

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi

Muhittin TURAN^{1*}, Volkan KAHYA²

¹Bayburt Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Bayburt, Türkiye

²Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon, Türkiye

Geliş Tarihi: 15.08.2018

Kabul Tarihi: 25.12.2018

*Sorumlu Yazar: mturan@bayburt.edu.tr

Öz

Bu çalışmada, birinci mertebe kayma deformasyonu teorisine dayalı olarak fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşim analizi Navier tipi çözüm yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Hareket denklemleri Lagrange eşitlikleri ile türetilmiş, problemin çözümünde ise trigonometrik fonksiyonlar kullanılmıştır. Farklı sınır şartlarına, hacimsel oran fonksiyonunun farklı k değerlerine ve kirişin açıklığının yüksekliğine oranına bağlı olarak doğal frekanslar sayısal olarak hesaplanmıştır. Sayısal sonuçlar literatürle kıyaslanmış ve oldukça uyumlu oldukları görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme, Navier metodu, Birinci mertebe kayma deformasyonu teorisi.

Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams

Abstract

In this study, the free vibration analysis of functionally graded (FG) beams is performed Navier type solution method according to the first-order shear deformation beam theory. The governing equations are derived from the Lagrange's equations, and they are solved by using trigonometric series. Natural frequencies are calculated numerically for different boundary conditions, power-law indices and span-to-height ratios. Comparisons show in good agreement with the literature.

Keywords: Functionally graded material, Navier method, Free vibration, First-order shear deformation theory.

1. Giriş

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM), özel kompozitler olup bileşiminde bulunan malzemelerin mekanik özellikleri bir noktadan diğerine düzenli ve sürekli olarak değişmektedir. Klasik kompozit malzemelerde farklı malzeme özelliklerinden dolayı birleşim noktasında meydana gelen keskin değişiklikler, bu noktada gerilme yığılmalarına ve çatlak gelişimine sebep olabilir. FDM'lerde ise bir malzemedan diğerine derecelendirilmiş şekilde geçiş sağlandığından bu sorunların en aza indirgenmesi hedeflenmiştir.

Literatür incelendiğinde, FDM kirişlerle ilgili farklı teorileri esas alan çok sayıda çalışma olduğu görülür. Bu çalışmalar, aşağıda özetlenmiştir.

Aydogdu ve Taskin (2007), basit mesnetli FDM kirişin serbest titreşimini çeşitli yüksek merteye kiriş teorilerini kullanarak incelemiştir. Çalışmalarında, elastisite modülünün yükseklik boyunca bir kuvvet fonksiyonuna göre değiştiği kabul edilmiştir. Hareket denklemleri Hamilton prensibi ile elde edilmiş, Navier tipi çözüm yöntemi kullanılarak kirişin frekansları bulunmuştur. Li (2008), FDM kirişlerin statik ve dinamik analizleri için kayma deformasyonları ve dönel atalet etkilerinin Timoshenko teorisi ile dikkate alındığı bir çözüm metodu önermişlerdir. Burada, tüm malzeme özellikleri kiriş yüksekliğinin keyfi fonksiyonları olarak seçilmiştir. Matematik model olarak dördüncü mertebeden bir diferansiyel denklem türetilmiş; yer değiştirme, dönme, iç kuvvetler ve gerilmeler, bu denklemin çözümleri olarak tanımlanmıştır. Sina vd. (2009), FDM kirişlerin serbest titreşim analizi için geleneksel birinci merteye kiriş teorisinden farklı yeni bir teori önermişlerdir. Kirişte yanal normal gerilmelerin sıfır olduğu varsayılarak Hamilton prensipleri yardımıyla hareket denklemleri türetilmiştir. Şimşek (2010b), farklı yüksek merteye kiriş teorilerini göz önüne alarak FDM kirişlerin temel frekanslarını analitik olarak elde etmiştir. Thai ve Vo (2012), literatürde mevcut çeşitli yüksek merteye kayma deformasyonu teorilerini FDM kirişlerin eğilme ve serbest titreşim analizlerinde kullanmışlardır. Göz önüne alınan, teorilerde kiriş yüksekliği boyunca kayma şekil değiştirmesinin yüksek merteye değişimi dikkate alınmaktadır. Nguyen vd. (2013), eksenel yük altındaki FDM kirişlerin statik ve serbest titreşim analizleri için birinci merteye kayma deformasyonu teorisine dayalı analitik çözüm geliştirmişlerdir. Çalışmada, kayma şekil değiştirme enerjisinin dengesinden yararlanılarak türetilen enine kayma rijitliği sayesinde kesmede düzeltme çarpanı analitik olarak elde edebilmektedir. Hadji vd. (2016), FDM kirişlerin statik ve serbest titreşim analizleri için yeni bir yüksek merteye kayma deformasyon modeli geliştirmişlerdir. Teori, kiriş yüksekliği boyunca kayma gerilmesinin yüksek mertebeden değişimini hesaba katmaktadır. Navier tipi analitik çözüm ile sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Chen ve Chang (2017), FDM Euler-Bernoulli kirişlerinin serbest titreşimlerini dönüştürülmüş kesit yöntemi ile incelemiştir. Kirişte malzeme özellikleri yükseklik boyunca bir kuvvet fonksiyonuna göre değişmektedir. Yazarlar, kirişin doğal

frekansları için kapalı formda çözümler elde etmişlerdir. Lee ve Lee (2017), FDM Euler-Bernoulli kirişlerinin serbest titreşimlerini transfer matrisi metoduyla incelemiştir. Yazarlar, kirişin iki ucunda sınır şartları arasında bir ilişki kurarak FDM kiriş için kesin transfer matrisini elde etmişlerdir. Bu metodun, malzeme özelliklerinin yükseklik boyunca kuvvet fonksiyonuna göre değiştiği problemlerde doğal frekanslar ve mod şekillerinin hesabında gayet kullanışlı olduğunu ifade etmişlerdir. Bu analitik metotlara ilave olarak sonlu elemanlar metodunu kullanan Kahya ve Turan (2017), FDM kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizleri için birinci mertebeye kiriş teorisine dayalı beş düğüm noktalı ve on serbestlik dereceli bir sonlu eleman önermişlerdir. Malzeme özelliklerinin yükseklik boyunca bir kuvvet fonksiyonuna göre değiştiğini kabul etmişler; Lagrange denklemleri yardımıyla kütle, rijitlik ve eleman rijitlik matrislerini türetmişlerdir. Bu çalışmanın devamı niteliğindeki çalışmada; Kahya ve Turan (2018), fonksiyonel derecelendirilmiş sandviç kirişlerin titreşim ve stabilite analizlerini önerdikleri sonlu eleman modeli ile incelemiştir.

Bu çalışmanın amacı, birinci mertebeye kayma deformasyonu teorisine dayalı olarak fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin doğal frekanslarını Navier tipi çözüm yöntemi ile elde etmektir. Hareket denklemleri Lagrange eşitlikleri ile türetilmiş, problemin çözümünde ise trigonometrik fonksiyonlar kullanılmıştır. Farklı sınır şartlarına, hacimsel oran fonksiyonunun farklı (k) değerlerine ve kirişin açıklığının yüksekliğine oranına bağlı olarak doğal frekanslar sayısal olarak hesaplanmıştır. Sayısal sonuçlar literatürle kıyaslanmış ve oldukça uyumlu oldukları görülmüştür.

2. Formülasyon

2.1. Malzeme Özellikleri

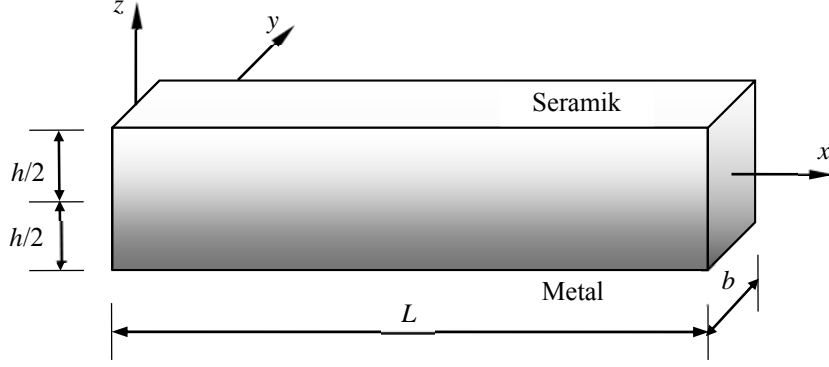
Dikdörtgen kesitli tipik bir FDM kiriş için boyutlar ve koordinat eksenleri Şekil 1'de görülmektedir. FDM kirişin üst yüzeyi tamamen seramik, alt yüzeyi ise tamamen metaldir. FDM kirişin lineer elastik, izotrop olduğu ve malzeme özelliklerinin yükseklik boyunca

$$P(z) = (P_s - P_m)V_c(z) + P_m \quad (1)$$

şeklinde değiştiği kabul edilmektedir. Burada P_s ve P_m sırasıyla seramik ve metal bileşenlerine ait malzeme özelliklerini (Elastisite modülü E , Poisson oranı ν , yoğunluk ρ) göstermektedir. V_c ise bileşimdeki seramiğin hacimsel malzeme oranını göstermektedir. Şekilde verilen izotrop FDM kiriş için V_c hacimsel malzeme oran fonksiyonu

$$V_c(z) = \left(\frac{2z-h}{2h} \right)^k, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada k negatif olmayan bir sayıdır.



Şekil 1. FDM kirişin geometrik özellikleri ve koordinat eksenleri

2.2. Birinci Mertebe Kayma Deformasyonu Kiriş Teorine Dayalı Analitik Çözüm

Birinci mertebe kayma deformasyonu kiriş teorisine göre kirişin tarafsız eksenini üzerinde olmayan herhangi bir noktasındaki yer değiştirmeleri

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u^0(x, t) - z\phi^0(x, t), \\ w(x, z, t) &= w^0(x, t) \end{aligned} \quad (3)$$

şeklinde (Kahya ve Turan, 2017). Burada t zamanı ifade etmektedir. u^0 , w^0 ve ϕ^0 ise sırasıyla kirişin tarafsız eksenini üzerinde ölçülen yatay ve düşey yer değiştirmeler ile kesit dönmesini göstermektedir. Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x}^0 - z\phi_{,x}^0, \quad \gamma_{xz} = w_{,x}^0 - \phi^0 \quad (4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, ε_{xx} ve γ_{xz} sırasıyla normal ve kayma şekil değiştirmeleridir. $(\cdot)_{,x}$ ifadesi, x değişkenine göre türevi ifade etmektedir. Fonksiyonel derecelendirilmiş izotropik kiriş için bünye denklemleri

$$\sigma_{xx} = E(z)\varepsilon_{xx}, \quad \tau_{xz} = KG(z)\gamma_{xz} \quad (5)$$

şeklinde. Burada, σ_{xx} ve τ_{xz} sırasıyla normal ve kayma gerilmeleridir. K kesmede düzeltme katsayısı olup dikdörtgen kesitler için $5/6$ 'dır. $G(z) = E(z) / 2[1 + \nu(z)]$ olarak tanımlıdır. $E(z)$, $G(z)$ ve $\nu(z)$ sırasıyla elastisite modülü, kayma modülü ve Poisson oranı olup kiriş yüksekliği boyunca değişmektedirler.

Hareket denklemleri

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (6)$$

Lagrange denklemi yardımıyla elde edilmiştir. Burada q_i ve \dot{q}_i bağımsız değişkenler olup

$$\Pi = T - (U + V) \quad (7)$$

şeklinde tanımlıdır. (7) ifadesinde T kinetik enerjiyi, U şekil değiştirme enerjisini ve V dış yükün yaptığı işi göstermektedir.

Kirişin şekil değiştirme enerjisi

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dA dx \quad (8)$$

şeklinde olup A kirişin kesit alanıdır. Kirişin kinetik enerjisi ise

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(z) (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dA dx \quad (9)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada ρ malzeme yoğunluğudur. Üst nokta ile zamana göre türev ifade edilmektedir.

Kirişe eksenini doğrultusunda uçlarından etkileyen P_0 basınç kuvveti ile eksen boyunca etkileyen düşey q yayılı yükünün yaptığı iş

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L P_0 (w_{,x}^0)^2 dx + \int_0^L q w^0 dx \quad (10)$$

şeklinde tanımlıdır. (8) ve (9) eşitlikleri kullanılarak şekil değiştirme enerjisi ve kinetik enerji ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ A_0 (u_{,x}^0)^2 - 2A_1 u_{,x}^0 \phi_{,x}^0 + A_2 (\phi_{,x}^0)^2 + B_0 \left((\phi^0)^2 - 2\phi^0 w_{,x}^0 + (w_{,x}^0)^2 \right) \right\} dx \quad (11)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_0 (\dot{u}^0)^2 - 2I_1 \dot{u}^0 \dot{\phi}^0 + I_2 (\dot{\phi}^0)^2 + I_0 (\dot{w}^0)^2 \right\} dx \quad (12)$$

Burada;

$$[A_0, A_1, A_2] = \int_A E(z)[1, z, z^2] dA, \quad B_0 = \int_A KG(z) dA \quad (13)$$

$$[I_0, I_1, I_2] = \int_A \rho(z)[1, z, z^2] dA \quad (14)$$

şeklinde tanımlıdır. Sayısal çözüm için yer değiştirmeler aşağıdaki şekilde kabul edilmiştir (Kahya ve Turan, 2017):

$$u^0(x, t) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) u_i(t), \quad w^0(x, t) = \sum_{i=1}^m \psi_i(x) w_i(t), \quad \phi^0(x, t) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x) \phi_i(t) \quad (15)$$

Burada, $u_i(t)$, $w_i(t)$ ve $\phi_i(t)$ genelleştirilmiş koordinatları, $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ ve $\theta_i(x)$ ise kirişin uç şartlarına bağlı olarak değişen trigonometrik fonksiyonları, m ise trigonometrik seri sayısını göstermektedir. Tablo 1’de, çalışmada göz önüne alınan kirişler için mesnet şartlarını sağlayacak şekilde seçilen bu fonksiyonlar verilmiştir.

İş ve enerji ifadeleri, yukarıda verilen çözüm fonksiyonları da hesaba katılarak Lagrange denkleminde yazılırsa L boyundaki kiriş için hareket denklemi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K}_e - P_0 \mathbf{K}_g) \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (16)$$

olarak elde edilir. Burada \mathbf{M} , \mathbf{K}_e , \mathbf{K}_g ve \mathbf{F} sırasıyla sistem kütle, rijitlik ve geometrik rijitlik matrisleri ile yük vektörü olup

Tablo 1. Analitik çözümde kullanılan trigonometrik fonksiyonlar

Sınır Şartları	$\varphi_i(x)$	$\psi_i(x)$	$\theta_i(x)$
B-B	$\cos \frac{i\pi}{L} x$	$\sin \frac{i\pi}{L} x$	$\cos \frac{i\pi}{L} x$
A-S	$\sin \frac{(2i-1)\pi}{2L} x$	$1 - \cos \frac{(2i-1)\pi}{2L} x$	$\sin \frac{(2i-1)\pi}{2L} x$
A-A	$\sin \frac{2i\pi}{L} x$	$\sin^2 \frac{i\pi}{L} x$	$\sin \frac{2i\pi}{L} x$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{12}^T & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} \\ \mathbf{M}_{13}^T & \mathbf{M}_{23}^T & \mathbf{M}_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T & \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

şeklindedir. Buradaki matrislerin açık ifadeleri Ekler'de basit mesnetli FDM kiriş için verilmiştir. \mathbf{X} yer değiştirme vektörü ise

$$\mathbf{X} = \{u_1 \quad \dots \quad u_m \quad w_1 \quad \dots \quad w_m \quad \phi_1 \quad \dots \quad \phi_m\}^T \quad (18)$$

şeklinde tanımlıdır. Serbest titreşim analizi için (16) denkleminde $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ve $P_0 = 0$ olarak alınır ve çözüm $\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{i\omega t}$ şeklinde düşünülürse

$$(\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (19)$$

denklemini elde edilir. Burada ω kirişin doğal frekansıdır. (19) denklem sistemi bir öz değer problemini vermektedir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrislerini sıfır yapan ω değerleri kirişin doğal frekanslarıdır.

3. Bulgular ve Tartışma

Bu bölümde, FDM kirişlerin serbest titreşimi birinci mertebe kayma deformasyonu teorisine dayalı Navier tipi çözüm yöntemi ile incelenmiş ve sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Burada farklı mesnetlenme durumları, farklı kiriş uzunluğu ve hacimsel oran fonksiyonunun farklı k değerlerine göre analitik çözümün doğruluğu kontrol edilmiştir. Göz önüne alınan kiriş modelleri sırasıyla iki ucu ankastre kiriş (A-A), konsol kiriş (A-S) ve basit kiriş (B-B) şeklindedir.

Bu modelde kullanılan metal ve seramik FDM için malzeme özellikleri sırasıyla:

- $E_m = 70\text{GPa}$, $\rho_m = 2702\text{kg/m}^3$, $\nu_m = 0,3$
- $E_s = 380\text{GPa}$, $\rho_s = 3960\text{kg/m}^3$, $\nu_s = 0,3$

şeklindedir. Sayısal sonuçlar, serbest titreşim için

$$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (20)$$

şeklinde boyutsuz olarak verilmiştir. Tablo 2’de analitik çözümde gerekli terim sayısını belirlemek için yakınsama kontrolü yapılmıştır. 12 terim için analitik sonuçların yeterli doğrulukta olduğu kabul edilmiştir.

Tablo 3 ve 4’de çeşitli sınır şartlarına göre FDM kirişlerin boyutsuz doğal frekansları $L/h = 5$ ve 20 için verilmiştir. Bu tablolarda analitik çözümler literatürde verilen sonuçlarla kıyaslanmıştır. Sonuçların uyumlu olduğu görülmüştür. k ’nin değeri arttıkça boyutsuz doğal frekanslar tüm mesnetlenme durumları için azalmaktadır. Ayrıca en büyük boyutsuz doğal frekans A-A kirişte en küçüğü ise A-S kirişte meydana gelmektedir.

Şekil 2-4’de çeşitli mesnet durumları için FDM kirişlerin boyutsuz doğal frekanslarının L/h ’ye göre değişimleri verilmiştir. Tüm grafikler incelendiğinde L/h ’nin artmasıyla boyutsuz doğal frekansların azaldığı ve $L/h = 20$ gibi bir değerden sonra sabit kaldığı görülmektedir. En büyük doğal frekanslar, $k = 0$ ’da yani kirişin seramik olması durumunda ortaya çıkmaktadır. k arttıkça doğal frekansların azaldığı bu grafiklerden de görülmektedir.

Tablo 2. Farklı sınır şartlarına sahip FDM kirişlerin boyutsuz doğal frekanslarının analitik çözümde kullanılacak terim sayısına göre değişimi ($L/h = 5, k = 1$)

Terim Sayısı (m)	Sınır Şartları		
	B-B	A-A	A-S
2	3,9902	8,0962	1,4697
4	3,9902	7,9992	1,4656
6	3,9902	7,9669	1,4645
8	3,9902	7,9506	1,4641
10	3,9902	7,9407	1,4638
12	3,9902	7,9341	1,4636
14	3,9902	7,9293	1,4635
16	3,9902	7,9257	1,4635

Tablo 3. Çeşitli sınır şartlarına sahip FDM kirişlerin boyutsuz doğal frekansları ($L/h = 5$)

Kiriş	Teori	$k = 0$	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$	$k \rightarrow \infty$
A-A	Analitik	10,04695	8,70984	7,93407	7,21936	6,67601	6,34923	5,22031
	Şimşek (2010a) ⁽¹⁾	10,0705	8,74674	7,95034	7,17674	6,49349	6,16515	5,23254
	Nguyen vd. (2015) ⁽²⁾	10,0726	8,7463	7,9518	7,1776	6,4929	6,1658	-
	Vo vd. (2014) ⁽³⁾	10,0678	8,7457	7,9522	7,1801	6,4961	6,1662	-
B-B	Analitik	5,15248	4,40789	3,99024	3,63439	3,43120	3,31344	2,67718
	Şimşek (2010a)	5,15274	4,41108	3,99042	3,62643	3,40120	3,28160	2,67732
	Nguyen vd. (2015)	5,1528	4,4102	3,9904	3,6264	3,4009	3,2815	-
	Vo vd. (2014)	5,1528	4,4019	3,9716	3,5979	3,3743	3,2653	-
A-S	Analitik	1,89599	1,61814	1,46380	1,33449	1,26527	1,22487	0,98514
	Şimşek (2010a)	1,89523	1,61817	1,46328	1,33254	1,25916	1,21834	0,98474
	Nguyen vd. (2015)	1,8957	1,6182	1,4636	1,3328	1,2594	1,2187	-
	Vo vd. (2014)	1,8952	1,6180	1,4633	1,3326	1,2592	1,2184	-

⁽¹⁾ Parabolik kayma deformasyonu teorisine dayalı analitik çözüm

⁽²⁾ Yüksek mertebe kayma deformasyonu teorisine dayalı analitik çözüm

⁽³⁾ Yüksek mertebe kayma deformasyonu teorisine dayalı sonlu eleman metodu

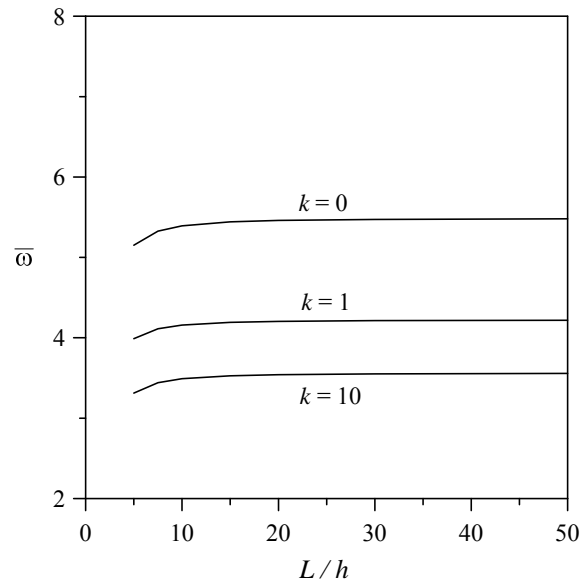
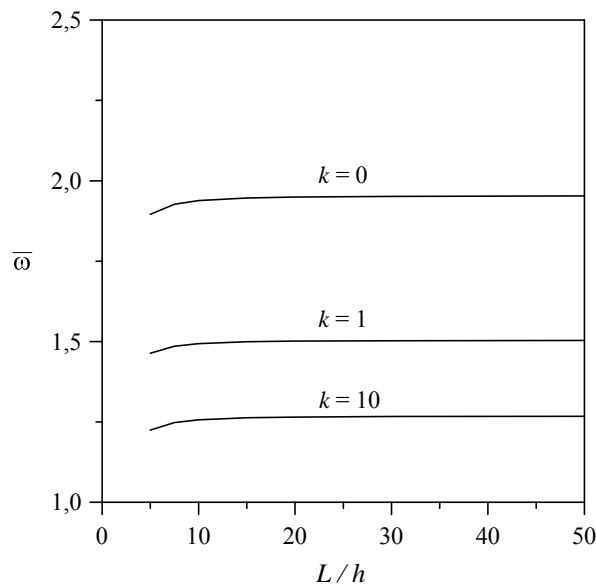
Tablo 4. Çeşitli sınır şartlarına sahip FDM kirişlerin boyutsuz doğal frekansları ($L/h = 20$)

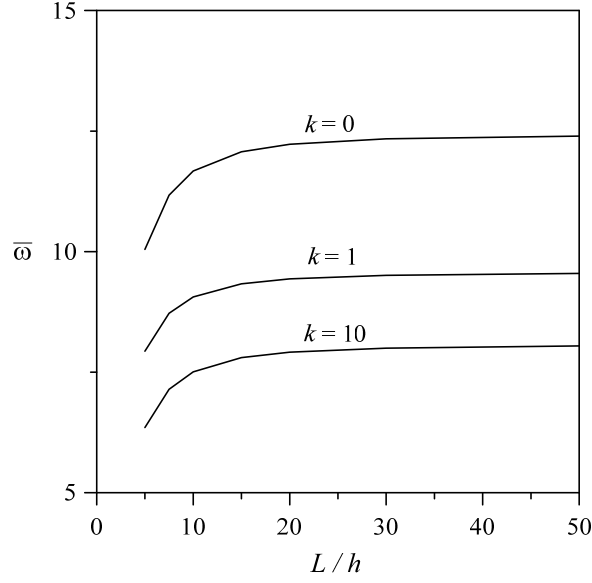
Kiriş	Teori	$k = 0$	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$	$k \rightarrow \infty$
A-A	Analitik	12,2259	10,4273	9,4331	8,6056	8,1715	7,9145	6,7034
	Şimşek (2010a) ⁽¹⁾	12,2238	10,4287	9,4316	8,5975	8,1446	7,8858	-
	Nguyen vd. (2015) ⁽²⁾	12,2243	10,4269	9,4319	8,5977	8,1446	7,8860	-
	Vo vd. (2014) ⁽³⁾	12,2228	10,4279	9,4328	8,5994	8,1460	7,8862	-
B-B	Analitik	5,4603	4,6509	4,2051	3,8368	3,6509	3,5416	2,9964
	Şimşek (2010a)	5,4603	4,6516	4,2050	3,8361	3,6485	3,5390	-
	Nguyen vd. (2015)	5,4603	4,6506	4,2051	3,8361	3,6485	3,5390	-
	Vo vd. (2014)	5,4603	4,6506	4,2039	3,8343	3,6466	3,5379	-
A-S	Analitik	1,9497	1,6604	1,5011	1,3698	1,3039	1,2651	1,0701
	Şimşek (2010a)	1,9495	1,6605	1,5011	1,3696	1,3033	1,2645	-
	Nguyen vd. (2015)	1,9496	1,6602	1,5011	1,3696	1,3034	1,2646	-
	Vo vd. (2014)	1,9496	1,6603	1,5011	1,3696	1,3034	1,2645	-

⁽¹⁾ Parabolik kayma deformasyonu teorisine dayalı analitik çözüm

⁽²⁾ Yüksek mertebe kayma deformasyonu teorisine dayalı analitik çözüm

⁽³⁾ Yüksek mertebe kayma deformasyonu teorisine dayalı sonlu eleman metodu

**Şekil 2.** Basit mesnetli FDM kirişlerin boyutsuz doğal frekanslarının L/h 'ye göre değişimi**Şekil 3.** Konsol FDM kirişlerin boyutsuz doğal frekanslarının L/h 'ye göre değişimi



Şekil 4. İki ucu ankastre FDM kirişlerin boyutsuz doğal frekanslarının L/h 'ye göre değişimi

4. Sonuçlar ve Öneriler

FDM kirişlerin serbest titreşimi birinci mertebeye kayma deformasyonu teorisine dayalı analitik çözüm olan Navier tipi çözüm yöntemi ile incelenmiştir. Burada problemin çözümü için trigonometrik seri fonksiyonlar önerilmiştir. Bu fonksiyonlarla elde edilen doğal frekanslar literatür ile kıyaslanmış ve analitik çözümün oldukça iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Mevcut çözümün bu problem için performansı yeterlidir. Ayrıca bu çözüm metodu ile FDM sandviç kirişlerin serbest titreşimi de incelenebilir.

Ekler

Birinci mertebeye kiriş teorisiyle basit mesnetli FDM kiriş için elde edilen analitik çözümde kütle, rijitlik, geometrik rijitlik matrislerinin ve yayılı yük vektörünün elemanları aşağıda açık olarak yazılmıştır.

a) Kütle matrisinin elemanları:

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{M}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2} I_0 \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad \mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{12}^T = \mathbf{M}_{23} = \mathbf{M}_{23}^T = 0, \quad (\text{E1})$$

$$\mathbf{M}_{13} = \mathbf{M}_{13}^T = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2} I_1 \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad \mathbf{M}_{33} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2} I_2 \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (\text{E2})$$

b) Rijitlik matrisinin elemanları:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1^2 \pi^2}{2L} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m^2 \pi^2}{2L} A_0 \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad \mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{12}^T = 0,$$

$$\mathbf{K}_{13} = \begin{bmatrix} \frac{1^2 \pi^2}{2L} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m^2 \pi^2}{2L} A_1 \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad \mathbf{K}_{23} = \mathbf{K}_{23}^T = \begin{bmatrix} \frac{1\pi}{2} B_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\pi}{2} B_0 \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad (\text{E3})$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1^2 \pi^2}{2L} B_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m^2 \pi^2}{2L} B_0 \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad \mathbf{K}_{33} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} B_0 + \frac{1^2 \pi^2}{2L} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2} B_0 + \frac{m^2 \pi^2}{2L} A_2 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

c) Geometrik rijitlik matrisi elemanları:

$$\mathbf{G}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1^2 \pi^2}{2L} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m^2 \pi^2}{2L} \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (\text{E4})$$

d) Yayılı yük vektörü

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \frac{Lq}{1\pi} - \frac{Lq \cos(1\pi)}{1\pi} \\ \vdots \\ \frac{Lq}{m\pi} - \frac{Lq \cos(m\pi)}{m\pi} \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad (\text{E5})$$

Kaynaklar

- Aydogdu, M. ve Taskin, V., (2007). Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams with Simply Supported Edges, *Materials & Design*, 28,5, 1651-1656.
- Chen, W. R. ve Chang, H., (2017). Closed-Form Solutions for Free Vibration Frequencies of Functionally Graded Euler-Bernoulli Beams, *Mechanics of Composite Materials*, 53,1, 79-98.
- Hadji, L., Khelifa, Z. ve El Abbas, A. B., (2016). A New Higher Order Shear Deformation Model for Functionally Graded Beams, *KSCE Journal of Civil Engineering*, 20,5, 1835-1841.
- Kahya, V. ve Turan, M., (2017). Finite Element Model for Vibration and Buckling of Functionally Graded Beams Based on the First-Order Shear Deformation Theory, *Composites Part B: Engineering*, 109, 108-115.
- Kahya, V. ve Turan, M., (2018). Vibration and Stability Analysis of Functionally Graded Sandwich Beams by a Multi-Layer Finite Element, *Composites Part B: Engineering*, 146, 198-212.
- Lee, J. W. ve Lee, J. Y., 2017. Free Vibration Analysis of Functionally Graded Bernoulli-Euler Beams Using an Exact Transfer Matrix Expression, *International Journal of Mechanical Sciences*, 122, 1-17.
- Li, X. F., (2008). A Unified Approach for Analyzing Static and Dynamic Behaviors of Functionally Graded Timoshenko and Euler-Bernoulli Beams, *Journal of Sound and Vibration*, 318,4-5, 1210-1229.
- Nguyen, T.-K., Vo, T. P. ve Thai, H.-T., (2013). Static and Free Vibration of Axially Loaded Functionally Graded Beams Based on the First-Order Shear Deformation Theory, *Composites Part B: Engineering*, 55, 147-157.
- Nguyen, T.-K., Truong-Phong Nguyen, T., Vo, T. P. ve Thai, H.-T., (2015). Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Sandwich Beams by a New Higher-Order Shear Deformation Theory, *Composites Part B: Engineering*, 76, 273-285.
- Şimşek, M., (2010a). Fundamental Frequency Analysis of Functionally Graded Beams by Using Different Higher-Order Beam Theories, *Nuclear Engineering and Design*, 240,4, 697-705.
- Şimşek, M., (2010b). Vibration Analysis of a Functionally Graded Beam under a Moving Mass by Using Different Beam Theories, *Composite Structures*, 92,4, 904-917.
- Sina, S. A., Navazi, H. M. ve Haddadpour, H., (2009). An Analytical Method for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams, *Materials & Design*, 30,3, 741-747.
- Thai, H.-T. ve Vo, T. P., (2012). Bending and Free Vibration of Functionally Graded Beams Using Various Higher-Order Shear Deformation Beam Theories, *International Journal of Mechanical Sciences*, 62,1, 57-66.
- Vo, T. P., Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Maheri, A. ve Lee, J., (2014). Finite Element Model for Vibration and Buckling of Functionally Graded Sandwich Beams Based on a Refined Shear Deformation Theory, *Engineering Structures*, 64, 12-22.