdi ne yapacaksın?
Ö1: Görseldeki ACB üçgeni ile CDB üçgeni arasında bir benzerlik kuralım… Tamam, amaç trigonometrik bağıntıları elde etmek… Özellikle de yarım açı formüleri $sin\ 2\theta$ ve $cos\ 2\theta$ bulmak amaçmış. Güzel ve ilginç bir doğrulama şekli.



Tabloya göre ilk çözümde öğretmen görselden yararlanarak ve akıl yürüterek yamuğun alanı ile üçgenlerin alanları arasında bir ilişki kurmuş, yamuğun alan formülünü içteki üç dik üçgenin toplam alanlarına eşitleyerek Pisagor bağıntısının doğruluğunu göstermiştir. Burada öğretmen taralı üçgenin de dik üçgen olduğunu göstermek için görselden yararlanmıştır. Benzer şekilde öğretmen ikinci ve üçüncü çember görseli üzerinden çember ile ilgili bağıntılar ve trigonometrik ifadelerle ilgili çıkarımlar yapabilmiştir. Öğretmen hem çemberdeki iç kuvvet bağıntılarından hem de çember görseli içinde ek çizimlerle oluşturduğu üçgenler arasındaki benzerlik bağıntılarından yararlanarak hem Pisagor bağıntısının hem de yarım açı formüllerle ilgili bağıntıların doğruluğunu göstermiştir. Öğretmen bu anlamda daha önce bildiği kurallardan, formüllerden veya teoremlerden ve ek çizimlerden yararlanarak ispatlar yapabilmiş ve çıkarımlarda da bulunabilmiştir. Öğretmen bu ispatlarını mantıksal delilere dayandırmıştır. Ayrıca öğretmen farklı geometrik kavramlar ve farklı geometrik alanlar (analitik geometri ile Öklid geometrisi) arasında ilişkiler kurduğu belirlenmiştir. Bu bağlamda öğretmen en az üçüncü düzey olan formal çıkarım düzeyindeki özelliklerin bazılarını gösterdiği tespit edilmiştir. Öğretmenin en az düzey 3 olduğunun söylenmesinin nedeni, düzey 4 ile ilgili herhangi bir mülakat sorusu sorulmadığından öğrencinin bu düzeye ait özelliklere sahip olup olmadığının belirlenememesidir.

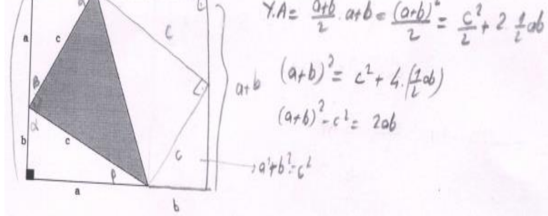
3.2. Ö2 Öğretmenine Ait Özel Durum

Eğitim Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık 1 yıldır ücretli öğretmenlik yapan bu öğretmenin; geometrik öz-geçmiş puanı 6, uzamsal görselleştirme beceri testi puanı 22, van Hiele düzeyleri testi doğru sayıları sırasıyla (5, 5, 5, 1, 2), ağırlıklı puanı 7 ve düzeyi ise Düzey 2'dir. Bu öğretmene ait mülakatlardan kesitler ve çözümler Tablo 7 de sunulmuştur.

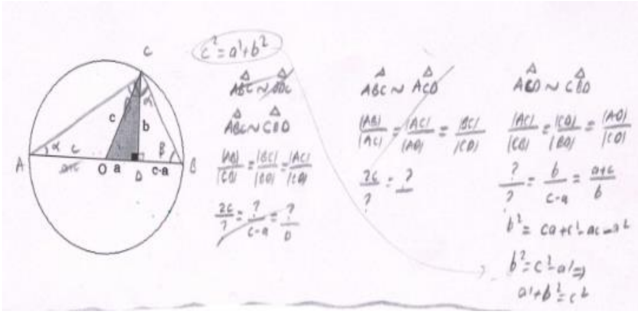
Tablo 7. *Ö2 öğretmenine ait mülakattan kesitler ve çözümler*

Mülakattan kesitler | **Çözümler**

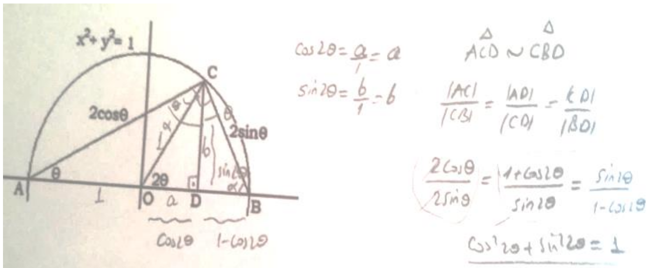
A: Daha önce böyle bir görsel gördünüz mü?
Ö2: Benzer görmüş olabilirim… Tam olarak hatırlamıyorum.
A: Bu görselle bakarak nasıl bir muhakeme yapabilirsiniz?
Ö2: Bu şekli kareye tamamlayalım… Yamuğun alanı alt taban çarpı üst taban bölü iki çarpı yüksekliktir… Karenin alanı ise içteki dört dik üçgenin ve bir karenin toplamına eşittir… Bunlar yazılabilir…
A: Farklı bir şey yazılabilir mi?
Ö2: Ayrıca bir de Pisagor bağıntısı $a^2 + b^2 = c^2$yazılabilir…
A: Bunları hangi amaçla yazdın?
Ö2: Bu görselden bir şeyler elde etmek için….



A: Böyle bir şekil daha önce gördünüz mü?
Ö2: Benzerlerini gördüm… Bu şekil içinde mi açıklama yapmamı istiyorsunuz?
A: Evet, bu görselle ilgili akıl yürütmeni istiyorum.
Ö2: … Tamam… Bir kere Pisagor bağıntısı var… Ayrıca burada birçok benzer üçgen var… Örneğin ABC ile CBD benzer… Ama çok bilinmeyen var… Ya da ABC ile ACD… Bu benzerlikte de çok bilinmeyen var… ACD ile CBD benzer üçgenler…
A: Bu benzer üçgenler ne işe yarar?
Ö2: Benzerlikleri yazalım ve bakalım ne çıkıyor… Tamam, işte bu Pisagor bağıntısını veriyor. Demek ki Pisagor bağıntısını doğruladık… O halde birinci görseldeki amaç, belki de Pisagor bağıntısı doğrulamaktı… Şimdi anladım… Bu yapmış olduğumuz ispattaki sıralama Pisagor teoreminin ispatına pek benzemiyor. Yani ben şimdi ispat mı yapmış oldum?



A: Bu zamana kadar böyle bir şekille karşılaştınız mı?
Ö2: Çok benzerlerini gördüm… Burada yine bir akıl yürütme yapalım… [A: Nasıl?]
Ö2: OD uzunluğuna a, DC uzunluğuna b dersek, görselden $a = cos2\theta$ ve $b = sin2\theta$ olur.
A: Bunlar ne işine yarayacak?
Ö2: Bir önceki şekle çok benziyor. Benzer üçgenlerden yararlanalım… Tamam, şimdi ACD ile CBD benzer üçgenlerdir… O halde buradan $cos^2 2\theta + sin^2 2\theta = 1$ olur. Bu ifade doğrudur… Demek ki burada amaç görsel üzerine akıl yürüterek trigonometrik bir bağıntının doğruluğu göstermekmiş.
A: Başka bağıntılar elde edilebilir mi?
Ö2: Bu yeterli olmaz mı? Zaten bu temel bağıntı. Bence yapılabilecek bu…

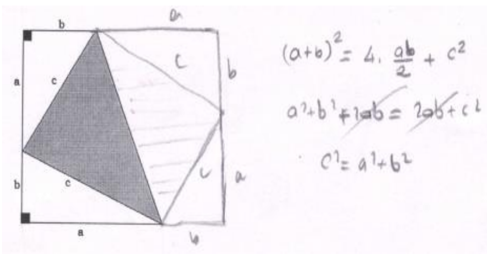


Tabloya göre öğretmenin birinci ve üçüncü görseller ile ilgili akıl yürütmeleri veya muhakemeleri çok iyi olmasa da ikinci görselle ilgili akıl yürütmeleri daha iyidir. Nitekim ikinci mülakatın sonunda öğretmen birinci görselin ne işe yarayabileceği ile ilgili bir çıkarımda da bulunmuştur. Yani öğretmenin görseller üzerine yaptığı akıl yürütmelerinin ve çıkarımlarının çok iyi düzeyde olduğu söylenmez. Daha çok öğretmen bildiği ilişkilerden diğer ilişkileri çıkarma eğilimindedir. Bu bağlamda öğretmen, iyi düzeyde de olmazsa ispat yapabilmekte, çıkarımda bulunabilmektedir. Ancak öğretmenin ikinci görselle ilgili mülakatın son bölümündeki ifadesinden, öğretmenin Pisagor teoreminin ispatının sıralamasını hatırladığını, ancak yaptığı ispata pek inanmadığı anlaşılmaktadır. Yani öğretmen, yapılmış bir ispatı izleyebileceğini, ancak kendinin ispat yapamayacağını düşünmektedir. Ayrıca öğretmen üçüncü çözümde trigonometrik kavramaların koordinat sisteminde ve birim çember üzerindeki anlamları yetersiz gözükmektedir. Bu bağlamda öğretmenin farklı geometrik alanlar arasında yeterli bağlantıları kurduğu söylenemez. O halde öğretmenin, düzey 2 olan formal olmayan (basit) çıkarım düzeyindeki bazı özellikleri gösterdiği söylenebilir.

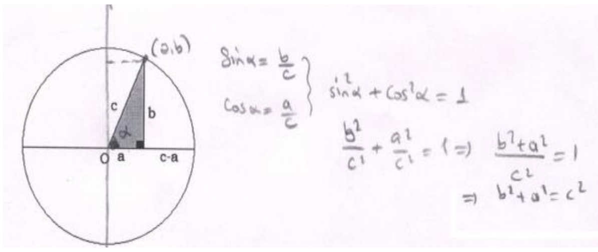
3.3. Ö3 Öğretmenine Ait Özel Durum

Eğitim Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık 4 yıldır kadrolu öğretmenlik yapan bu öğretmenin; geometrik öz-geçmiş puanı 10, uzamsal görselleştirme beceri testi puanı 31, van Hiele düzeyleri testi doğru sayıları sırasıyla (5, 5, 5, 4, 4), ağırlıklı puanı 31 ve düzeyi ise Düzey 4'dir. Bu öğretmene ait mülakatlardan kesitler ve çözümler Tablo 8 de sunulmuştur.

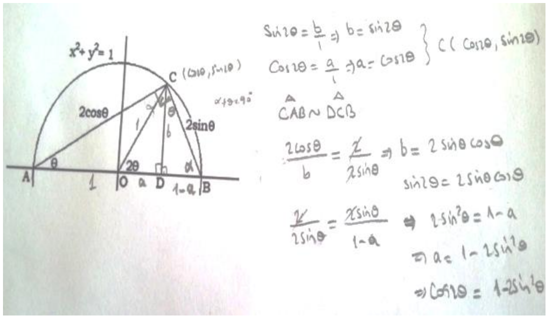
Tablo 8. *Ö3 öğretmenine ait mülakattan kesitler ve çözümler*

Mülakattan kesitler	**Çözümler**
A: Bu zamana kadar böyle bir görsel gördün mü? Ö3: Gördüm gibi. Aynı olmazsa da çok benzerlerini gördüm. A: Sana göre bu görselin verilme amacı ne olabilir? Ö3: Bilmiyorum ancak ilk etapta Pisagor bağıntısı yazılabilir. A: Başka ne olabilir? Ö3: Bu görseli ek çizim yaparak kareye tamamlayalım. Oluşan iki karenin alanlarından ve dört dik üçgenin alanlarından yararlanabiliriz... A: Nasıl yani, içteki şekil kare mi? Ö3: Evet karedir. Görseldeki diğer dik üçgenler eş olduğundan, taralı üçgenin bir açısı dik açı olur… [A: Devam edelim]… Karenin alanı, dört dik üçgen ile içteki karenin alanları toplamına eşittir… Demek ki elde edilen sonuç Pisagor bağıntısını veriyor. Yani doğruluğunu gösteriyor…	

A: Daha önce böyle bir görsel gördün mü?
Ö3: Buna benzer gördüm, ama aynı değil gibi.
A: Bu görsel üzerine akıl yürütürsen ne elde edebilirsin?
Ö3: Çember yardımıyla trigonometrik açıların hesabı ile ilgili bir görsele benziyor. Bilmem yapıp görelim…
A: Evet, devam edelim?
Ö3: Şimdi bu görseli koordinat düzlemine çevirelim.
A: Niçin?
Ö3: Düzlemde çember ile analitik düzlem çok ilişki olduğundan. Biraz da sezgisel galiba…
A: Tamam, şimdi ne yapacaksın?
Ö3: (a, b) noktası ve dik üçgen yardımıyla sin ve cos değerlerini sırasıyla yazarsak b/c ve a/c elde ederiz. $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ olduğundan $b^2 + a^2 = c^2$ Pisagor bağıntısı elde ettim. Yani amaç aslında Pisagor bağıntısı elde etmekmiş. Gerçekten Pisagor bağıntısının ortaya çıkacağını tahmin etmezdim…



A: Bu şekilde bir görsel gördün mü?
Ö3: Çok benzerlerini gördüm. Birim çember ve trigonometrik ifadeler var…
A: Ne amaçla verilmiş olabilir?
Ö3: Bakmak lazım… Şimdi a ve b dersek ve 2θ için trigonometrik ifadeleri yazarsak $a = cos\,2\theta$ ve $b = sin2\theta$ olur. Bunlar ayrıca C noktasının koordinatlarıdır… Şimdi de benzer üçgenler bulalım…
A: Niçin bir anda Öklid geometrisine döndün?
Ö3: Ne olacak ki bu iki alan arasında geçişler yapılabilir. Görselle göre benim işime benzer üçgenler yarayabilir… Tamam, CAB üçgeni ile DCB üçgeni benzerdir. Benzerlik oranlarını yazalım… Evet, elde ettim… $cos\,2\theta$ ve $sin2\theta$ ile ilgili bağıntıları doğrulamak amaçmış, yani yarım açı formülleri oluşturmak…



Bu öğretmen daha önce kanıtlanmış teoremlerden veya kurallardan yaralanarak üç ifade içinde geçerli ispatlar yapabilmiştir. Öğrenci ikinci ve üçüncü görsellerle akıl yürütürken Öklid geometrisi ile analitik geometri arasında bağlantıları ve geçişleri çok iyi bir şekilde sağlamıştır. Ayrıca öğretmen bildiği ilişkilerden diğer ilişkileri de oluşturabilmiştir. Benzer şeklide hem görsellerin özellikleri hem de diğer görsellerin özellikleri arasında ilişkileri kurabilmiştir. Bu bağlamda öğretmen çözümleri incelendiğinde, öğretmenlerin çözümleri devam ettirebildiği, çıkarımlarda bulunabildiği ve onları da anlamlandırabildiği yani anlamlarını bildiği belirlenmiştir. O halde bu öğretmen düzey 3’e ait bazı özellikleri gösterdiğinden, bu öğretmenin en az düzey 3 olan formal çıkarım düzeyinde olduğu söylenebilir. Öğretmenin en az düzey 3 olduğunun söylenmesinin nedeni, düzey 4 ile ilgili herhangi bir mülakat sorusu sorulmadığından öğrencinin bu düzeye ait özelliklere sahip olup olmadığı belirlenememesidir.

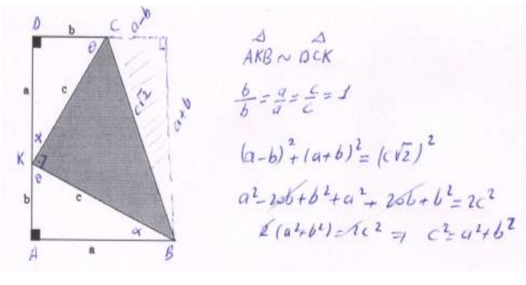
3.4. Ö4 Öğretmenine Ait Özel Durum

Fen- Edebiyat Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık 3 yıldır ücretli öğretmenlik yapan bu öğretmenin; geometrik öz-geçmiş puanı 4, uzamsal görselleştirme beceri testi puanı 26, van Hiele düzeyleri testi doğru sayıları sırasıyla (5, 5, 5, 2, 3), ağırlıklı puanı 7 ve düzeyi ise Düzey 2’dir. Bu öğretmene ait mülakatlardan kesitler ve çözümler Tablo 9 da sunulmuştur.

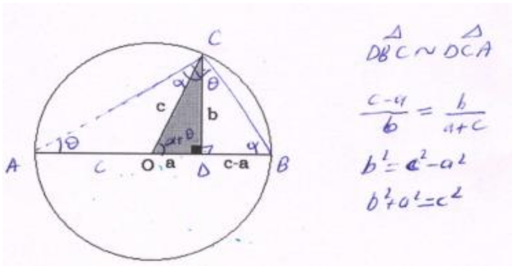
Tablo 9. *Ö4 öğretmenine ait mülakattan kesitler ve çözümler*

Mülakattan kesitler | **Çözümler**

A: Siz daha önce böyle bir görsel gördünüz mü?
Ö4: Gördüm gibi…
A: Bu görsel niçin verilmiş olabilir?
Ö4: Bilmiyorum. Ancak bu görselden dikdörtgen oluşturalım. Burada AKB üçgeni DCK üçgenine benzerdir… Hepsi sadeleşiyor ve sonuç 1 oldu. Doğru yoldayız galiba… Buradan bir şey elde edilemiyor.
A: Şimdi ne yapacaksın?
Ö4: Yeni oluşturulan üçgende Pisagor bağıntısı yazalım… O halde diğer üçgenlerdeki Pisagor bağıntısının doğru olduğunu gösterdik. Bir şey anlamadım.
A: Neyi anlamadın?
Ö4: Anlayamadığım, Pisagor bağıntısından yararlanarak Pisagor bağıntısını göstermiş olmamız…

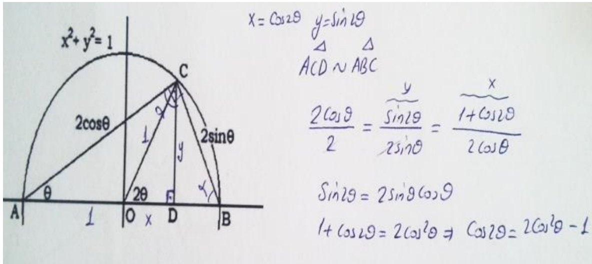


A: Böyle bir görsel veya şekil gördünüz mü?
Ö4: Belki görmüş olabilirim. Bilmiyorum…
A: Ne için verilmiş olabilir?
Ö4: Bakmak lazım… Önce ek çizimler yapalım.
A: Niçin ek çizim yapacaksın?
Ö4: Görselden çok fazla bir ilişki oluşturamadım. Belki ek çizimler işime yarar…
A: Anladım, ek çizimleri nasıl kullanacaksın?
Ö4: Üçgenlerin benzerliğini kullanalım… DBC üçgeni DCA üçgenine benzerdir… Oranları yazarsak $b^2 + a^2 = c^2$ oluyor.



A: Ne yapmış oldunuz?
Ö4: Evet bu da bir önceki gibi Pisagor bağıntısının oluşturulmasını içeriyor… Aslında görsel çember veya alan gibi gözükmesine rağmen amaç Pisagor bağıntısını doğrulamakmış, onu anladık…

A: Bu zamana kadar böyle bir görsel gördünüz mü?
Ö4: Evet gördüm gibi… Birim çember bu. Ama $2cos\theta$ ve $2sin\theta$ olanını görmedim. Bakmak lazım…
A: Nasıl yani?
Ö4: OD uzunluğuna x dersek $x = cos2\theta$ ve CD ye y dersek $y = sin2\theta$ olur. Tamam bir önceki görseldeki gibi benzer üçgenler bulalım… ACD üçgeni ABC üçgenine benzerdir. Benzerlik oranlarını yazalım.
A: Ne elde edeceksin?
Ö4: O halde $sin2\theta = 2\, sin\theta\, cos\theta$ ve $cos2\theta = 2cos^2\theta - 1$ oluyor. Bunlar yarım açı formülleri…



A: Farklı bağıntılar elde edilebilir mi?
Ö4: Ancak $cos2\theta$ nın $sin\theta$ ifadesine bağlı olduğu bağıntıyı nasıl bulabiliriz ki. Bu benzerlik oranlarından çıkmıyor…
A: Koordinat düzlemi bir işe yarar mı?
Ö4: Analitik geometrim çok iyi değil. Belki görselin özellikleri hakkında ilişkileri kuramayabilir. Zaten yaptıklarımın bazılarına çokta anlam veremedim…

Her ne kadar tabloya göre bu öğretmen ispatları yapmış gözükse de, öğretmen aslında yapmış olduğu ispatları anlamlandırmada zorluk yaşadığı tespit edilmiştir. Bu bağlamda öğretmen yapmış olduğu çıkarımlarla ve ispatlarla ilgili tereddütler yaşamaktadır. Yani öğretmen aksiyomatik anlamda çıkarımlarının anlamını kavrayamadığı ve ispatları arasındaki karşılıklı ilişkileri tam olarak kuramadığından dolayı öğretmenin 3.düzey olan çıkarım düzeyi altında bir düzeye sahip olduğu söylenebilir. Ayrıca öğretmen ispatlarında açıklamadan fazlasını yapmış, görselleri kullanarak açıklamalarının doğruluğunu göstermiştir. Bu özellik ise düzey 2 olan formal almayan (basit) çıkarım düzeyin özelliklerindendir. O halde öğretmen, görseller arasındaki soyut ilişkileri anladığından, ispatla ilgili geometrik bir anlayışa sahip olmasına rağmen formal anlamda ispatları anlamlandırmada sıkıntı yaşadığından, öğretmenin en az düzey 2'de olduğu söylenebilir.

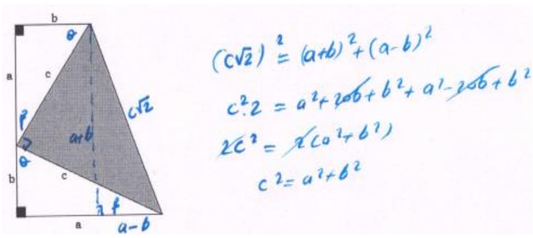
3.5. Ö5 Öğretmenine Ait Özel Durum

Fen-Edebiyat Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık 4 yıldır kadrolu öğretmenlik yapan bu öğretmenin; geometrik öz-geçmiş puanı 4, uzamsal görselleştirme beceri testi puanı 25, van Hiele düzeyleri testi doğru sayıları sırasıyla (5, 5, 4, 4, 2), ağırlıklı puanı 15 ve düzeyi ise 3. Düzeydir. Bu öğretmene ait mülakatlardan kesitler ve çözümler Tablo 10 da sunulmuştur.

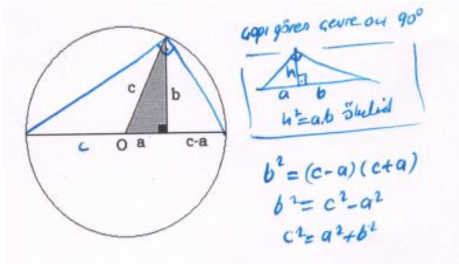
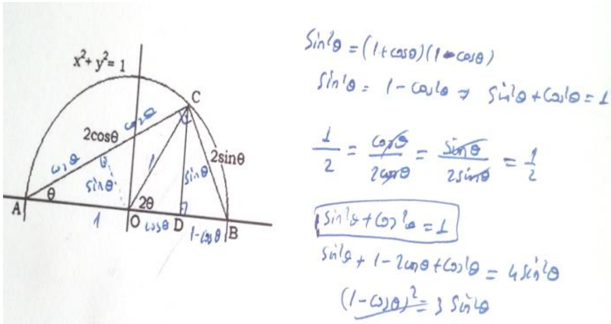
Tablo 10. *Ö5 öğretmenine ait mülakattan kesitler ve çözümler*

Mülakattan kesitler **Çözümler**

A: Bu görseli daha önce gördünüz mü? Görsel niçin verilmiş olabilir?
Ö5: Benzerlerini gördüm… Dik inelim.
A: Niçin dik ineceksin?
Ö5: Dik yamuklarda genel anlamda dik inilir. Dik inelim. Kenarları c olan ikizkenar dik üçgen var. Yeni oluşturulan dik üçgende Pisagor bağıntısını uygularsak $c^2 = b^2 + a^2$ olur…



A: Ne elde etmiş oldun?
Ö5: Bu bağıntı diğer iki dik üçgen için doğru olan Pisagor bağıntısıdır. Amaç Pisagor bağıntısını doğrulamak mı? Tam anlayamadım…
A: Neyi anlamadın?
Ö5: Pisagor bağıntısını kullanarak Pisagor bağıntısını doğruluğu göstermek, ama yaptığım işlem doğrudur..

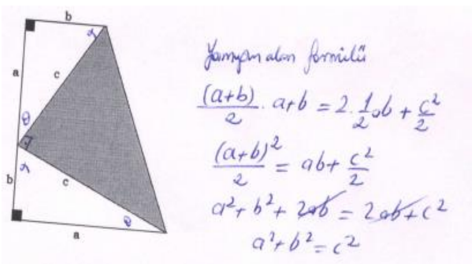
A: Bu şekli daha önce gördünüz mü? Ö5: Çemberle ilgili sorular çözerken benzerlerini gördüm. A: Bu şeklin verilmesinin amacı ne olabilir? Ö5: … Çapı gören çevre açı 90 olur. Öklid bağıntısını kullanalım. A: Niçin Öklid bağıntısını kullanacaksın, özel bir nedeni mi var? Ö5: Dik üçgen ve inilen bir dikme var. Bu durumda genelde Öklid bağıntısını kullanırız… Buna göre yüksekliğin karesi ayırdığı parçalara eşit, yani çizdiğim yeni şekilde $h^2 = a.b$ olmalı… A: Tamam anladım, devamında? Ö5: Görsele tekrar dönüp Öklid bağıntısını uygularsak $b^2 + a^2 = c^2$oluyor. Yine Pisagor bağıntısını oluşturduk. Buda doğru işlem yaptığımı gösteriyor.	
A: Daha önce böyle bir görsel gördünüz mü? Ö5: Birim çember ve trigonometrik ifadeler var. Tam olarak hatırlamıyorum… A: Niçin bu şekil verilmiş? Ö5: Bir önceki şekle çok benziyor. $OD = cos\theta$ ve $CD = sin\theta$ olur… Yine Öklid bağıntısını yazalım… $sin^2 2\theta + cos^2 2\theta = 1$ olur. Bu doğru bir ifadedir. Amaç bunu bulmak herhalde… A: Fakat $2cos\theta$ ve $2sin\theta$ niçin verilmiş olabilir? Ö5: Bakalım… Paralel çizersek ve Thales bağıntılarından… 1/2 oluyor. Demek ki doğru yapmışsız. … $sin^2 2\theta + cos^2 2\theta = 1$ oluyor… Bir dakika… A: Tamam, ne yapacaksın şimdi? Ö5: Pisagor bağıntısını uygularsak… Yok, yok bir şey çıkmadı…	

Öğretmenin birinci ve ikinci görsellerle ilgili geçerli akıl yürütmeler gerçekleştirmiş, fakat birinci görselle ilgili çözümünde tereddüt yaşamıştır. Benzer şekilde tıpkı birinci görselle ilgili çözümde olduğu gibi üçüncü görsele ilişkin gerçekleştirdiği akıl yürütmeleri de çok geçerli değildir. Çünkü öğretmen bu görselin özellikleri arasında doğru ilişkiler kuramamış, ispat için verilen ifadeleri ispatlama sürecinin dışında bırakmıştır. Ancak öğretmen diğer iki görselle ilgili olarak ispatları takip edebilmiş ve çıkarımlarda bulunabilmiştir. Ayrıca iki görselin özellikleri arasında ilişkileri kurmuş ve hatta şekil özellikleri ile ilgili tüm özellikleri dikkate almadan gerekli olan gerek ve yeter şartları belirlemiştir. Bu bağlamda öğretmen her ne kadar iki görselde ispatları takip edebilmiş ve çıkarımlarda bulunabilmiş ise de, ispatların adımlarını mantıksal delillerle çok destekleyemediğinden ve tereddütler yaşadığından, öğretmenin düzey 2 olan formal olmayan (basit) çıkarım düzeyinde olduğu söylenebilir. Bu öğretmen test sonuçlarına göre düzey 3 de gözükse de aslında düzey 2'nin özelliklerini göstermiştir.

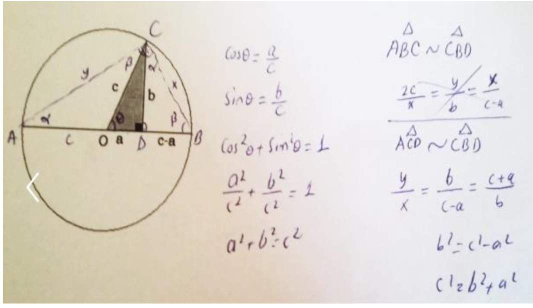
3.6. Ö6 Öğretmenine Ait Özel Durum

Fen-Edebiyat Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık 6 yıldır kadrolu öğretmenlik yapan bu öğretmenin; geometrik öz-geçmiş puanı 8, uzamsal görselleştirme beceri testi puanı 28, van Hiele düzeyleri testi doğru sayıları sırasıyla (5, 5, 5, 4, 5), ağırlıklı puanı 31 ve düzeyi ise Düzey 4'dir. Bu öğretmene ait mülakatlardan kesitler ve çözümler Tablo 11 de sunulmuştur.

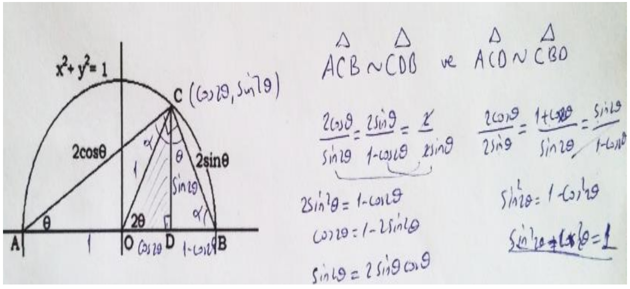
Tablo 11. *Ö6 öğretmenine ait mülakattan kesitler ve çözümler*

Mülakattan kesitler	**Çözümler**
A: Böyle bir diyagram veya görsel daha önce gördünüz mü? Ö6: Hayır. Ancak belki ÖSYM sınavlarında soru olarak çıkmış olabilir. A: Bu gösterimle ilgili ne düşünüyorsun, yani ne olabilir? Ö6: Çok emin değilim. Yamuğun içinde bir alan formülü gibi gözüküyor. Yamuğun alan formülünü yazalım… Şimdi içteki alanları toplayıp yamuğun alan formülünü eşitleyelim… A: Taralı alanı nasıl bulacaksın? Ö6: İki eş üçgen olduğuna göre, taralı üçgen ikizkenar dik üçgendir… A: Evet, ne elde edeceksin? Ö6: Bende bilmiyorum… Cebirsel işlemleri yapalım… Evet, $b^2 + a^2 = c^2$ oluyor… Yani alanlar yardımıyla diğer iki üçgendeki Pisagor bağıntısının doğru olduğunu göstermiş olduk… Aslında bu görsel ile ilgili eminim farklı çözümlerde olabilir.	

A: Bu diyagramı daha önce gördünüz mü?
Ö6: Hayır. Ancak yine a, b, c'yi görünce aklıma Pisagor bağıntısı geliyor. Fakat çemberi görünce trigonometri aklıma geliyor. Anlamadım.
A: Belki sizce bu görselden ne elde edilebilir?
Ö6: Ben trigonometrik fonksiyonları yazayım… $cos\theta = a/c$ ve $sin\theta = b/c$ olur. … $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ ise $b^2 + a^2 = c^2$ oldu. Bu da Pisagor bağıntısının doğruluğunu göstermemizi sağladı…
A: Görselle ilgili farklı akıl yürütmeler yapılabilir mi?
Ö6: Şimdi ek çizim yapalım… x ve y diyelim… ABC üçgeni ile CBD üçgeni benzer üçgenlerdir… Oranları yazalım, olmadı.
A: Niçin olmadı?
Ö6. Çok bilinmeyen var. Başka benzer üçgenlere bakalım. ACD ile CBD benzer üçgenler… Evet, aynı şekilde Pisagor bağıntısı doğrulandı…



A: Daha önce böyle bir şekil gördün mü?
Ö6: Birim çember üzerinden trigonometrik bağıntılar ile ilgili durumlar aklıma geliyor.
A: Bu görselde amaç ne olabilir?
Ö6: Şimdi bir önceki şekle benziyor. Bu bakımdan C noktasının koordinatlarını bulalım.
A: Niçin analitik geometriye geçiş yaptın?
Ö6: bazen analitik yaklaşımlar daha fazla kolaylık sağlıyor. Zaten analitik geometriden Öklid geometriye karşılıklı geçişler kolaydır…
A: Evet, şimdi ne yapacaksın?
Ö6: … C noktasının koordinatları $cos2\theta$ ve $sin2\theta$ olur. Benzerlikler yazabiliriz… ACB üçgeni ile CDB üçgeni benzer üçgenler… ACD üçgeni ile CBD üçgeni benzer üçgenler, Başkaları da olabilir…
A: Ne yapacaksın?
Ö5. Tamam işte. Trigonometrideki yarım açı formüllerinin bazılarını elde edilebiliyoruz.

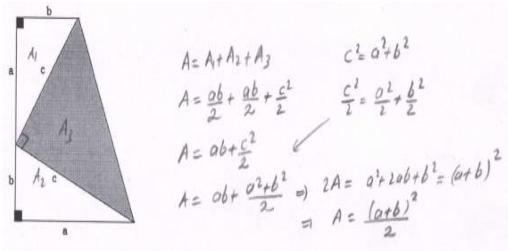


Öğretmen farklı geometrik şekiller arasında ilişkileri kurabilmekte ve bildiği ilişkilerden diğer ilişkilerle ilgili çıkarımlarda bulunabilmektedir. Öğretmen tüm ispatları matematiksel olarak gerçekleştirmiş, çıkarımlarda bulunmuş ve ispatları anlamlandırmıştır. Ayrıca öğretmen bir şekle ait tüm özellikleri düşünmek yerine kendine yetecek gerek ve yeter şartları seçebilmektedir. Öğretmenin sahip olduğu bu özelliklerle her ne kadar düzey 2'ye ait olsa da, öğretmen matematiksel anlamda ispat yapabildiğinden bir üst düzeyde gözükmektedir. Nitekim öğretme görsellerle ilgili akıl yürütebilmiş, ispat yapabilmiş ve daha önce bildiği teorem ve kurallardan yeni ispatlar için yararlanabilmiştir. Sonuç olarak öğretmen ispatları mantıksal delillerle destekleyerek tereddüt etmenden gerçekleştirdiğinden öğretmenin düzey 3 olan formal çıkarım düzeyinde olduğu söylenebilir.

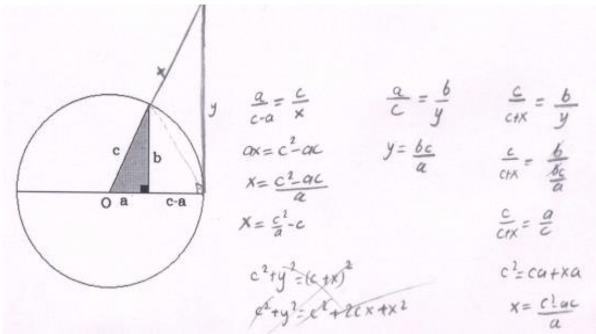
3.7. Ö7 Öğretmenine Ait Özel Durum

Fen-Edebiyat Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık 1 yıldır ücretli öğretmenlik yapan bu öğretmenin; geometrik öz-geçmiş puanı 2, uzamsal görselleştirme beceri testi puanı 22, van Hiele düzeyleri testi doğru sayıları sırasıyla (5, 5, 4, 2, 2), ağırlıklı puanı 7 ve düzeyi ise 2. Düzeydir. Bu öğretmene ait mülakatlardan kesitler ve çözümler Tablo 12 de sunulmuştur.

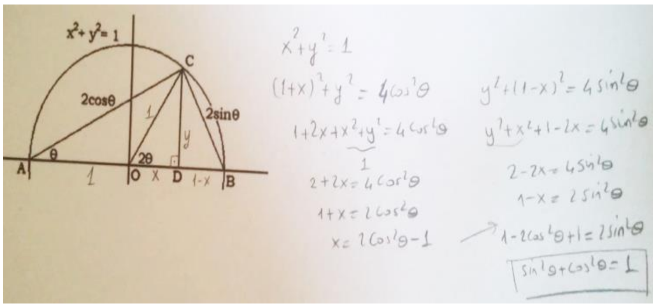
Tablo 12. *Ö7 öğretmenine ait mülakattan kesitler ve çözümler*

Mülakattan kesitler	Çözümler
A: Daha önce böyle bir şekil gördün mü? Size göre görsel niçin verilmiş olabilir? Ö7: Benzerlerini gördüm… İlk aklıma gelen alanlarla ilgili hesaplamalar… A: Nasıl yani? Ö7: Şöyle ki; yamuğun alanı A ise diğer alanlar $A1, A2\ ve\ A3$ ise $A = A1 + A2 + A3$ olur. Bu içteki üç alan dik üçgenlerin alanı… $A = ab + \frac{c^2}{2}$ ve $b^2 + a^2 = c^2$ için $A = (a+b)^2/2$ olur… Bu da yamuğun alan formülüdür… Evet, bu formül doğrudur. Çünkü yamuğun alanı alt taban ile üst tabanın toplamının yarısının yükseklikle çarpımına eşittir…	

A: Daha önce böyle bir görsel gördün mü?
Ö7: Olabilir…
A: Niçin verilmiş olabilir bu şekil?
Ö7: Bilmiyorum…
A: Ne yapabilirsin?
Ö7: Çizim yapalım… x ve y diyelim… Tamam, Thales bağıntısından x ve y bulalım… Bulduğumuz sonuçlar hiçbir geometrik yapıya uymuyor, hiçbir işe de yaramadı gibi… Bu geometri beni bazen kasıyor…
A: Başka ne yapılabilir?
Ö7: Sadece Pisagor bağıntısını görüyorum… Bu da olmadı… Daha ötesi yok gibi…



A: Daha önce böyle bir görsel gördünüz mü?
Ö7: Gördüm galiba… Birim çember ve trigonometrik ifadeler var…
A: Bu görsel ile ilgili nasıl bir akıl yürütme yapabilirsiniz?
Ö7: Yarıçap 1 olduğundan ve OD ye x, CD ye y diyelim… Zaten $x^2 + y^2 = 1$ oluyor… Şimdi iki üçgende Pisagor bağıntısını uygulayalım… Buradan $x = 2cos^2\theta - 1$ olur. Ayrıca $x = 1 - 2\,sin^2\theta$ olur. Eşitlersek $sin^2\theta + cos^2\theta$ =1 olur. Buda doğru bir ifadedir.



A: Belki görselde $2cos\theta$ ve $2sin\theta$ niçin verilmiş olabilir? Hiç kullanmadın.
Ö7: Kullanmak zorunda mıyız? …
A: Ama görselde bir özellik olarak verilmiş, Belki bir ilişki için verilmiş olabilir?
Ö7: Bazen geometri sorusu çözerken her verileni kullanmıyoruz ki. Bana göre şart değil…

Bu öğretmen görsellerin özelliklerini bilmesine rağmen, görsellerin özellikleri arasında ilişki kuramamıştır. Öğretmen görsellerin özelikleriyle ilgili ilişkileri kuramadığından dolayı şekle ait gerek ve yeter şartları da ayrıt edememiş, farklı özellikleri teke tek gözden geçirmek zorunda kalmıştır. Ayrıca öğretmen ne matematiksel anlamda ne de informal anlamda bir ispat yapamamış veya herhangi bir çıkarımda da bulunamamıştır. Özellikle verilen görsellerle ilgili yetersiz akıl yürütmeler gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda öğretmenin düzey 1 olan analiz veya betimsel düzeyde olduğu söylenebilir. Ancak öğretmenin görsellerin özelliklerini özellikle ikinci ve üçüncü soruda düzgün şekilde analiz edemediği ve görsellerin özellikleri ile ilgili yetersiz bilgiye sahip olduğu düşünülürse öğretmenin en çok düzey 1 de olduğu ifadesi daha doğru bir ifade olur. Bu öğretmenin düzey 2 de olmamasının nedeni ise görseller üzerine yaptığı gözlemler ile ispatlama için gerekli çıkarımları sağlayamaması ve aksiyomatik anlamda çıkarımların anlamını kavrayamamasıdır.

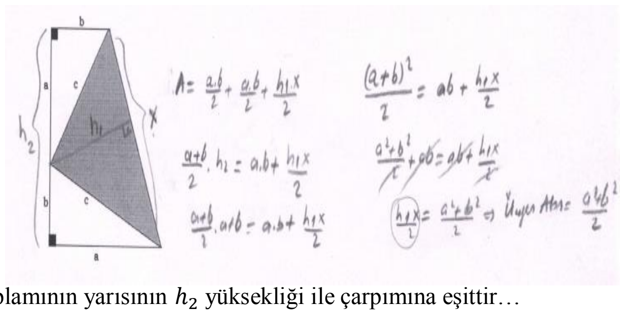
3.8. Ö8 Öğretmenine Ait Özel Durum

Eğitim Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık 2 yıldır ücretli öğretmenlik yapan bu öğretmenin; geometrik öz-geçmiş puanı 6, uzamsal görselleştirme beceri testi puanı 27, van Hiele düzeyleri testi doğru sayıları sırasıyla (5, 5, 4, 3, 3), ağırlıklı puanı 7 ve düzeyi ise Düzey 2'dir. Bu öğretmene ait mülakatlardan kesitler ve çözümler Tablo 13 de sunulmuştur.

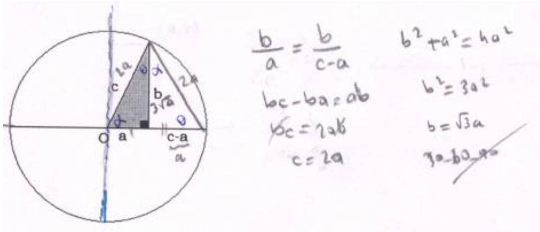
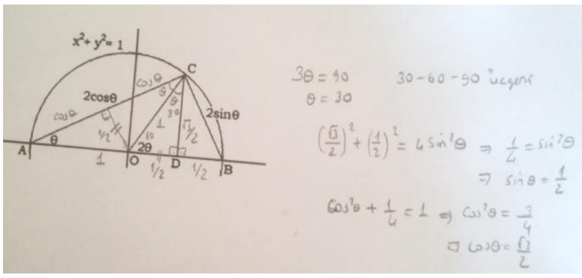
Tablo 13. *Ö8 öğretmenine ait mülakattan kesitler ve çözümler*

Mülakattan kesitler | **Çözümler**

A: Daha önce böyle bir görsel gördün mü?
Ö8: Bilmiyorum… Emin değilim, ancak benzerleri olabilir…
A: Bu görselle ilgili nasıl akıl yürütme yapabilirsin? …Yani bu görsel niçin verilmiştir?
Ö8: Direkt alanlar geliyor aklıma…
A: Nasıl yani?
Ö8: Yani içteki ikizkenar üçgenin yüksekliği h_1, yamuğun yüksekliği h_2 olsun… Yamuğun alanı üç üçgenin alanları toplamına eşittir. Bunların ikisi dik üçgen biri ikizkenar üçgendir… Yamuğun alanı ayrıca alt taban ile üst tabının toplamının yarısının h_2 yüksekliği ile çarpımına eşittir…



A: Ne elde etmiş olduk?
Ö8: İşte alan formüllerini yazdık, daha olsun…

A: Böyle bir görsel gördünüz mü? Ö8: Görmedim… A: Bu görsel niçin verilmiştir? Ö8: Çok fazla fikrim yok… Ama işlemler yapalım… Üçgenlerin açılarından bu iki üçgen benzer olduğundan $c = 2a$ olur… Yani yarıçap $2a$ olur. O halde diğer kenar $3\sqrt{a}$ olur… A: Bunlar ne işine yarayacak? Ö8: 30-60-90 dik üçgeni gibi bir üçgenin eldesi olmalı… Tam olarak bilmiyorum…	
A: Daha önce böyle bir görsel gördün mü? Ö8: Bilmiyorum… Ancak benzerleri olabilir… A: Bu görselle ilgili nasıl akıl yürütme yapabilirsin? Ö8: Birim çember var. Yarıçap 1 olur. O halde trigonometrik ifadelerde olduğu için açıların trigonometrik değerleri elde edilebilir. A: Nasıl yani? Ö8: Burada 30-60-90 üçgeni elde edilebilir… Pisagor bağıntısından $sin\theta = 1/2$ olur… Paralel çizelim… O halde $cos\theta = \sqrt{3}/2$ olur… Bunlar sin ve cos değerleridir... Zaten birim çemberden bunlar elde ediliyordu bildiğim kadarıyla… A: Görselde ki $2cos\theta$ ve $2sin\theta$ niçin verilmiş olabilir? Ö8. Tahminim diğer trigonometrik açıların değerlerini elde temek için…	

Öğretmenin üç görselle ilgili akıl yürütmeleri sonucu oluşturduğu ispatlar geçerli ispatlar değildir. Öğretmenin görsellerin özellikleri ile ilgili kurduğu ilişkiler veya çıkarımlar yanlıştır. Ayrıca görsellerin özellikleri ile ilgili tanımlamaları da yanlıştır. Öğretmen doğru bildiğini zannettiği tanımlamalar veya özelliklerle ilgili ilişkilerden diğer ilişkileri elde etmeye çalışmış, ancak başarılı olamamışlardır. Bu öğretmen ne informal anlamda ne de matematiksel anlamda doğru ispatlar yapamamıştır. Her ne kadar öğretmen teste sonuçlarına göre düzey 2'de olduğu bilinse de öğretmenin görsellerin özellikleri ile ilgili yetersiz bilgiye sahip olmasından, görseller arasındaki ilişkileri göremeye yarayan akıl yürütmeleri yapamadığından ve ispat yapabilmek için gerekli ve yeterli koşulları belirleyemediğinden dolayı öğretmenin düzey 1 olan analiz veya betimsel düzeyin özelliklerini gösterdiği söylenebilir.

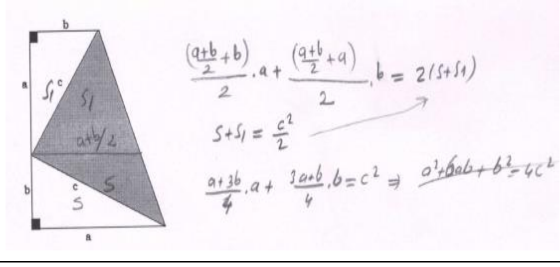
3.9 Ö9 Öğretmenine Ait Özel Durum

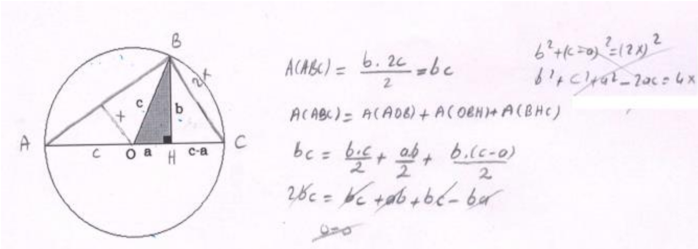
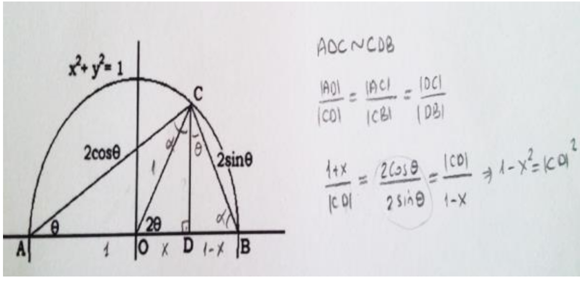
Mühendislik Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık 1 yıldır ücretli öğretmenlik yapan bu öğretmenin; geometrik öz-geçmiş puanı 3, uzamsal görselleştirme beceri testi puanı 20, van Hiele düzeyleri testi doğru sayıları sırasıyla (4, 4, 2, 1, 1), ağırlıklı puanı 3 ve düzeyi ise Düzey 1'dir. Bu öğretmen elde edilen bulgurlar herhangi bir düzeyle ilişkilendirilememiştir.

3.10. Ö10 Öğretmenine Ait Özel Durum

Fen-Edebiyat Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık 1 yıldır ücretli öğretmenlik yapan bu öğretmenin; geometrik öz-geçmiş puanı 2, uzamsal görselleştirme beceri testi puanı 22, van Hiele düzeyleri testi doğru sayıları sırasıyla (5, 5, 2, 2, 2), ağırlıklı puanı 3 ve düzeyi ise Düzey 1'dir. Bu öğretmene ait mülakatlardan kesitler ve çözümler Tablo 14 de sunulmuştur.

Tablo 14. *Ö10 öğretmenine ait mülakattan kesitler ve çözümler*

Mülakattan kesitler	Çözümler
A: Daha önce böyle bir görsel gördün mü? Ö2: Benzerlerinin gördüm gibi. Yamuğun alanı ile ilgili… A: Bu gösterinden yaralanarak ne elde edebilirsin? Ö2: Şöyle yapalım. Paralel çizersek bu uzunluk $(a + b)/2$ olur. Alanlar $S1$ ve S ise olursa toplam alan $2(S + S1)$ olur. $S + S1 = c^2/2$ olduğundan yamuğun alanı c^2 olur. Yamuğun üst ve alt taban ile yükseklikle ilgili formülünü yazarak c^2eşitlersek… Çıkan sonuç yanlış gibi… Anlamadım nerede hata yaptık…	

A: Böyle bir görsel gördün mü? Ö2: Hatırlamıyorum. A: Bu görsel ne için verilmiş olabilir? Ö2: Bilmiyorum. Ancak alanlara bakalım… ABC üçgeninin alanı bc olur. ABC üçgenin alanı içerdeki üç üçgenin alanları toplamına eşit olur. O halde; $A(ABC) = A(AOB) + A(OBH) + A(BHC)$ olur. Ancak 0=0 oluyor. Bir şey olmadı… Ya da paralel çizersek x dersek 2x olur. Pisagor yazarsak… Buda olmadı…	
A: Daha önce bu şekli gördün mü? Ö2: Bilmiyorum. Trigonometrik ifadeler var ve birim çember… Benzerleri olabilir… A: Neden verilmiş olabilir, yani ne elde etmek amacıyla verilmiş olabilir? Ö2: Bilmiyorum… Yarıçapı 1 birim olan biri çember var. Benzer üçgenleri bulmaya çalışalım. O halde ADC üçgeni CDB üçgenine benzer… Benzerlik oranlarını yazalım… Anlamadım bir şey çıkmadı sanki. Bu ifade anlamsız. Ayrıca trigonometrik ifadeleri hiç kullanamadım. Ortada kaldılar…	

Öğretmenin üçgenlerle ilgili "iki kenarın orta noktalarını birleştiren paralel doğru parçasının uzunluğu paralel olduğu kenarın uzunluğunun yarısıdır" özelliğini ikinci görselde doğru kullanmasına rağmen, birinci görsel olan yamukta yanlış kullanmıştır. Bu bağlamda öğretmen şeklin özellikleri arasındaki ilişkileri kurabilmiş, ancak farklı görseller arasında özellik bağlamında doğru ilişkiler kuramamıştır. Ayrıca öğretmen hem informal anlamda hem de matematiksel anlamda herhangi bir ispat yapamamış ve doğru bir çıkarımda da bulunamamıştır. Bu nedenle öğretmen, verilen görsellerin özellikleri ile ilgili yetersiz bilgiye sahip olduğundan, görseller arasındaki ilişkileri görmeye yarayan ve çıkarımda bulunmasını sağlayan akıl yürütmeleri yapamadığından yani görsel akıl yürüterek çıkarımlarda bulanamadığından, öğretmen düzey 1 olan analiz veya betimsel düzeyde olduğu söylenebilir.

4. Sonuçlar ve Öneriler

Genel olarak daha yüksek geometrik özgeçmiş puanına sahip olan öğretmenlerin, daha yüksek van Hiele geometrik düşünme düzeyine ulaştığı ve daha iyi uzamsal görselleştirme becerilerine sahip oldukları belirlenmiştir. Özellikle daha yüksek geometrik özgeçmiş puanına sahip Eğitim Fakültesi mezunu ve kadrolu olarak çalışan matematik öğretmenlerinin, van Hiele geometri düşünme düzeyi testinde düzey 4 kadar ulaştıkları ve uzamsal görselleştirme beceri testinden ise daha yüksek puanlar aldıkları tespit edilmiştir.

Ayrıca mülakatlardan elde edilen verilere göre, matematik öğretmenlerinin görsel akıl yürütme becerileri ile van Hiele geometrik düşünme düzeyleri ve uzamsal görselleştirme becerileri arasında bir ilişki olduğu tespit edilmiştir. Sonuç olarak daha yüksek geometrik düşünme düzeyine ulaşan ve daha iyi uzamsal görselleştirme beceri puanına sahip olan öğretmenlerin, görsel teoremleri tanımada, onlar üzerine akıl yürütmede ve bağıntıları doğrulamada daha yetenekli olduğu tespit edilmiştir. Örneğin daha yüksek geometrik düşünme düzeyine ulaşan ve daha iyi uzamsal görselleştirme beceri puanına sahip olan Ö1, Ö3 ve Ö6 öğretmenleri diğer öğretmenlere göre görsel teoremleri tanımada, akıl yürütmede ve bağıntıları doğrulamada daha yeteneklidirler. Ayrıca öğretmenlerin görsel teoremler üzerine yürüttükleri görsel akıl yürütmeleri ile van Hiele düzeylerine atfedilen düşünme biçimleri veya davranışları arasında ilişkiler olduğu belirlenmiş ve bu ilişkilerin özellikleri aşağıda sunulmuştur.

Eğitim Fakültesi mezunu ve kadrolu öğretmenlik yapan Ö1 öğretmeni (GÖP: 10, UGBTP: 33, GDDT GDDTAP: 31, 4.D) görsel teoremler üzerinden akıl yürütürken, daha önce bildiği kurallardan, formüllerden veya teoremlerden ve ek çizimlerden yararlanarak ispatlar yapabilmiş, çıkarımlarda bulunabilmiş ve ispatlarını mantıksal delillere dayandırmıştır. Ayrıca öğretmen farklı geometrik kavramlar ve farklı geometrik alanlar arasında ilişkiler kurmuştur. Bu bağlamda Ö1 öğretmeninin en az üçüncü düzey olan formal çıkarım düzeyindeki özelliklerin bazılarını gösterdiği tespit edilmiştir. Bu öğretmen geometrik düşünme düzeyi testinden ise 4.düzeye kadar ulaşmıştır. Eğitim Fakültesi mezunu ve kadrolu öğretmenlik yapan Ö3 öğretmeni de (GÖP: 10, UGBT: 31, GDDTAP: 31, 4.D) farklı geometrik şekiller arasında ilişkileri kurabilmiş ve bildiği ilişkilerden diğer ilişkilerle ilgili çıkarımlarda bulunabilmiş, tüm ispatları matematiksel olarak gerçekleştirmiş ve ispatları anlamlandırmıştır. Ayrıca öğretmen bir şekle ait tüm özellikleri düşünmek yerine kendine yetecek gerek ve yeter şartları seçebilmiştir. O halde Ö3 öğretmeninin düzey 3'e ait bazı özellikleri gösterdiğinden, bu öğretmenin en az düzey 3 olan formal çıkarım düzeyinde olduğu söylenebilir. Fen-Edebiyat Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık 6 yıldır kadrolu öğretmenlik yapan Ö6 öğretmeni (GÖP: 8, UGBT: 28, GDDTAP: 31, 4.D) ise farklı geometrik şekiller arasında ilişkileri kurabilmiş, bildiği ilişkilerden diğer ilişkilerle ilgili çıkarımlarda bulunabilmiş, tüm ispatlarımı matematiksel olarak gerçekleştirmiş ve ispatları anlamlandırabilmiştir. Ayrıca Ö6 öğretmeni bir görsele ait tüm özellikleri düşünmek yerine kendine yetecek gerek ve yeter şartları seçebilmiştir. Bu nedenle Ö6 öğretmeni ispatları mantıksal delillerle destekleyerek tereddüt etmenden gerçekleştirdiğinden ve daha önce bildiği teorem ve kuralları yeni ispatlarda kullandığından, öğretmenin düzey 3 olan formal çıkarım düzeyinde olduğu söylenebilir.

Eğitim fakültesi mezunu olan ve yaklaşık bir yıldır ücretli öğretmenlik yapan Ö2 öğretmeni (GÖP: 6, UGBT: 22, GDDTAP: 7, 2.D), daha çok bildiği ilişkilerden diğer ilişkileri çıkarma eğiliminde olmasına rağmen, öğretmen iyi düzeyde de olmazsa ispat yapabilmiş ve çıkarımlarda bulunabilmiş, ancak kendinin ispat yapamayacağını ifade etmiştir. Yani Ö2 öğretmeni farklı geometrik alanlar arasında yeterli bağlantıları kuramadığından ve görseller üzerine yaptığı akıl yürütmeleri ve çıkarımları çok iyi düzeyde olmadığından, öğretmenin düzey 2 olan formal olmayan (basit) çıkarım düzeyindeki bazı özellikleri gösterdiği söylenebilir. Fen-Edebiyat Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık üç yıldır ücretli öğretmenlik yapan Ö4 öğretmeni (GÖP: 4, UGBT: 26, GDDTAP: 7, 2.D) ispatları yapmış gözükse de, aslında yapmış olduğu ispatları anlamlandırmada zorluk yaşadığı ve çıkarımlarla ilgili tereddütlere sahip olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca Ö4 öğretmeni aksiyomatik anlamda çıkarımlarının anlamını kavrayamamış ve ispatlar arasındaki karşılıklı ilişkileri tam olarak kuramamıştır. O halde Ö4 öğretmeni, ispatla ilgili geometrik bir anlayışa sahip olmasına rağmen formal anlamda ispatları anlamlandırmada sıkıntı yaşadığından, öğretmenin en az düzey 2'de olduğu söylenebilir. Fen-Edebiyat Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık dört yıldır kadrolu öğretmenlik yapan Ö5 öğretmeni (GÖP: 4, UGBT: 25, GDDTAP: 7, 3.D) geçerli akıl yürütmeler gerçekleştirmiş, ancak çözümlerinde tereddütler yaşamıştır. Ö5 öğretmeni üçüncü görselin özellikleri arasında doğru ilişkiler kuramamış, ispat için verilen ifadeleri, ispatlama sürecinin dışında bırakmış, ancak diğer iki görselin özellikleri arasında ilişkileri kurmuş ve hatta şekil özellikleri ile ilgili tüm özellikleri dikkate almadan gerekli olan gerek ve yeter şartları belirlemiştir. Bu bağlamda öğretmen her ne kadar iki görselde ispatları takip edebilmiş ve çıkarımlarda bulunabilmiş ise de, ispatların adımlarını mantıksal delillerle çok destekleyemediğinden ve tereddütler yaşadığından, öğretmenin düzey 2 olan formal olmayan (basit) çıkarım düzeyinde olduğu söylenebilir. Bu öğretmen test sonuçlarına göre düzey 3 de gözükse de aslında düzey 2'nin özelliklerini göstermiştir. Eğitim Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık iki yıldır ücretli öğretmenlik yapan Ö8 öğretmenin ise (GÖP: 6, UGBT: 27, GDDTAP: 7, 2.D) üç görselle ilgili akıl yürütmeleri sonucu oluşturduğu ispatlar, doğru ispatlar değildir. Ö8 öğretmenin görsellerin özellikleri arasında kurduğu ilişkiler veya çıkarımlar ve görsellerin özellikleri ile ilgili tanımlamaları yanlıştır. Ö8 öğretmeni doğru bildiğini zannettiği tanımlamalar veya özelliklerle ilgili ilişkilerden diğer ilişkileri elde etmeye çalışmış, ancak başarılı olamamıştır. Her ne kadar öğretmen test sonuçlarına göre düzey 2'de olduğu bilinse de, öğretmenin görsellerin özellikleri ile ilgili yetersiz bilgiye sahip olmasından, görseller arasındaki ilişkileri görmeyi içeren akıl yürütmeleri gerçekleştiremediğinden ve ispat yapabilmek için gerekli ve yeterli koşulları belirleyemediğinden dolayı, öğretmenin düzey 1 olan analiz veya betimsel düzeyin özelliklerini gösterdiği söylenebilir. Fen-Edebiyat Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık bir yıldır ücretli öğretmenlik yapan Ö7 öğretmeni (GÖP: 2, UGBT: 22, GDDTAP: 7, 2.D) görsellerin özelikleriyle ilgili ilişkileri kuramadığından dolayı şekle ait gerek ve yeter şartları da ayrıt edememiş, farklı özellikleri tek tek gözden geçirmek zorunda kalmıştır. Ayrıca Ö7 öğretmeni verilen görsellerle ilgili yetersiz akıl yürütmeler gerçekleştirdiğinden dolayı, ne matematiksel anlamda ne de informal anlamda bir ispat yapamamış ve herhangi bir çıkarımda bulunamamıştır. Bu bağlamda Ö7 öğretmenin görseller üzerine yaptığı gözlemler ile ispatlama için gerekli çıkarımları sağlayamaması ve aksiyomatik anlamda çıkarımların anlamını kavrayamamasından dolayı düzey 2 den daha düşük seviye olan analiz veya betimsel düzeyde (düzey 1) olduğu söylenebilir. Fen-Edebiyat Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık bir yıldır ücretli öğretmenlik yapan Ö10 öğretmeni ise (GÖP: 2, UGBT: 22, GDDTAP: 3, 1.D) görsellerin özellikleri arasındaki ilişkileri kurabilmiş, ancak farklı görseller arasında özellik bağlamında doğru ilişkiler kuramamıştır. Ayrıca öğretmen hem informal anlamda hem de matematiksel anlamda herhangi bir ispat yapamamış ve doğru bir çıkarımda da bulunamamıştır. Bu nedenle Ö10 öğretmeni, verilen görsellerin özellikleri ile ilgili yetersiz bilgiye sahip olduğundan, görseller arasındaki ilişkileri görmeye yarayan ve çıkarımda bulunmasını sağlayan akıl yürütmeleri yapamadığından yani görsel akıl yürüterek çıkarımlarda bulanamadığından, öğretmen düzey 1 olan analiz veya betimsel düzeyde olduğu söylenebilir. Mühendislik Fakültesi mezunu olan ve yaklaşık bir yıldır ücretli öğretmenlik yapan Ö9 öğretmeninden (GÖP: 3, UGBT:20, GDDTAP: 1, 1.D) elde edilen bulgular ise herhangi bir geometrik düşünme düzeyiyle ilişkilendirilememiştir.

Daha yüksek geometrik düşünme düzeyine ulaşan ve daha iyi uzamsal görselleştirme beceri puanına sahip olan öğretmenlerin, görsel teoremleri tanımada, onlar üzerine akıl yürütmede ve bağıntıları doğrulamada daha yetenekli olduğu tespit edilmiştir. Yani, çalışmaya katılan öğretmenlerin çoğunun geometriye dair bilgi eksikliğinin olduğu, geometrik özgeçmiş, geometri düşünme düzeyleri testi ve uzamsal görselleştirme beceri testi puanlarının genel olarak düşük olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca Eğitim Fakültesi haricindeki iki fakülteden mezunu olan öğretmenlerin geometriye yönelik azımsanmayacak bilgi eksikliklerin olduğu ve bu eksikliklerin ise görsel teoremleri ispatlama süreçlerine etki ettiği belirlenmiştir. Öğretmenlerdeki bilgi eksikliğinin, öğrencilerin öğrenmesinde olumsuz bir etkiye sahiptir (Ball, 1990). Çünkü öğretmen bilgisi ve öğrenci başarısı arasında pozitif bir ilişki vardır (Monk, 1994). Kısacası öğretmenler, başarılı öğretim yapmak için öğrettikleri geometriyi derinlemesine anlamak ve çok iyi bilmek zorundadırlar. İşte bu çalışma, geometri bağlamında öğretmen eğitimindeki bazı eksiklikleri ve bu eksiklikleri gidermek için gereken akademik gereksinimlerin ve müfredat değişikliklerinin yeniden gözden geçirilmesi ihtiyacının altını çizmektedir.

A Qualitative Study with Mathematics Teachers on Visual Theorems

Extended Abstract

The geometry that develops the aesthetic sensation of individuals and event that allows them to think in many ways, at the same time helping individuals to better understand the world they live in and to relate mathematical concepts and events in life. Despite being effective in different disciplines, visual (diagrammatic) reasoning skill that is thought to be more effective, especially in the field of geometry, and which is considered to be part of mental ability, it is a topic that many researchers have pointed out. Because visual reasoning is an important skill that affects students especially to prove or solve geometric problems. Many researchers have suggested that an individual working at a higher level of geometric thinking should have stronger visual reasoning skills and that visual reasoning can also be improved by geometric teaching. However, despite the considerable importance given to geometry in recent years, it has been shown in many studies that the level of comprehension of the geometry of students is not expected and desired. Such results indicate that the objectives of the curriculum are not reached, such as training individuals with geometric and spatial thinking skills. In this sense, mathematics teachers need to possess the visual reasoning skills necessary for teaching in the training of the individuals (mathematicians, scientists, engineers, doctors, graphic designers, etc.) who will form the human power of the future. The aim of this study is to qualitatively examine the relationships between math teachers' visual reasoning skills and their level of geometric thinking and spatial visualization skills in the context of proving visual theorems.

This research is a descriptive study conducted using the case study method. The study group of the study is composed of ten mathematics teachers with a postgraduate degree in a university located in the Eastern Black Sea Region. In the selection of the study group, the maximum diversity method was chosen from the purposive sampling methods. As a result of two different interviews with the teachers, the data of the study were obtained. During the first interview, it was asked to answer open-ended questions prepared by the researchers with the help of literature to determine their geometric backgrounds. Then the teachers were asked to answer van Hiele Geometry Thinking Level Test and Spatial Visualization Skill Test. The data obtained from these two different tests were presented using descriptive statistics. In this context, in order to determine the teachers' level of geometric thinking, a criterion was used in which teachers responded "at least 4 of 5 questions correctly" to each level. In the spatial visualization skill test, each teacher was given a test score of 36 points by giving (1) points to the questions that the teachers answered correctly, (0) points that they answered incorrectly or left empty. In the second interview, in order to reveal the problem solving or proving behaviours, visual reasoning skills, geometrical information about visual expressions and validation situations, clinical interviews were conducted on four different visual theorems. Data collected with clinical interviews were analysed using descriptive analysis technique.

In general, teachers with more geometric background scores have been found to have higher geometric thinking levels and better spatial visualization skills. In particular, teachers who are graduates of the Faculty of Education and who work as permanent staff were found to have achieved a level 4 in the van Hiele geometry thinking level test and higher scores than the spatial visualization skill test. In addition, teachers who attain a higher level of geometric thinking and have better spatial visualization skill scores, have been found to be more capable in recognizing visual theorems, in reasoning about them, and in verifying relationships. Another result is that there is a relationship between the visual reasoning that teachers have conducted on visual theorems and the way of thinking or behaviour attributed to van Hiele levels. However, it was found that most of the teachers who participated in the study had lack of knowledge about geometry and geometrical background, geometric thinking level test and spatial visualization skill test scores. In particular, it has been determined that teachers who have graduated from two faculties other than the Faculty of Education have a lack of information to be gained in geometry and these deficits affect the process of proving their visual theorems. The lack of information in the teachers has a negative effect on the learning of the students. Because there is a positive relationship between teacher knowledge and student achievement. In short, teachers have to know and understand the geometry they teach in order to make successful teaching. This work underscores some of the deficiencies in teacher education in the context of geometry and the need to re-examine the academic needs and curriculum changes needed to address these deficiencies.

Keywords: Geometry, visual reasoning, mathematics teachers

Kaynaklar

Akay, S. (2013). *Öğretmen adaylarının geometri düşünme düzeyleri ve beyin baskınlıklarının bazı değişkenler açısından incelenmesi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir

Altun, M. (2005). *İlköğretim ikinci kademede matematik öğretimi*. Bursa: Alfa Basım Yayım.

Anderson, M. and McCartney, R. (1997). Learning from diagrams. *International Journal of Machine Graphics & Vision, 6*(1), 57-76.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: The informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Aspinwall, L., Shaw, K., & Presmeg, N. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics,* 33(3), 301-317.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (4. Basım). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.

Bakker, A., & Hoffmann, M. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics, 60,* 333–358.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers'understanding of division. *Journal forResearch in Mathematics Education, 21*(2), 132-144

Ball, D. L., Hill, H.C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-46.

Baykul, Y. (2002). *İlköğretimde matematik öğretimi (6–8. sınıflar).* Ankara: Pegem A Yayıncılık.

Baykul, Y. (2009). *Ortaokulda matematik öğretimi (5-8. sınıflar).* Ankara: Pegem Akademi.

Casey, B. J., Jones, R. M., & Hare, T. A. (2008). *The adolescent brain.* Annals of the New York Academy of Sciences, 1124(1), 111-126

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 420-464). New York: Macmillan.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research methods in education* (5th ed.). London: Routledge Falmer.

Cross, D. I. (2009). Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' beliefs structures and their influence on instructional practices. *Journal Math Teacher Education, 12*, 325 – 346.

Çepni, S. (2012). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş* (6. baskı). Trabzon: Celepler Matbaacılık.

Duatepe, A. (2000). *An investigation of the relationship between van Hiele geometric level of thinking and demographic variable for pre-service elementary school teacher*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Dursun, Ş. ve Çoban, A. (2006). Geometri dersinin lise programları ve ÖSS soruları açısından değerlendirilmesi. *Cumhuriyet Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 30*(2), 213-221.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dodrecht, Holland: Reidel.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph, 3,* 1-97.

Guay, R. B. (1976). *Purdue spatial visualization test*. West Lafayette, IN: Purdue Research Foundation.

Gutierrez, A. (1992). Exploring the links between van Hiele Levels and 3-dimensional geometry. *Structural Topology, 18,* 31-48.

Hızarcı, S. (2004). Sunuş. In S. Hızarcı, A. Kaplan, A. S. İpek ve C. Işık (Eds.). *Euclid geometri ve özel öğretimi.* Ankara: Öğreti Yayınları.

Hill, H., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42*(2), 371-406.

Hoffman, D. D. (1998). *Visual intelligence: How we create what we see*. New York, US: W.W. Norton & Co.

Hoffmann, M. H. G. (2007). Cognitive conditions of diagrammatic reasoning. In J. Queiroz & F. Stjernfelt (Eds), *Special issue on peircian diagrammatical logic,* (pp. 1-28). Georgia Institute of Technology School of Public Policy, Atlanta, USA. [Available online at: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.87.6282&rep=rep1&type=pdf], Retrieved on March 13, 2018.

Karrass, M. (2012). *Diagrammatic reasoning skills of pre-service mathematics teachers.* The Graduate School of Arts and Sciences, Columbia University, (Order No. 3493651). [Available online at: http://search.proquest.com/docview/919522981?accountid=15333], Retrieved on March 02, 2018.

Kösa, T. (2011). *Ortaöğretim öğrencilerinin uzamsal yeteneklerinin incelenmesi.* Yayınlanmamış doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Kümbetoğlu, B. (2005). *Sosyoloji ve antropolojide niteliksel yöntem ve araştırma*. İstanbul: Bağlam Yayıncılık.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Lawton, C. A. (2010). Gender, spatial abilities, and way finding. In J. C. Chrisler & D. R. Mc Creary (Eds.), *Handbook of gender research in psychology*, (pp.317-341). Springer New York.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Monk, D. H. (1994). Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and student achievement. *Economics of Education Review, 13*(2), 125–145.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standarts for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking*. The Mathematical Association of America: MAA.

Pamuk, S., Ülken, A. ve Dilek, N. (2012). Öğretmen adaylarının öğretimde teknoloji kullanım yeterliliklerinin teknolojik pedagojik içerik bilgisi kuramsal perspektifinden incelenmesi. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, *9*(17), 415-438.

Pinto, M., & Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: a case study and a theory. *For the Learning of Mathematics, 22*(1), 2–10.

Presmeg, N.C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 595-610.

Senk, S. (1989). van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education. 20*(3), 309-321.

Sevimli, E., Yıldız, Ç. ve Delice, A. (2008). Geometri sorularında görselleme sürecine bir bakış: Nereden çizeyim? *8. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.

Terao, A., Koedinger K., Sohn, M-H., Anderson, J. R., & Carter, C. S. (2004). An fMRI study of the interplay of visual-spatial systems in mathematical reasoning. *In Proceedings of the 26th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 1327-1332). August 4-7, Chicago, USA.

Turgut, M. (2007). İlköğretim II. kademede öğrencilerin uzamsal yeteneklerinin incelenmesi. *Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, Türkiye.*

Türnüklü, E., Gündoğdu Alaylı, F., Simge Ergin, A. ve Baştürk Şahin, B.N. (2016). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının şekil oluşturma düzeylerinin bazı değişkenlerle ilişkisi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 10*(1), 281-312.

Usiskin, Z. (1982). *van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Chicago: University of Chicago, Department of Education, (ERIC Document Reproduction Service No. ED 220 288).

van De Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Allyn and Bacon.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. New York: Academic Press

Whiteley, W. (2004). Visualization in mathematics: Claims and questions towards a research program. *Paper presented at the 10 International Congress on Mathematics Education*, Copenhagen, Denmark, Cambridge, England: Cambridge University Press.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* (9. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zaskis, R., & Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behaviour, 17*(4), 429-439.

Zhang, D., Ding, Y., Stegall, J., & Mo, L. (2012). The effect of visual-chunking-representation accommodation on geometry testing for students with math disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 27*(4), 167-177.

Zimmerman, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization? In W. Zimmerman and S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*, (pp.1–8). Mathematical Association of America.