Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)
Cilt 12, Sayı 2, Aralık 2018, sayfa 199-227. ISSN: 1307-6086

Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education
Vol. 12, Issue 2, December 2018, pp. 199-227. ISSN: 1307-6086

Araştırma Makalesi / Research Article

Investigation on Algebraic Thinking Processes in Geometry Concepts of High School 4th Grade Students*

Ercan ATASOY [1], Demet BARAN BULUT [2]

[1] Recep Tayyip Erdogan University, The Department of Primary Education, ercan.atasoy@erdogan.edu.tr, http://orcid.org/0000-0003-4613-6950

[2] Recep Tayyip Erdogan University, The Department of Mathematics and Science Education, demet.baran@erdogan.edu.tr, http://orcid.org/0000-0003-1085-7342

Received : 20.10.2018 Accepted : 28.11.2018

Doi: 10.17522/balikesirnef.506431

Abstract – The aim of this study is to analyze the thinking processes of fourth-grade high school students by using geometrical concepts regarding the components of algebraic thinking such as symbols and algebraic relations, different forms of representations and pattern generalization. For this reason, one Science class and one Turkish-Mathematics class were chosen. Van Hiele Geometry Test and algebra exam were administered to 38 students from the two classes. A total of 6 students –three students, scoring good, average and low grades from each class were chosen in accordance with the scores obtained from these exams. Interviews including 15 questions were carried out with these students. As a result of the research, it was determined that students often hesitated to solve problems in geometry by algebraic ways. Instead, it is observed that the way to remember the desired state (formula etc.) is used more. In addition, it was found out that students algebraic thinking skills were not sufficient to solve problems and the students' algebraic thinking skills changed according to their success levels or the departments they studied. On the other hand, it has been determined that there is a difference between the success levels of the students in the cases of transformation between impressions. It has been observed that the students with poor level have completed this process with less success than the other level students. This situation is interpreted as low level of algebraic thinking in students with low level of geometry.

Key words: algebraic thinking, geometry, high school students.

Corresponding author: Ercan ATASOY, Recep Tayyip Erdogan University, Faculty of Education, The Department of Primary Education, Rize/TURKEY, E-mail: ercan.atasoy@erdogan.tr

*A part of this research was presented as an oral presentation at the III. Turkey Computer and Mathematics Education Symposium (17-19 May 2017, Afyonkarahisar, Turkey).

Summary

The aim of this study is to analyze the thinking processes of fourth-grade high school students by using geometrical concepts regarding the components of algebraic thinking such as symbols and algebraic relations, different forms of representations and pattern generalization. In line with this purpose, an answer is sought to the question: "Is there any similarity or difference between algebraic thinking processes of the students having different algebraic success and geometrical thinking level?"

The study was a qualitative research, and case study was used as the method. Case study enables the researchers to deal with the topic in depth; examine the relationship of data between each other and express the cause and effect relations (Çepni, 2005). The method was chosen in accordance with the aims of the research.

The findings were scrutinized under these subdimensions: symbols and algebraic relations, representation, the use of patterns and generalizations. In this context, the first finding obtained from the subdimensions of symbols and algebraic relations is that before starting to solve, the students could not detect how they would find the perimeter of the rectangle since AB, BC and CA sides were given with x variable. On the other hand, students who stated that one could find rectangles having different perimeters with regard to the values assigned to *x*, commented that way since they thought that the perimeter of the rectangle could get only one value. In other words, the students did not accept a perimeter formula with *x* since they thought that algebraic expressions could not be the result. Also, it was observed that the students preferred to memorize the formulas in this part instead of processing algebraic operations. In the subdimension of representation, there is a difference between the students' success levels regarding the transition from verbal representation to formal representation. It was found that the students of good and average level completed the transition process more successfully, whereas low-level students failed to do so. As for the use of patterns and generalization, the students chose only the numerical strategy. Namely, the students tried to reach to the generalization only with a numerical operation, and abstained from other ways such as drawing figures and using functions etc. As success levels of the students decreased, quality and quantity of the operations decreased, too. Neither of the low-level students could reach any result nor could they make any interpretation regarding generalization.

Initially, the results obtained from the component of symbols and algebraic relations were presented in this section with regard to the differences between the departments that the

students study. It was observed that students had difficulty in relating algebraically especially in this section of the study. It was revealed that even good level students made mistakes in expressing the perimeter of a geometric figure. It is thought that this result stems from the fact that they did not accept a perimeter formula with x since they think that algebraic expressions cannot be considered as results. A previous study conducted by Dindyal (2004) evaluating students' interpretation of the change in the algebraic expression and geometric figure consistently showed that they struggled to manage it. In this respect, it is obvious that the students' capacity to determine the characteristics of a figure algebraically do not differentiate with regard to their departments or success levels. One of the most crucial components of the transition from arithmetic to algebra is the use of letters and their meanings (Kieran, 1992; MacGregor & Stacey, 1997). According to Kieran (1990) one of the most important reasons why students struggle with the transition from arithmetic to algebra is their inability to relate the different meanings of the letters. In the current study, it was observed that students could not differentiate between the letters that represent the edges of the geometric figure and the letter given as the variable. The result obtained from Akkan's (2009) study show that students could not understand the difference between the concepts of the unknown and the variable, and used them interchangeably. This result matches with those of the present study. In the section which examined the students' algebraic solution capabilities, it was obvious that they generally abstained from algebraic solution. The results obtained from the study conducted by Kaya and Keşan (2014) further support this finding. One result obtained regarding the component of representations is that students struggle with the transition from symbolic representation to verbal representation. Dindyal (2003) and Kardeş (2010) determined that the students' success level regarding the transition of representation was average. As for the use of patterns and generalization, it is observed that the students generally chose the numerical strategy. Students had been successful at the first steps of the generalization, yet unsuccessful when it comes to reaching the term. Researchers stated that the students were more competent to find the near term than the far term. (Stacey, 1989; Orton & Orton, 1999; Feifei Ye, 2005, Akkan, 2009; Akkan & Çakıroğlu, 2012; Akkan, 2013). For the component of pattern generalization, with regard to algebraic thinking process, no difference was observed between success levels or departments at which they were taught.

Lise 4. Sınıf Öğrencilerinin Geometri Konularındaki Cebirsel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi*

Ercan ATASOY [1], Demet BARAN BULUT [2]

[1] Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Temel Eğitim Bölümü, ercan.atasoy@erdogan.edu.tr http://orcid.org/0000-0003-4613-6950

[2] Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, demet.baran@erdogan.edu.tr http://orcid.org/0000-0003-1085-7342

Gönderme Tarihi: 20.10.2018 Kabul Tarihi: 28.11.2018

Doi: 10.17522/balikesirnef.506431

Özet – Bu araştırmanın amacı, geometri kavramları kullanılarak lise 4. sınıfındaki öğrencilerin cebirsel düşünmenin bileşenleri olan; semboller ve cebirsel ilişki, gösterimlerin farklı formları, örüntüleri genelleme ile ilgili düşünme süreçlerini analiz etmektir. Bu amaçla lise 4. sınıftan birer tane Fen ve Türkçe-Matematik sınıfı belirlenmiştir. Bu iki sınıftaki toplam 38 öğrenciye Van Hiele geometri testi ve cebir sınavı uygulanmıştır. Bu sınavlardan alınan puanlar doğrultusunda her sınıftan her iki testte de yüksek, orta ve düşük not alan birer öğrenci olmak üzere toplam 6 öğrenci seçilmiş ve bu öğrenciler ile 15 sorudan oluşan klinik mülakatlar yapılmıştır. Araştırma sonucunda, öğrencilerin geometri problemlerinde genellikle cebirsel olarak çözüm yapmaktan çekindikleri belirlenmiştir. Bunun yerine istenen durumu (formül vb.) hatırlama yolunun daha çok kullanıldığı gözlemlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin problem çözümlerinde yeterli düzeyde olmadığı ortaya çıkmıştır ve öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri başarı seviyeleri ya da okudukları bölüme göre değişim göstermiştir. Diğer yandan gösterimler arası dönüşüm durumlarında öğrencilerin başarı düzeyleri arasında bir farklılığın ortaya çıktığı belirlenmiştir. Zayıf düzeydeki öğrencilerin diğer seviyedeki öğrencilere oranla bu süreci daha az başarı ile tamamladığı görülmüştür. Bu durum geometri düşünme düzeyi düşük olan öğrencilerde cebirsel düşünme düzeylerinin de düşük olduğu şeklinde yorumlanmıştır.

Anahtar kelimeler: cebirsel düşünme, geometri, ortaöğretim öğrencileri

----

Sorumlu yazar: Ercan ATASOY, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Temel Eğitim Bölümü, Rize/TÜRKİYE, E-mail: Ercan.atasoy@erdogan.edu.tr

*Bu araştırmanın bir bölümü III. Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu’nda sözlü bildiri olarak sunulmuştur (17-19 Mayıs 2017, Afyonkarahisar, Türkiye).

Giriş

Matematiksel düşünme, matematiğin aritmetik, cebir, geometri, olasılık gibi farklı alanlarında kullanılan matematiksel aktivitelerin doğasına bağlı olarak farklı biçimler almaktadır (Dindyal, 2003). Matematiksel düşünmenin özel bir formu olan cebirsel düşünme, matematiğin önemli öğrenme alanı olan cebir ile ilişkili ve bu alandaki bilgi ve becerilerin artmasında etkili olmasına rağmen, cebir kavramından farklı ve daha geniş bir anlama sahiptir. Cebirsel düşünme sadece cebirsel ifadeleri sadeleştirmek, eşitlikleri çözmek, sembolleri kullanmak için kurallar öğrenmenin ötesinde bir anlam ifade etmektedir. Cebirsel düşünme ile ilgili alan yazında birçok tanım yer almaktadır. Driscoll (1999) cebirsel düşünmeyi, nicel durumları betimleyerek değişkenler arasındaki ilişkiyi açık hale getirebilme yeteneği olarak açıklamıştır. Van de Walle, Karp ve Bay-Williams (2011) ise cebirsel düşünmeyi sayı ve hesaplamaya dair deneyimlerden genellemeler meydana getirme, bu fikirleri anlamlı bir sembol sistemini kullanarak biçimlendirme, örüntü ve fonksiyon kavramlarını keşfetmeyi içerme olarak tanımlamıştır. Amerika'daki ulusal matematik öğretmenleri konseyi (NCTM, 2000) yine diğer tanımlar ile benzer olarak cebirsel düşünmeyi, fonksiyonları anlama, cebirsel sembolleri kullanarak matematiksel yapı ve durumları farklı şekillerde temsil ve analiz etme, nicel ilişkileri temsil etmek ve anlamak için matematiksel modeller kullanma, günlük yaşamda karşılaşılan farklı durumlardaki değişimleri analiz etmeyi gerektirme olarak ifade etmiştir. Ayrıca Swafford ve Langrall (2000) cebirsel düşünmeyi bilinen niceliklerle yapılan işlemleri içeren aritmetik düşünmenin tersine, bilinmeyen bir nicelik üzerinde sanki nicelik biliniyormuş gibi işlem yapabilme yeteneği olarak belirtmiştir.

Cebirsel düşünmede, ilişkiler ve özellikleri keşfetme önemli bir yere sahiptir. Örneğin bir öğrencinin dört işlem ile ilgili deneyim kazandıktan sonra toplanan veya çarpılan iki sayının sırasının değiştiğinde sonucun değişmediğini gözlemesi, bu ilişkiyi toplama için a+b=b+a veya çarpma için a.b=b.a şeklinde ifade etmek gibi işlemlerin özellikleri ile ilgili örüntüleri, ilişkileri fark etmesi cebirsel düşünmeyi gerektirir. Ayrıca öğrencilerin bu ilişkileri ifade ederken harfleri, sembolleri nasıl kullanmaları gerektiğini bilmeleri de cebirsel düşünmenin bir parçasıdır. Bir harf veya sembol, etiket (5 kilometre için 5 km veya nokta için büyük harf kullanma), bir kelimenin kısaltması (kümenin elemanı olarak kalemi k ile gösterme), değişken veya herhangi bir sayıyı temsil eden, bilinmeyen anlamına sahiptir (Kieran, 1990; Van Amerom, 2003). Öğrencinin harfli sembollerle ilgili farklı anlamları bilmesi karmaşık matematiksel ifadelerdeki örüntüleri tespit etmesine, cebirsel yapıları açığa çıkarmasına katkı sağlar (Driscoll, 1999).

Cebrisel düşünmenin öğrencilerin günlük yaşamda karşılaştıkları güçlüklerin üzerine düşünmeye, yorum yapmaya ve çözümler aramaya yönelik zihinsel faaliyetleri de içerdiği belirtilmektedir (NCTM, 200). Ancak Kaya ve Keşan (2014) cebir ile ilgili yapılan araştırmaların genelinde; öğrencilerin cebirsel düşünme ve muhakeme etme becerisi ile cebirsel işlem yürütme becerilerinin yetersiz olduğunu, matematiksel bilgileri ilişkilendirmede zorlandıklarını ve günlük yaşam durumları arasında bağlantı kuramadıklarını belirtmişlerdir.

Cebirsel düşünmede diğer önemli bir bileşen genellemelerdir. Genelleme yapmada örüntüler önemli rol oynarlar. Örüntüler, terimler arası ilişkinin sabit bir dizilimin ötelenmesi veya dizilimin belli bir kurala göre genişleyip, daralan bir seyir izleyerek ilerlemesi şeklinde olabilir. Her iki durumda da örüntüdeki ilişkileri gözlemleyip bir genellemeye varma ve bunu sembolik olarak ifade etme becerisi cebirsel düşünme ile gerçekleşir (Herbert & Brown, 1997).

Bu bağlamda cebirsel düşünmenin birçok matematiksel beceriyi içerisinde barındırdığı ifade edilebilir. Ancak bu becerilerden semboller ve cebirsel ilişkileri kullanma, gösterimlerin farklı formlarını kullanma, örüntüleri genelleme olmak üzere üç temel bileşeninin ön plana çıktığı belirtilebilir (Çelik, 2007; Kaf, 2007; Kaput, 2008; Radford, 2014). Araştırmanın teorik çerçevesi de bu üç bileşen üzerine kurgulanmıştır.

Cebirsel düşünme yalnızca cebir çalışmaları ile sınırlı değildir. Her sınıf düzeyinde geometri ile cebir arasında bir ilişki vardır. Örneğin geometrik şekillerin alan, çevre formüllerinin belirtilmesinde, noktaların, kenarların, köşelerin ve açıların adlandırılmasında cebirsel sembol ve ifadeler kullanılır. Çokgenlerin iç açılarının toplamının hesaplanmasında olduğu gibi bazı geometrik konuların öğretilmesinde cebirsel ilişki ve genellemelerden yararlanılır. Açı ve uzunluk ölçüsü hesaplanırken değişkenlerden faydalanılır. Geometrik yer problemlerinde değişken nokta düşüncesinin temelinde "değişken" kavramı vardır.

Geometri ile cebir ilişkisi daha geniş anlamda düşünülürse, cebirsel denklemler geometrik olarak ifade edilebilir. Örneğin sıralı ikililer (x,y) bir noktaya karşılık gelirken, $ax+by+c=0$ $(a,b,c\in R)$ cebirsel denklemi geometride bir doğru belirtir. Bu doğruların kesişmesinin cebirde bir karşılığı vardır. Pisagor teoremi gibi geometrik sonuçlar $a^2+b^2=c^2$ şeklinde cebirsel olarak temsil edilebilir. Buradan cebirsel sonuçların geometrik olarak elde edilebildiği ve geometrik sonuçların cebir kullanılarak gösterilebileceği ifade edilebilir. Dolayısıyla matematiğin bu iki alanı ile ilgili çalışmaların yapılması, geometri öğretimine olumlu katkı sağlayacağı ve öğrencilerin geometri problemlerini çözme süreçlerinin doğasını anlamamıza yardım edeceği düşünülmektedir.

Alan yazın incelendiğinde cebirsel düşünme ile ilgili çalışmaların büyük bir çoğunluğunun ortaokul düzeyinde yapıldığı (Bağdat, 2013; Çağdaşer, 2008; Joffrion, 2005; ve gelişimsel (Gülpek, 2006; Öner-Sünkür, İlhan & Kılıç, 2012; Steele, 2005), betimsel çalışmalar (Kaya, Keşan, İzgiol, & Erkuş, 2016) mevcut olmasına rağmen deneysel çalışmaların (Palabıyık, 2010; Pilten, 2008; Yaprak-Ceyhan, 2012; Yenilmez & Teke, 2008) ağırlıkta olduğu belirtilebilir. Ayrıca bu çalışmalarda öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri testler kullanılarak belirlenmeye çalışılmıştır. Bu araştırmalarda öğrencilerin bulunduğu sınıftaki cebirsel düşünme düzeyleri veya farklı sınıf seviyelerinde öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri karşılaştırılmıştır. Akademik başarısı veya cebir başarısı yüksek olan öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin de yüksek olduğu tespit edilmiştir (Bağdat, 2013; Yaprak-Ceyhan, 2012; Yenilmez & Teke, 2008).

Cebirsel düşünme ile ilgili birçok araştırma yapılmasına rağmen, cebir ile geometri arasındaki ilişkiyi öne çıkaran araştırmaların sayısı oldukça azdır (Dindyal, 2004; Oral, İlhan & Kınay, 2013). Ayrıca yapılan araştırmalarda cebir konularının öğrenilmesinde halen daha birçok zorluğun olduğu belirtilmektedir (Dede & Argün, 2003; Kaya & Keşan, 2014). Dolayısıyla bu durum ile doğrudan ilişkisi olan cebirsel düşünme üzerine yapılacak araştırmaların güncelliğini koruduğu ifade edilebilir. Oral, İlhan ve Kınay (2103) yaptıkları çalışmalarında 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ve cebirsel düşünme düzeyleri arasındaki ilişkinin incelenmesi amaçlanmışlardır. İlişkisel tarama modelinin kullanıldığı araştırmada, öğrencilerin geometrik ve cebirsel düşünme düzeylerinin cinsiyetlerine göre farklılaşmadığı, öğrencilerin geometrik ve cebirsel düşünme düzeyleri arasında pozitif yönde, orta düzeyde ve anlamlı bir ilişki olduğunu belirlemişlerdir. Ayrıca araştırmacılar geometrik ve cebirsel düşünme düzeylerini incelemeye yönelik farklı kademelerde öğrenim gören öğrenciler ile çalışmaların yapılmasının önemini vurgulamışlardır.

Çalışmanın diğer boyutu olan geometrik kavramlar ile ilgili öğrenme ve öğretme süreçlerini zenginleştirme çabaları 20. yüzyılın başlarından günümüze devam etmektedir. Yapılan araştırmaların bir kısmında bireylerdeki geometrik düşüncenin nasıl geliştiği ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu bağlamda geometri eğitiminde en bilinen teori Van Hiele çiftinin geometrik düşünme teorisidir. Bu teori, 1957 yılında, iki matematik eğitimcisi olan Pierre M. VanHiele ve Dina VanHiele-Gelfod çifti tarafından Utrecht üniversitesindeki doktora çalışmaları sırasında geliştirilmiştir (Crowley, 1987). Bu teori ilerleyen yıllarda farklı ülkelerde geometri öğretim programlarının hazırlanırken dikkate alınmaya başlanmıştır. Bu teoriye göre bireydeki geometrik düşünme düzeyleri beş aşamadan oluşur ve hiyerarşik şekilde gelişim gösterir. Her düzey geometrik kavramlardan hangilerini ve ne kadarının kazanıldığını değil, insanların geometrideki kavramlar üzerinde nasıl düşündüklerini ve bu düşünce tiplerini belirtir. Bir kişinin herhangi bir düzeye atanabilmesi için önceki bütün düzeylerin başarıyla geçilmiş olması gereklidir (Usiskin, 1982). Bu çalışmada öğrenciler Van

Hiele geometri düşünme düzeylerine göre ayrılmıştır. Bu seviyelere göre ayrılan öğrenciler ile çalışmanın yapılması ve cebirsel düşünme ile ilgili oluşturulan açık uçlu soruların sadece geometri kavramlarından oluşması bu araştırmanın özgünlüğüne katkı sağlamaktadır.

Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, geometri kavramları kullanılarak lise 4. sınıfındaki öğrencilerin cebirsel düşünmenin bileşenleri olan; semboller ve cebirsel ilişki, gösterimlerin farklı formları, örüntüleri genelleme ile ilgili düşünme süreçlerini analiz etmektir. Bu amaç doğrultusunda "Farklı cebirsel başarı ve geometri düşünme düzeylerine sahip öğrencilerin cebirsel düşünme süreçleri arasında benzerlik veya farklılık var mıdır?" sorusuna cevap aranacaktır.

Yöntem

Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden olgubilim tercih edilmiştir. Bu yöntemde bireylerin bir olguya ilişkin yaşantılarını, algılarını ve yükledikleri anlamları ortaya çıkarma amaçlanır ve verilen olgunun altında yatan ortak anlamları keşfetmek için katılımcılar tarafından deneyimlenen dünya tanımlanır. Ayrıca olgubilim yöntemi nitel araştırmaların doğası gereği, araştırılan konunun derinlemesine incelenmesine imkân sağlamakta, verilerin birbirleriyle olan ilişkilerini inceleyip sebep sonuç ilişkilerini açıklayabilme fırsatı vermektedir (Yıldırım & Şimşek, 2006).

Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu lise 4. sınıftaki bir Fen (F) ve bir Türkçe-Matematik (TM) sınıfı oluşturmaktadır. Sosyal sınıflarında cebir ile ilgili derslerinin az sayıda, geometri ile ilgili derslerinin bazı dönemlerde olmaması nedeniyle, bu sınıflarda öğrenim gören öğrencilerin cebir ve geometri alt yapılarının yetersiz olacağı düşünüldüğünden tercih edilmemiştir. F ve TM sınıftaki toplam 38 (F-20, TM-18) öğrenciye Van Hiele geometri testi (VHGT) ve cebir sınavı (CS) uygulanmıştır. VHGT ve CS veri toplama araçları kısmında ayrıntılı olarak tanıtılacaktır. Bu sınavlardan alınan puanlar doğrultusunda her sınıftan CS'den yüksek not alan ve VHGT'den yüksek seviyede birer öğrenci, CS'den düşük not alan ve Van Hiele testinden düşük seviyede birer öğrenci, VHGT'den orta seviyede ve CS'den sınıf ortalamasına yakın birer öğrenci olmak üzere toplam 6 öğrenci seçilmiştir. Öğrenciler okudukları bölüm ve başarı seviyelerine göre Fen-İyi (F-İ), Fen-Orta (F-O), Fen-Zayıf (F-Z) ve Türkçe-Matematik-İyi (TM-İ), Türkçe-Matematik-Orta (TM-O), Türkçe-Matematik-Düşük

(TM-Z) olarak gruplandırılmıştır. Tablo 1'de seçilen öğrencilere ait VHGT ve cebir sınavı sonuçları sunulmuştur.

Tablo 1 Öğrencilere ait VHGT ve Cebir Sınavı Sonuçları

	12. Fen Sınıfı				12. Türkçe-Matematik Sınıfı			
	F-İ	*F-O*	*F-Z*	*Sınıf Ort.*	*TM-İ*	*TM-O*	*TM-Z*	*Sınıf Ort.*
VHGT	3	2	1		3	2	1	
CS	90	84	75	77,85	87	66	51	69,9

Tablo 1'e göre öğrencilerin VGHT düzeyleri 1 ile 3 arasındadır. CS puanları ise F sınıfında 75 ile 90 arasında, TM sınıfında 51-87 arasındadır. CS ve VHGT sadece öğrenci seçimi için kullanılmıştır. VGHT testinde en fazla 5. düzeyde olunabilmekte, CS testinden ise en fazla 100 puan alınabilmektedir. VHGT ve CS araştırmacılar tarafından birlikte değerlendirilmiştir. VHGT'de öğrenciler verdikleri cevaplara göre seviyelere atanmışlardır. Her iki sınıfta 4. düzeyde öğrenci bulunmamakta olup, 5. düzeyde ise bir öğrenci tespit edilmiştir. Bu öğrencinin cebir testi puanı (71) ortalamanın (77,85) altında olduğu için klinik mülakata dahil edilmemiştir. Puanlama sonucunda sınıf ortalamaları 77,85 (F sınıfı) ve 69,9 (TM sınıfı) olarak belirlenmiştir. Bu verilere göre yukarıda belirtilen puanlara sahip 6 öğrenci seçilmiştir.

Veri Toplama Araçları

Araştırmaya katılan öğrencilerin seçimi için kullanılan VHGT ve CS birer ders (40 dakika) süresince uygulanmıştır. Bu testlerden alınan puanlara göre seçilen öğrenciler ile klinik mülakatlar yapılmıştır. Bu mülakatların her biri ortalama 60 dakika sürmüş ve üç günde bitirilmiştir. Bu bölümde öncelikle kullanılan testler tanıtılacak ardından klinik mülakatta kullanılan açık uçlu sorular ile ilgili bilgi verilecektir.

VHGT, 5 hiyerarşik düzeyden oluşmakta ve bir düzeyde olabilmek için önceki düzeylerden geçilmesi gerekmektedir. Türkçeye uyarlanması, geçerliği ve güvenirliği Duatepe (2000) tarafından yapılan testin tamamı için Cronbach Alpha değeri ise .75 olarak hesaplanmıştır. Bu testte, her bir düşünme düzeyine ait 5 soru olmak üzere toplam 25 çoktan seçmeli soru bulunmaktadır. İlk 5 soru 1. düzeye ait iken sırasıyla gelen diğer 5'er tane sorular da 2.düzeye, 3. düzeye, 4. düzeye ve 5. düzeye aittir. Bir düzeyden diğerine geçebilmek için önceki düzeydeki 5 tane sorudan en az 3 tanesi doğru yanıtlanmış olması gerekmektedir.

CS, geometri kavramlarını içermeyen, cebirsel düşünmenin bileşenlerini içeren (gösterim, değişken kullanma, denklem yazımını ve çözümü, sayı örüntülerinin genellemesi, vb.), temel düzeyde (ortaokul seviyesi) cebirsel beceri gerektiren 10 tane acık uçlu sorudan oluşmaktadır. Bu sorular üç alan uzmanının görüşü alınarak oluşturulmuştur. Cebir testinden örnek olarak üç soru sunulmuştur;

1. 2-3x=5+2x denklemini çözünüz.
2. Yanda kare sayılar örüntüsü verilmiştir. 1, 4, 9, 16, 25, 36, …
   a. Örüntüyü oluşturan 15. terimi bulunuz.
   b. Örüntünün kuralını bularak, n. terim için harfli ifade yazınız.
3. Yandaki tabloya göre x ile y arasındaki ilişkiyi veren en uygun denklemi yazınız.

x	1	2	3	4	5
y	4	5	6	7	8

Araştırmanın temel verilerinin toplandığı mülakat soruları literatürden yararlanarak lise matematik programı esas alınarak hazırlanmış, dört alan uzmanı matematik eğitimcisinin görüşleri doğrultusunda düzenlenmiştir. Mülakatta yer alan toplam 15 açık uçlu soru, geometri konuları ile ilgili değişken kullanmayı, denklem yazımını ve çözümünü, sembol kullanmayı ve genellemeler yapmayı gerektiren sorulardan oluşturulmuştur. Bunlar semboller ve cebirsel ilişki, gösterim, örüntülerin kullanımı ve genelleme olmak üzere üç alt başlık altında gruplandırılmıştır. Her başlık altında 5 soru yer almaktadır. Mülakatlar her öğrenci ile yaklaşık 60 dakika sürmüştür. Bu sorular bulgular bölümünde ayrıntılı yer aldığı için burada yer verilmemiştir. Semboller ve cebirsel ilişki alt başlığında yer alan açık uçlu sorular geometri konuları içerisinde değişken kavramı (bilinmeyen değerler veya değişen nicelik) ve değişkenin alabileceği değerleri keşfetme, denklem kurma ve çözme ile ilgilidir. Gösterim kullanma alt başlığındaki açık uçlu sorular geometri konularında gösterim yapabilme (geometri dilini kullanabilme), yazılı iletişim kurabilme ile ilgilidir. Örüntülerin kullanımı ve genelleme alt başlığında yer alan açık uçlu sorular öğrencilerin özel durumlardan yola çıkarak genelleme yapabilme (tümevarımsal akıl yürütme) yeteneklerini tespit etme ile ilgilidir.

Veri Analizi

Öğrencilerin seçiminde kullanılan VHGT ve CS araştırmacılar tarafından birlikte değerlendirilmiştir. VHGT'de öğrenciler yukarıda belirtildiği gibi 1 ile 5 arası seviye düzeylerine atanmışlardır. CS ise her soru 10 puan olmak üzere toplamda 100 puan üzerinden iki araştırmacı tarafından hazırlanan cevap anahtarına göre değerlendirilmiştir. Cevap anahtarında puanlamalar ayrıntılı olarak belirtilmiştir. Öğrencilerin cevaplarını iki araştırmacı birlikte puanlamıştır. Araştırmacılar arasında farklı puanlamanın oluştuğu durumlarda araştırmacılar tartışarak ortak bir karara varmışlardır. Puanlama sonucunda sınıf ortalamaları

77,85 (F sınıfı) ve 69,9 (TM sınıfı) olarak belirlenmiştir. Bu verilere göre klinik mülakat için 6 öğrenci seçilmiştir.

Araştırmanın temel verilerini oluşturan klinik mülakatta elde edilen verilere, betimsel analiz yapılmıştır. Betimsel analizde elde edilen veriler önceden belirlenen temalar altında okuyucunun anlayacağı formda gerekli yerlerde tablo, frekans vs. yararlanarak düzenlenir. Ayrıca görüşülen kişilerin düşüncelerinden önemli olanlara sık sık doğrudan alıntı yapılarak yer verilir (Yıldırım & Şimşek, 2005). Bu bağlamda alan yazında bulunan semboller ve cebirsel ilişki, gösterim kullanma, örüntülerin kullanımı ve genelleme kategorileri kullanılarak veri analizi yapılmıştır.

Bulgular ve Yorumlar

Bu bölümde çalışma kapsamında elde edilen bulgular; semboller ve cebirsel ilişkileri kullanma, gösterim kullanma, örüntülerin kullanımı ve genelleme alt başlıkları altında sunulacaktır.

Semboller ve Cebirsel İlişkileri Kullanma Alt Boyutuna Ait Bulgular

Bu bölümde öğrencilerin CS ve VHGT sonucunda belirlenen düzeyleri (İ-O-Z) için semboller ve cebirsel ilişkileri kullanma alt boyutunda cebirsel düşünme düzeylerinde ortaya çıkan farklılıklara yönelik bulgular sunulmuştur. Veri toplama aracında ilgili bölümdeki her bir problem üzerinden bulguların verilmesi tercih edilerek öğrencilerin mevcut durumlarının daha ayrıntılı şekilde incelenmesine imkan tanınmıştır.

Bu bölümdeki 1. Problem: "Bir ABCD dikdörtgeninin kenar uzunlukları IABI=3x+1, IBCI=2x-3 dir. Buna göre dikdörtgenin çevresini bulunuz. x arttığında çevre uzunluğu ne olur? Bu problemde kullanılan x harfinin A harfinden farkı var mıdır?" şeklindedir. Bu problemdeki ilk soruda, öğrencilerin verilen cebirsel ifadelerin hangisinin dikdörtgenin uzun ya da kısa kenarına denk gelebileceğini belirleme durumları ölçülmek istenmiştir. İkinci ifade öğrencilerin x in değerinin artması ile çevre uzunluğu arasındaki ilişkiyi belirleme durumlarını tespit etmektir. Üçüncü ifadenin amacı ise öğrencilerin soruda verilen A harfi ile x harfinin farkı ile ilgili bilgilerini belirlemektir. Bu doğrultuda farklı bölümlerde okuyan ve farklı başarı seviyelerinde bulunan öğrenciler arasındaki farklılaşma incelenmiştir.

Tüm öğrenciler, verilen problemdeki dikdörtgeni kağıt üzerinde çizmiştir. Öğrencilerin çizdikleri şekillerde uzun kenara 3x+1 cebirsel ifadesini yazmayı tercih ettikleri gözlemlenmiştir. Yani iki cebirsel ifadeden büyük olanını belirleme sürecinde başarı düzeyleri (Z-O-Y) veya okunan bölüm (F-TM) arasında bir farklılaşma tespit edilememiştir. Fakat öğrencilere tercihlerinin altında yatan sebepler sorulduğunda O ve Z düzeydeki öğrencilerin geçerli nedenler ortaya koyamadıkları hatta x e verilen değere göre "2x-3" ifadesinin azalacağı yönünde yanılgıya düştükleri belirlenmiştir. Bu duruma örnek olarak F-Z kodlu öğrenci ile yürütülen diyalog aşağıda verilmiştir.

A: Neden şekildeki uzun kenara 3x+1 yazdın?

*F-Z: Çünkü x'e değerler verdiğimizde 3x+1 artıyor, 2x-3 de daha da kısalıyor. Çevresi bütün kenarların toplamı olduğu için ve iki karşılıklı kenarlar da birbirlerine eşit olduğu için Ç=2(2x-3+3x+*1)=2(5x-2)=10x-4 olur.

Yukarıda geçen diyalogdan da görüldüğü üzere cebirsel başarısı ve geometrik düşünme düzeyi orta ve düşük olan öğrencilerin "-" işaretinden kaynaklanan bir yanılgı ile x e verilen farklı değerler için cebirsel ifadedeki değişimi yanlış yorumladıkları görülmektedir. Bu durum iyi düzeydeki öğrencilerin diğer öğrencilere göre bu bağlamda daha doğru bir cebirsel düşünme süreci geçirdiklerinin göstergesidir. Diğer yandan x in artması sonucunda dikdörtgenin çevresinin ne olacağına yönelik sorulan soru ile ilgili olarak 5 öğrenci çevrenin artacağına yönelik görüş bildirmektedir. Bunun nedenini ise 10x-4 olan çevre uzunluğunda x in katsayısının pozitif bir sayı olması olarak belirtmektedirler. F-Z kodlu öğrenci x arttıkça çevrenin azalacağı yönünde görüş bildirmektedir. Öğrencinin vermiş olduğu cevabın altında yatan sebebin yine dikdörtgenin çevre uzunluğu olan 10x-4 cebirsel ifadesindeki "-" işaretinden kaynaklandığı tespit edilmiştir. Burada x değişkenine verilen farklı değerlerde geometrik şeklin cebirsel olarak ifade edilen çevresindeki değişimi belirlemede öğrenciler arasında net bir farklılaşmanın olduğunu söylemek mümkün değildir.

Problemdeki diğer soruda ise kullanılan A harfinin dikdörtgenin herhangi bir köşesini (etiket anlamında), x harfinin ise bir değişkeni belirttiğini doğru olarak ifade eden F-İ, F-O, TM-İ ve TM-O kodlu öğrencilerdir. F-Z ve TM-Z kodlu öğrenciler, A köşesinin ve x değişkeninin arasındaki farkı tespit edememektedir. Bu cevabı verirken öğrenciler A ve x ifadelerinin her ikisinin sadece bir harf belirttiğini ifade etmişlerdir. Bu durum zayıf başarı düzeyindeki öğrenciler ile diğer düzeylerdeki öğrenciler arasında cebirsel ifadedeki değişken ile geometrik şeklin herhangi bir köşesini ifade eden harf arasındaki farkı ayırt etme bağlamında farklılaşmanın ortaya çıktığını göstermektedir.

Bu bölümde dikkat çeken bir durum da cebirsel ifade ve denklem kavramları arasındaki farkın tespit edilememesidir. F-İ ile bu problemin çözümü için geçen diyalog aşağıda sunulmaktadır.

F-İ: Şimdi dikdörtgenin çevresini neye göre bulacağız ki?

A: Verilen dikdörtgenin çevresini kenarlara göre bulacağız yani x cinsinden bulmuş olacağız.

F-İ: İkisi de tek bilinmeyen (kenar uzunluklarını göstererek), x e ne değer verirsek her zaman farklı çevre uzunluğuna sahip dikdörtgenler bulabiliriz.

A: Çevresini sizden cebirsel ifade olarak yazmanızı istiyor.

F-İ: Anladım, çevresinin denklemini yazmamı istiyor. İkisinin de kenarlarının denklemi var zaten (burada kenar uzunluklarını göstermiştir), bunları toplayıp ikiyle çarpsak çevreyi buluruz.

Bu öğrenci cebirsel ifadelerin sonuç olamayacağını düşünmesinden dolayı x li bir çevre formülünü kabul etmemiştir. Halbuki problemde istenen dikdörtgenin çevresinin cebirsel ifade olarak bulunmasıdır. Burada F-İ kodlu öğrenci, alışılmışın dışında bir geometrik şeklin çevresini sadece sayı yerine bir değişken içeren cebirsel ifade ile temsil etme durumunda yetersiz kalmıştır. Buradan görüleceği üzere iyi düzeye sahip olan öğrenciler de diğer düzeylerde bulanan öğrenciler gibi semboller ve cebirsel ilişkileri kullanmada yetersiz kalmıştır. Bir sonraki adımda öğrencinin kullanmış olduğu *"Anladım, çevresinin denklemini yazmamı istiyor."* şeklindeki ifade öğrencinin cebirsel ifade ile denklem kavramı arasındaki ayrıma varamamış olduğunu göstermektedir. Bu durum öğrencilerin denklem/cebirsel ilişki gibi kavramlarda ezberden öteye geçemediklerinin bir göstergesi olarak kabul edilebilir. Hâlbuki cebirsel ifadeler ve bu çerçevede kullanılan notasyonlar kullanım amaçlarına bağlı olarak farklı ortamlarda farklı manalar ifade ederler.

Öğrencilere yöneltilen 2. Problem: *"Bir n kenarlı düzgün dışbükey çokgenin bir iç açısı* $(180.(n\text{-}2))/n$ *dir. Bu formülü kullanarak her biri düzgün çokgen olan üçgen, dörtgen, beşgen ve altıgenin bir iç açısını bulunuz. Bir dışbükey düzgün çokgenin sahip olabileceği en küçük iç açısı kaç derecedir?"* dir. Bu problemdeki amaç; öğrencilerin verilen cebirsel bağlantıyı kullanıp kullanamadıklarını, cebirsel bağıntıda bulunan "n" değerinin yerine verilen çokgenlerin temsil ettiği kenar sayılarını doğru yazıp yazamadıklarını, bir dışbükey düzgün çokgenin sahip olabileceği en küçük iç açısını bulurken doğru mantık yürütüp yürütemedikleri tespit etmektir. Bu amaç doğrultusunda farklı bölümlerde okuyan ve farklı başarı seviyelerinde bulunan öğrenciler arasındaki farklılaşma incelenmiştir. Aşağıda verilen Tablo 2 ikinci problemin çözümünde farklı başarı düzeyindeki öğrencilerin cevaplarında görülme durumunu göstermektedir.

Tablo 2 İkinci Problemin Çözümüne Ait Öğrencilerin Cevapları

	Öğrenci Başarı Düzeyleri					
	F-İ	*F-O*	*F-Z*	*TM-İ*	*TM-O*	*TM-Z*
Cebirsel bağlantıyı kullanma	+	-	+	+	+	+
Cebirsel bağıntıda kenar sayılarını doğru yazma	+	-	+	+	+	+
En küçük iç açıya sahip dışbükey dörtgeni bulma	+	-	+	+	+	+

Tablo 2 incelendiğinde F-O kodlu öğrenci haricinde diğer başarı düzeyindeki öğrencilerin bütün durumlarda başarı gösterdikleri görülmektedir. Bu durumun başarı düzeyleriyle ilişkili olmadığı, F-O kodlu öğrencinin bilgi eksikliklerinden bu soruyu yanlış cevapladığı düşünülmektedir.

Öğrencilere yöneltilen 3. Problem: "Bütünleri tümlerinin 3 katı olan açıyı bulunuz." dur. Bu problemdeki amaç, öğrencilerin değişkenleri kullanma yeterliklerini belirlemek ve değişken kullanmada ve sorunun genelinde yaşadıkları zorlukları tespit etmektir. Bu amaç doğrultusunda farklı bölümlerde okuyan ve farklı başarı seviyelerinde bulunan öğrenciler arasındaki farklılaşma incelemiştir. Bu problem için öğrencilerin yapmış oldukları çözümler incelendiğinde bütün öğrencilerin değişken kullanarak çözümü yaptığı görülmektedir. Öğrencilerden beşi (F-İ, F-O, F-Z, TM-İ, TM-Z), çözümlerinde tek değişken kullanarak verilen açıyı x ile ifade ederek bu açının bütünlerini 180-x ve tümlerini 90-x olarak belirlemiş ve çözümü doğru olarak tamamlamaktadır. TM-O düzeydeki öğrenci ile çözümü yaparken yürütülen diyalog aşağıda verilmektedir.

E: Bütünler, tümler hatırlayabilir miyim acaba bunları? Biri iç açıları toplamı, diğeri dış açıları toplamı değil miydi? Yanlış mı hatırlıyorum acaba? 45 galiba.

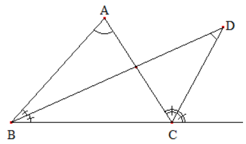
A: Nasıl buldun?

E: Bütünleri tümlerinin 3 katı. Bir açının bütünleri ile tümlerinin toplamları 180 olacak. x=3y olur. (Burada öğrenci, x ve y gibi 2 değişken kullanarak çözümü yapmayı tercih etmiştir.) 180i dörde böldüm. 45. Yani küçüğü 45 olacak ve 135 olacak. Böyle düşündüm. Bence burada 45i soruyor. Yani açı 45dir.

Öğrencinin yaptığı çözümdeki hata bir açının tümleri ile bütünlerinin toplamının 180 olduğunu düşünmesidir. Bu sebeple öğrenci bu soruya yanlış cevap vermektedir. Burada öğrencide mevcut olan hata sebebiyle bu durumun ortaya çıktığı görülmektedir. Bu soruda her çözümde cebirsel ifadeden faydalanıldığı ve başarı seviyesine göre bir farklılaşmaya rastlanmadığı belirlenmiştir.

Bu bölümdeki 4. problem: *"Toplamları 150^o ve farkları 10^o olan iki açının ölçülerini bulunuz."* şeklindedir. Bu problemdeki amaç, öğrencilerin çözüm için oluşturdukları cebirsel denklemde tek değişken ya da iki değişken kullanma durumlarını ve kullandıkları değişkenleri hangi harflerle ifade ettiklerini tespit etmektir. Burada kullanılan değişkenler a, b, x, y,α ve β'dır. Öğrencilerin tamamı, çözümde iki değişken kullanmayı tercih etmiştir. F-İ, F-Z, TM-İ ve TM-O kodlu öğrenciler değişkenleri x ve y harfleri ile ifade etmektedir. F-O kodlu öğrenci değişkenleri α ve β şeklinde ifade ederken, TM-Z kodlu öğrenci ise değişkenleri a ve b ile göstermektedir. Burada iyi düzeydeki öğrencilerin diğerlerine göre daha sık kullanmayı tercih edilen değişkenleri tercih ettikleri gözlemlenmiştir.

5. problem ise “Aşağıda verilen şekle göre [BD] iç açıortay, [CD] dış açıortay olduğuna göre, D açısının ölçüsünü A açısı cinsinden bulunuz.”



Buradaki amaç, öğrencilerin şekli verilen üçgenlerin olduğu problemin çözüm için kullandıkları sembol ve değişkenleri belirlemek ve cebirsel çözüm kullanma durumlarını ortaya çıkarmaktır. Öğrencilerin başarı düzeylerine göre kullanmış oldukları değişkenler ve cebirsel çözüm yapma durumları Tablo 3’te verilmektedir.

Tablo 3 Öğrencilerin Değişken Kullanma ve Cebirsel Çözüm Durumları

	Öğrenci Başarı Düzeyleri					
	F-İ	*F-O*	*F-Z*	*TM-İ*	*TM-O*	*TM-Z*
Kullanılan değişkenler	a, b	$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$	x, y	a, b	a, b
Cebirsel çözüm yapma	-	+	-	-	-	-

Tablo 3 incelendiğinde öğrencilerden üç tanesi (F-İ, TM-O, TM-Z) çözümde değişken olarak a ve b harflerini, iki tanesi (F-O, F-Z) α ve β harflerini ve bir tanesi (TM-İ) x ve y harflerini kullanmayı tercih etmektedir. Problemdeki şekilde A açısı ve D açısı arasındaki ilişkiyi $\mathrm{m}(\widehat{\mathrm{D}}) = \mathrm{m}(\widehat{\mathrm{A}})/2$ şeklindeki haliyle cebirsel çözüm yapmadan ezberden yazan öğrencilerin sayısı beştir. Sadece bir öğrenci (F-O) diğerlerinden farklı olarak işlem yaparak doğru çözüme ulaşmıştır. Burada dikkat çeken nokta; sözel ifade ile verilen problemin çözümü ile sözel ve şekilsel olarak verilen beşinci problemin çözümünde öğrencilerin değişkenleri kullanım durumlarındaki değişimdir. Sadece sözel ifade ile verilen durumlarda öğrenciler; en çok x ve y değişkenlerini tercih ederken, görsel olarak verilen şeklin kullanıldığı problemde daha çok a,b veya α, β değişkenleri kullanmayı tercih etmişlerdir. Bu kısımda ise x ve y değişkeni en az tercih edilen değişken olmuştur.

Gösterim Kullanma Alt Boyutuna Ait Bulgular

Bu bölümde öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri gösterim alt boyutunda elde edilen bulgular doğrultusunda sunulmuştur. Veri toplama aracında ilgili bölümdeki her bir problem üzerinden bulguların verilmesi tercih edilerek öğrencilerin mevcut durumları daha ayrıntılı şekilde incelenmesine imkan tanınmıştır.

Bu bölümdeki ilk problem "$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}$ ve $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$ ifadeleri nasıl isimlendirilir? Nokta, doğru, doğru parçası ve ışın nasıl gösterilir?" dir. Bu problemdeki ilk sorudaki amaç, öğrencilerin gösterimlerin çeşitlerini kullanabilme yeterliklerini ortaya çıkarmaktır. Yukarıda verilen matematiksel ifadelerin sözel gösterim aracılığı ile ifade edilmesi öğrencilerden istenmiştir. Öğrencilerin yukarıdaki ifadeler için vermiş oldukları cevaplar Tablo 4'te sunulmaktadır.

Tablo 4 Öğrencilerin $\boldsymbol{\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}}$ *Ve* $\boldsymbol{\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}}$ İfadeleri İçin Kullandıkları Sözel Gösterimler

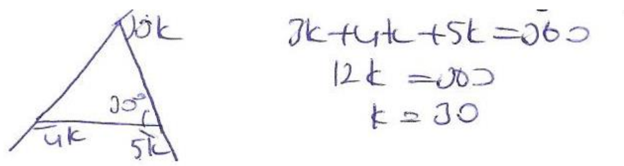
		Sözel Gösterim	
		$\boldsymbol{\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}}$	$\boldsymbol{\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}}$
Öğrenci Başarı Düzeyleri	*F-İ*	Yaklaşık	Yaklaşık Eşit
	F-O	Benzer	Yaklaşık Birbirine Eşit/Benziyor
	F-Z	Benzer	Yakın, Eşdeğer, Eş Yakın
	TM-İ	Benzer	Denk
	TM-O	Benzer	-
	TM-Z	Benzer	Hem Eşit Hem Benzer

Tablo 4 incelendiğinde $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}$ ifadesi için F-İ düzeydeki öğrenci haricinde diğer öğrenciler sözel gösterimi doğru yapmıştır. F-İ düzeydeki öğrenci ise üçgenlerin benzerliğini gösteren ifade için *"ABC üçgeni yaklaşık DEF üçgeni"* ifadesini kullanmaktadır. $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$ ifadesi için cevap veren öğrencilerden hiçbiri sözel gösterimi istenilen "eş üçgenler" şeklinde doğru ifade edememiştir. TM-O düzeydeki öğrenci ise bu soruya cevap vermemiştir. Öğrencilerin üçgenlerin eşliği için sözel gösterimde kullandıkları ifadeler; "Yaklaşık Eşit, Yaklaşık Birbirine Eşit/Benziyor, Yakın, Eşdeğer, Eş Yakın, Denk, Hem Eşit Hem Benzer" şeklindedir. Burada öğrencilerin şekilsel gösterimden sözel gösterime geçişte özellikle üçgenlerin eşliği için verilen şekilsel gösterimi sözel ifade etmede zorlandıkları belirlenmiştir. Burada $\cong$ sembolünü, $=$ (eşit) ve $\sim$ (benzer) sembolünün ayrı ayrı anlamlarının birleşimi şeklinde ifade etme eğilimi olduğu görülmektedir. Öğrenciler, verilen $\cong$ sembolünün $\overset{\Delta}{ABC}$ ve $\overset{\Delta}{DEF}$ gibi geometrik şekillere verdiği anlamdan çok sadece $\cong$ sembolünün anlamına yoğunlaşmışlardır. Buradan tüm başarı düzeyindeki öğrencilerin geometrik şekillerde cebirsel sembollerin anlamını yorumlamada eksik kaldığı görülmüştür.

Bu problemdeki ikinci amaç ise, sözel gösterimin şekilsel gösterime dönüştürülmesinde öğrencilerin sahip oldukları yeterlikleri incelemektir. Öğrencilerden verilen nokta, doğru, doğru parçası ve ışın kavramlarını şekilsel olarak ifade etmeleri istenmektedir. F-İ, TM-İ ve

TM-O düzeyindeki öğrenciler, her bir kavram için sembolik gösterimi doğru olarak yapmaktadır. F-O, F-Z ve TM-Z düzeyindeki öğrencilerin doğru, doğru parçası ve ışın kavramlarını yanlış olarak gösterdikleri belirlenmiştir. Buradan sözel gösterimden şekilsel gösterime geçiş sürecinde öğrencilerin başarı düzeyleri arasında iyi ve orta düzeyindeki öğrenciler lehine bir farklılığın ortaya çıktığı belirlenmiştir.

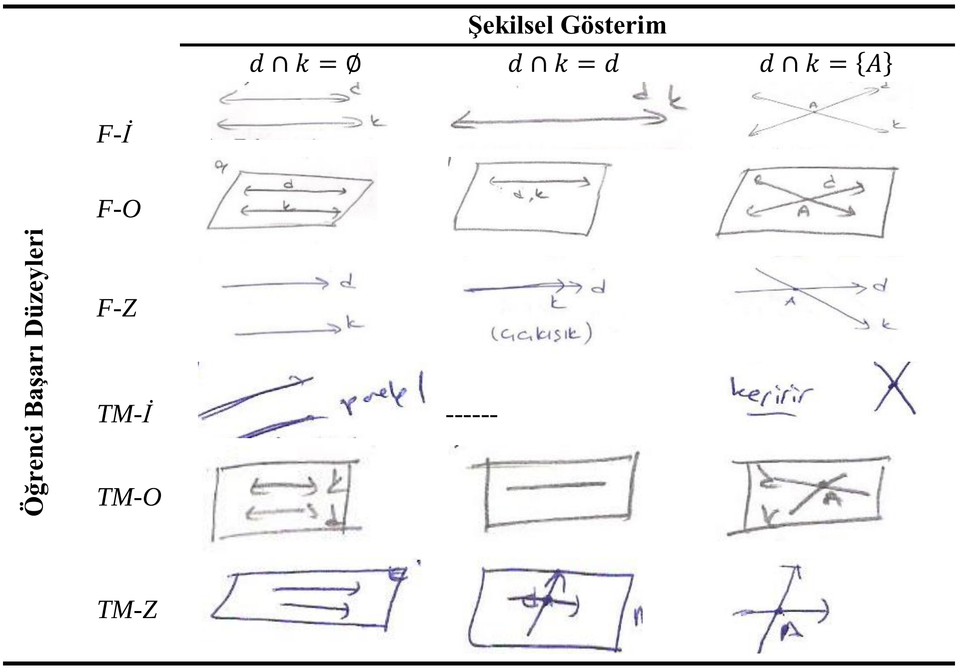
Bu bölümde verilen 2. Problem: *"Bir üçgenin dış açı ölçüleri sırasıyla 3, 4 ve 5 ile orantılıdır. Buna göre üçgenin en küçük iç açısını çizim yaparak bulunuz."* şeklindedir. Bu problemde farklı seviyedeki bütün öğrenciler oranları doğru göstermiş ve çözümü doğru olarak tamamlamıştır. Yapılan çözümlerden birisi örnek olması açısından aşağıda sunulmaktadır.



Şekil 1 TM-Z Kodlu Öğrencinin Probleme Ait Çözümü

Bu bölümdeki 3. Problem: "Aynı düzlemde bulunan d ve k doğruları için a) $d \cap k = \emptyset$ b) $d \cap k = d$ c) $d \cap k = \{A\}$ gösterimleri çizerek, yorumlayınız." şeklindedir. Bu problemdeki amaç, cebirsel gösterimden şekilsel gösterime geçişlerde öğrencilerin yeterliklerini incelemektir. Problemde verilen ilk gösterim, d ve k doğrularının kesişiminin boş küme olduğunu dolayısıyla d ve k doğrularının paralelliğini ifade etmektedir. İkinci gösterim, d ve k doğrularının kesişiminin yine d doğrusunu oluşturduğunu, yani d ve k doğrularının çakışık olma durumlarını ifade etmektedir. Üçüncü gösterim, d ve k doğrularının kesişiminin bir A noktasını belirttiğini, yani d ve k doğrularının bir A noktasında kesiştiklerini ifade etmektedir. Öğrencilerden bu gösterimleri şekilsel gösterim aracılığı ile ifade etmeleri istenmiştir. Aşağıdaki tabloda öğrencilerin başarı düzeylerine göre yapmış oldukları şekilsel gösterimler sunulmaktadır.

Tablo 5 Öğrenci Başarı Düzeylerine Göre Yapılan Şekilsel Gösterimler



Tablo 5 incelendiğinde F-İ ve F-O kodlu öğrencilerin yapmış oldukları şekilsel gösterimlerin doğru olduğu görülmektedir. Diğer öğrencilerin bu problem için yapmış oldukları şekilsel gösterimlerdeki hata, “doğru” nun çizimindeki yanlışlıklardan kaynaklanmaktadır. Buradan F bölüm öğrencilerinin TM bölümünde okuyan öğrencilere göre daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Başarı seviyesinde ise belirgin bir farklılaşmanın ortaya çıkmadığı görülmüştür.

Bu bölümdeki 4. Problem: *“Herhangi bir eşkenar dörtgenin alan formülünü bulunuz?”* şeklindedir. Bu problemdeki amaç, öğrencilerin geometrik bir şeklin alanını bulurken kullandıkları gösterim çeşitlerini ortaya çıkarmaktır. Yapılan çözümler incelendiğinde öğrenciler arasında eşkenar dörtgenin alanını doğru ifade eden bulunmamaktadır. Öğrencilerin yapmış oldukları çözümlerde kullandıkları gösterimler ise sözel ve şekilsel olarak iki grupta toplanmaktadır. Öğrencilerden iki tanesi (F-İ ve TM-O) eşkenar dörtgenin alanını a.h (h: a kenarına ait yükseklik) olarak ifade ederken, iki öğrenci (TM-İ ve F-Z) ise a.a=a^2 olarak ifade etmektedir. TM-Z düzeydeki öğrenci, eşkenar dörtgenin alanını 4.a olarak bulmuştur. F-O düzeydeki öğrenci ise soruya cevap verememiştir. Eşkenar dörtgenin alanını a.a olarak ifade eden öğrencilerden TM-İ düzeydeki öğrenci, şekilsel ve sözel gösterimleri kullanmaktadır. Öğrenci ile çözüm için yürütülen diyalog aşağıda verilmektedir.

TM-İ: Eşkenar dörtgen kare olabilir.

A: Kare değil burada ifade edilen. Eşkenar dörtgen şekli var, biliyor musun?

TM-İ: Eşkenar dörtgen? Kenarları çarparım a çarpı b alanı verir o değil mi?

A: Eşkenar dörtgen nasıldı?

TM-İ: Dört kenarı eşit olan dörtgen.

A: Alanını nasıl buluyoruz?

TM-İ: a nın karesi.

Bu çözümde öğrencinin eşkenar dörtgenin alanını bulurken şekli kare gibi algıladığı ve istenen alanı a.a olarak ifade ettiği gözlemlenmiştir. Burada öğrencinin eşkenar dörtgeni kareye genellediği ve bu nedenle de kavram yanılgısına sahip olduğu belirlenmiştir.

5. problemde öğrencilerden verilen dörtgenleri (Yamuk, Eşkenar dörtgen, Paralelkenar, Kare, Deltoid, Dikdörtgen) altta bulunan dörtgen yukarıdaki dörtgenin bütün özelliklerini sağlayacak biçimde yapılmış olan sınıflandırma içerisine yerleştirmeleri istenmektedir. Bu problemdeki amaç, öğrencilerin gösterimin farklı bir formu olarak düşünülebilen alt küme kavramı ile ilişki kurma yeterliklerini incelemektir. Öğrencilerden sadece F-İ düzeydeki öğrenci problemde verilen dörtgenler arasında alt küme kavramını ilişkilendirebilmiştir. Diğer başarı düzeyindeki öğrenciler ise dörtgenlerdeki alt küme ilişkisini kurmada başarılı olamamıştır. Problemdeki dörtgenler arasında ilişkiyi kurabilen F-İ düzeydeki öğrenci ile sınıflandırma esnasında yürütülen diyalog aşağıda sunulmaktadır.

F-İ: Burada en az özelliğe sahip olan deltoid galiba. İki tane ikizkenar üçgenden oluşuyor. Paralelkenar olmaz. Deltoiddir illaki. Yamukta paralellik var. Karenin özelliği en fazladır. Kareyi buraya alalım (en alta yazıyor). Karede bütün özellikler var neredeyse.

A: Dikdörtgende?

F-İ: Onda da eşit kenarlar var.

A: Paralellik var mı?

F-İ: Var. Dikdörtgeni buraya yazıyorum (Karenin üstüne). Deltoid tamamen farklı bir şey. Bu ayrı kutucuğu onun için yapmış. Deltiodin altına eşkenar dörtgen yazacağım galiba. İkizkenar iki üçgenin birleşimidir deltoid. Eşkenar dörtgende de iki tane ikizkenar üçgen var.

Diyalogdan görüldüğü üzere F-İ öğrencisi verilen geometrik şekillerin sahip oldukları özellikler bağlamında şekillerin birbirini kapsama durumunu ortaya çıkararak alt küme kavramını geometrik şekiller açısından değerlendirme yeterliğine sahiptir. Diğer öğrencilerin deltoid ve eşkenar dörtgen arasındaki ilişkiyi kurmada zorlandıkları ve bu sebeple de başarısız oldukları belirlenmiştir.

Örüntülerin Kullanımı ve Genelleme Alt Boyutuna Ait Bulgular

Bu kısımda öğrencilerin örüntülerin kullanımı ve genelleme düzeyleri gösterim alt boyutunda elde edilen bulgular doğrultusunda sunulmuştur. Veri toplama aracında ilgili bölümdeki her bir problem üzerinden bulguların verilmesi tercih edilerek öğrencilerin mevcut durumları daha ayrıntılı şekilde incelenmesine imkan tanınmıştır.

Bu bölümdeki ilk problem, *"Kenarları 1 br uzunluğunda olan 5x5 karelerden oluşan bir şekilde bulunan toplam kare sayısını bulunuz. Şekil 6x6 kareden oluşsaydı toplam kaç kare olurdu? Şekil 10x10 kareden oluşsaydı toplam kaç kare olurdu? nxn kareden oluşsaydı toplam kaç kare olurdu? Kenarlarının üzerinde toplam 76 karenin olduğu bir şeklin boyutları kaç birimdir?"* dir. Bu problemin sorulmasındaki amaç, öğrencilerin bu süreçte kullandıkları stratejileri belirlemek, genellemeye ulaşma durumlarını incelemek ve öğrenci seviyelerine göre verilen cevaplar arasında farklılık olup olmadığını ortaya çıkarmaktır. Bu problem için yapılan tüm çözümlerde öğrencilerin sadece sayısal stratejiyi tercih ettikleri belirlenmiştir. Yani öğrenciler sadece sayısal işlemlerle genellemeye varmaya çalışmış ve genellikle şekil çizme, fonksiyon kullanma vb. gibi yolları tercih etmemişlerdir. Bunun yanı sıra sadece TM-İ öğrencisi sayısal işlemlerin ardından şekil çizerek genellemeyi görme çabası içine girmiş fakat başarılı olamamıştır. Halbuki çözümde aritmetik diziden faydalanılıp genellemeye varılması beklenmektedir. Fakat hiçbir öğrenci bu soru için genellemeyi kuramamış ve işlemlerinde sayısal stratejilerin ötesine geçememişlerdir. Öğrencilerdeki başarı seviyesi düştükçe yapılan işlemlerin niteliği de niceliği de azalmış, zayıf düzeyde kabul edilen öğrencilerin her ikisi de genellemeye varmayla ilgili bir sonuca ulaşamamış ve bunun yanı sıra genellemeyle ilgili yorum yapmada bile zorlanmışlardır.

2. problem ise; *"Bir kenarının uzunluğu 4 cm olan eşkenar üçgenin yüksekliğini ve alanını hesaplayınız. Yanda kenar uzunlukları verilen eşkenar üçgenlerin yükseklik ve alanını hesaplayınız."*

Kenar uzunluğu (a)	4	6	7	10	n
Yükseklik (h)					
Alan (A)					

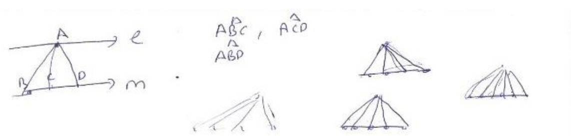
Bu problemde öğrencilerin tamamı istenilen üçgenin yüksekliğini ve alanını daha önce bildikleri formüller aracılığı ile bulmuşlardır. Bu formülleri doğrudan yazmışlar ve tabloyu da bu şekilde doldurmuşlardır. Hiçbir öğrenci kenar uzunluğu n olan bir üçgenin alanını ve yüksekliğini bulmak için kendilerini genellemeye götürecek işlemleri kullanmamıştır.

Bu bölümdeki 3. problem, *"Bir dışbükey dörtgenin köşelerinin birleştirilmesiyle oluşan doğru parçaları kaç tanedir? Benzer olarak Beşgen, altıgen, sekizgende oluşan doğru parçaları kaç tanedir? n kenarlı çokgen için aynı koşullarda kaç tane doğru parçası oluşur? Bundan yararlanarak çokgenlerdeki köşegen sayılarının nasıl hesaplanacağını bulunuz."* şeklindedir. Bu problemin çözümünde bütün öğrenciler şekilden faydalanmıştır. Fakat TM-Z öğrencisi hariç diğer öğrencilerin tamamı dörtgenin köşelerinin birleştirilmesiyle oluşan doğru parçalarının sayısını 2 bulduktan sonra daha önceden akıllarında olan köşegen formülünü doğrudan yazmışlardır. TM-Z öğrencisi ise şekillerin köşegen sayılarının artışındaki ilişkiyi görememesi sebebiyle genellemeye varamamıştır.

Bu bölümdeki 4. problemde öğrencilerin iç ve dış açı arasındaki ilişkiyi belirleme düzeylerini ve bu durumu genelleme becerilerini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Öğrencilerin tamamı bir üçgenin iç ve dış açılarının birbirinin bütünleri olduğu yanıtını vererek soruyu doğru cevaplamışlardır. Ayrıca bir üçgende kaç tane iç ve dış açı çifti oluşturulabilir sorusuna da 3 çift cevabını bütün öğrenciler verebilmiştir. Bir üçgenin tüm iç ve dış açılarının toplamını 180+360=540 işlemi ile yine bütün öğrenciler doğru cevaplamışlardır. Dış açı sorusunu da öğrenciler doğru olarak cevaplamışlardır.

Bu bölümdeki son problem verilen noktaların kullanılması ile üçgen oluşturma ile ilgilidir. Burada birbirlerine paralel olan l ve m doğrularından l üzerinde bir nokta m üzerinde sırasıyla 3, 4, 5, 6, 10, n noktaları alınarak kaç adet üçgen oluşturulabileceği öğrencilere sorulmuştur. Bu sorudaki amaç noktalar kullanılarak oluşturulacak geometrik şekillerde genelleme becerisinin ne düzeyde olduğunu belirlemektir. Öğrencilerin tamamı bu problemin çözümü için şekilden faydalanmışlardır.

Doğru üzerindeki noktaları seçerken kombinasyon kavramının kullanılması gerekliliği ortaya çıkmış ve böylece genellemeye varırken bu yolu takip ederek tabloyu doğru bir şekilde doldurabilmişlerdir. Fakat TM-Z öğrencisi, genellemeye varabilmesi için m doğrusu üzerinde 3, 4, 5 ve 6 nokta olan şekilleri çizerek olası üçgenlerin sayısını şekil üzerinde çizerek bulmaya çalışmıştır. Bu öğrenciye ait çözüm Şekil 1.'de verilmiştir.



Şekil 2 TM-Z Öğrencisine Ait Genelleme 5. Problem Çözümü

Bu çizimlerin ardından öğrencinin çözüme yönelik yorumu şu şekildedir; "*D: 4 noktada 6 üçgen oluyormuş. 5te 8 olur o zaman. 6da 10. 10da 15. n'de ise n+6"* Bu öğrenci, genellemeye varmak için şekilden faydalanmış olsa da üçgen oluşturulması için kullanılan nokta sayıları arasındaki gerekli ilişkiyi ortaya çıkaramamasından ötürü istenilen genellemeye varamamış ve istenilen tabloyu aşağıdaki şekilde doldurmuş ve çözümü yanlış olarak tamamlamıştır. Bu öğrencinin çözümü aşağıdaki şekilde verilmiştir.

m üzerindeki nokta sayısı	3	4	5	6	10	n
Üçgen sayısı	3	6	8	10.	15	n+6

Şekil 3 TM-Z Öğrencisinin Genelleme 5. Problem İçin Çözümü

Bu bölümde öğrencilerin örüntüleri kullanma ve genelleme yeterliklerinin ortaya çıkarılmasına yönelik sorular hazırlanarak öğrencilere sorulmuştur. Elde edilen bulgulara göre öğrencilerin genelde aritmetik düşünme eğilimlerinin yeterli düzeyde olmadığı, çünkü öğrencilerin genellemeye varmak için gerekli olan aritmetik dizi kavramını problem çözümlerinde kullanamadıkları belirlenmiştir. Genellikle daha zayıf başarı düzeyine sahip öğrencilerin genellemeye varabilmek için şekillerden daha çok faydalandıkları görülmüştür. Fakat şekillerden faydalanırken ardışık olarak çizilen şekillerin aralarındaki ilişkileri ortaya çıkarmada başarısız olmuşlardır.

Sonuç ve Tartışma

Lise 4. sınıftaki öğrencilerin geometrik kavramlardaki cebirsel düşünmenin bileşenleri olan; semboller ve cebirsel ilişki, gösterimlerin farklı formları, örüntülerin genellemesi ile ilgili becerilerini incelemek amacıyla yapılan çalışmada öğrencilerin seçimi Van Hiele geometri testi ve cebir testi puanlara göre yapılmıştır. Öğrencilerin seviyeleri bu sonuçlara göre iyi, orta ve zayıf olarak belirlenmiştir. Bu doğrultuda farklı bölümlerde (F ve TM) okuyan ve farklı başarı seviyelerinde bulunan öğrenciler arasındaki farklılaşma incelenmiştir.

Bu bölümde ilk olarak semboller ve cebirsel ilişki bileşeninde elde edilen sonuçlar öğrenci başarı seviyeleri, okudukları bölüm bağlamındaki farklılaşmalar göz önüne alınarak sunulmuştur. Öğrencilerin özellikle bu bölümde cebirsel ilişkiyi kurmada zorlandıkları belirlenmiştir. İyi düzeydeki öğrencilerin bile bir geometrik şeklin çevresini cebirsel olarak ifade etmede hataya düştükleri ortaya çıkmıştır. Bu durumun öğrencilerin cebirsel ifadelerin sonuç olamayacağını düşünmelerinden dolayı x'li bir çevre formülü kabul etmediklerinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Diğer yandan öğrencilerden birisi denklem ve bağıntı kavramları arasındaki farkı tespit etmekte hataya düştüğü görülmüştür. Bu durumun nedenlerinden biri öğrencilerin geometri problemlerinde genellikle sayısal veriler içeren durumlarla karşılaşmaları olabilir. Diğer yandan cebirsel ifade ile kenarları verilen bir dikdörtgende uzun kenarı tespit etmede orta ve zayıf düzeydeki öğrencilerin yanılgıya düştükleri görülmüştür. Ayrıca bu dikdörtgenin çevresindeki değişimi verilen cebirsel ifadeye göre yorumlamada öğrencilerin yetersizliği dikkat çekmektedir. Bu sonucu destekleyecek şekilde Dindiyal (2004)'in yapmış olduğu çalışmada da öğrencilerin cebirsel ifadedeki değişim ile geometrik şeklin özelliklerindeki değişimi yorumlamada zorlandıkları sonucu mevcuttur. Bu bağlamda öğrencilerin cebirsel olarak bir şeklin özelliklerini belirleme yeterliklerinin bölüme ya da başarı düzeyine göre farklılaşmadığı belirlenmiştir.

Aritmetikten cebire geçişteki en önemli bileşenlerden biri harflerin kullanımı ve anlamıdır (Kieran, 1992; MacGregor & Stacey, 1997). Kieran'e (1990) göre öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte ve cebirde zorluklar yaşamalarının en önemli nedenlerinden biri harflerin bu farklı anlamları arasında ilişkiyi kurmamalarıdır. Yürütülen çalışmada da zayıf düzeydeki öğrencilerin geometrik şeklin köşelerini temsil eden harfler ile değişken olarak verilen harf arasındaki ayrımı yapamamaları karşılaşılan bir durumdur. Akkan (2009)'ın çalışmasında elde edilen sonuca göre öğrencilerin bilinmeyen ve değişken kavramları arasındaki farkı algılayamadıkları, bu kavramları birbirlerinin yerine kullandıkları anlaşılmaktadır. Bu sonuç ile yürütülen çalışmanın sonuçları benzerlik göstermektedir. Diğer yandan öğrencilerin çözümlerde tercih ettikleri harflere yönelik bulgular dikkat çekmektedir. Açıların bulunması ile ilgili problemlerde çoğunlukla bilinmeyen açılar yerine kullanılan a ve b harfleridir. Bu kısımda x ve y en az tercih edilen harflerdir. Bunun tersine kenarları bulma ile ilgili problemlerde ise en çok x harfi tercih edilmiştir. Burada öğrencilerin istenen kavrama göre (açı, kenar vb.) harf tercihlerinin değişim gösterdiği belirlenmiştir. Bu durumun öğrencilerin daha önceki problem çözme süreçlerinde harf kullanımı ile ilgili deneyimlerden kaynaklandığı ve kalıplaşmış bazı durumların oluştuğu düşünülebilir.

Çalışmada öğrencilerin cebirsel çözüm yapma durumlarının incelendiği kısımda öğrencilerin genellikle cebirsel olarak çözüm yapmaktan çekindikleri belirlenmiştir. Bunun yerine istenen durumu hatırlamanın daha kolay şekilde öğrenciler tarafından gerçekleştirildiği gözlemlenmiştir. Sadece TM-O düzeyindeki öğrenci cebirsel işlemler yaparak istenilen sonuca ulaşmıştır. Diğer öğrenciler işlem yapmaya teşvik edilse de bunu reddetme eğiliminde olmuşlardır. Bu durum neredeyse öğrencilerin tamamında cebirsel işlem yürütüme becerilerinin yetersiz olduğunu göstermektedir. Yani öğrencilerin cebirsel işlem yürütme becerileri başarı seviyeleri ya da okudukları bölüme göre değişim göstermemektedir. Kaya ve Keşan (2014)'ın yürüttüğü çalışmada bu sonucu destekler nitelikte sonuçların bulunduğu belirlenmiştir.

Gösterim bileşenine ait elde edilen sonuçlardan ilki matematiksel gösterim ile verilen ifadelerin ($A\overset{\Delta}{B}C \sim D\overset{\Delta}{E}F$ ve $A\overset{\Delta}{B}C \cong D\overset{\Delta}{E}F$) sözel gösterimlerinin istendiği durumda öğrencilerin çoğunun ilk ifadedeki benzerlik işaretini "benzerlik" olarak ifade etmiş olmasına rağmen F-İ öğrencisinin buna "yaklaşık" demesi dikkat çekici bir durum olarak belirlenmiştir. Diğer yandan $\cong$ işareti için öğrencilerin kullandıkları sözel gösterimler (Yaklaşık Eşit, Yaklaşık Birbirine Eşit/Benziyor, Yakın, Eşdeğer, Eş Yakın, Denk, Hem Eşit Hem Benzer) öğrencilerin bu işarete ait formal ifadeyi belirlemede zorlandıklarını göstermektedir. Dindyal (2003) yürüttüğü çalışmada öğrencilerin $p \rightarrow q$ ifadesindeki "→" sembolünü sözel gösterimle ifade etmede zorlandıklarını belirlemiştir. Bunun yanı sıra Kardeş (2010), yaptığı çalışmada öğrencilerin temsil dönüşüm başarılarının orta seviyede olduğunu belirlemiştir. Ayrıca öğrencilerin cebir kavramlarının dört temsil biçimi; sözel anlatım, denklem, tablo ve grafik arasında dönüşüm yapmada düşük beceriye sahip olduğunu belirten Sert (2007) ile öğrencilerin sembolik ve sözel gösterimleri dönüştürmede zorlandıklarından dolayı cebire karşı olumsuz bir tutuma sahip olabileceğini belirten Yılmaz (2011)'ın çalışma sonuçları bu yürütülen çalışmanın sonucu ile benzerlik göstermektedir. Diğer yandan sözel gösterimin sembolik/şekilsel gösterime dönüştürülmesine ilişkin soruda öğrencilerin başarı düzeyleri arasında bir farklılığın ortaya çıktığı belirlenmiştir. Zayıf düzeydeki öğrencilerin diğer seviyedeki öğrencilere oranla bu süreci daha az başarı ile tamamladığı görülmüştür. Bu durum geometri düşünme düzeyi düşük olan öğrencilerde cebirsel düşünme düzeylerinin de düşük olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Dörtgenlerin sınıflandırması ile ilgili elde edilen sonuçlara bakıldığında öğrencilerin geometrik şekillerin özelliklerine göre birbirini kapsama durumunu belirlemede başarısız olduklarını ortaya çıkarmaktadır. Yalnız F-İ öğrencisinin doğru olarak cevaplandırdığı bu problemde geometrik düşünme düzeyi yüksek olan öğrencinin şekiller arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmada cebirsel düşünme sürecini başarıyla tamamladığı belirlenmiştir. Bu durum çalışma grubuna dahil olan öğrencilerin Van Hiele geometri düşünme düzeyleri ile cebirsel düşünme düzeyleri arasında bir ilişkinin olduğunu göstermektedir.

Örüntüleri genelleme bileşeninden elde edilen sonuçlar ise öğrencilerin genelleme için genellikle sayısal stratejileri kullandığını göstermektedir. Bunun yanı sıra öğrencilerin genelde genellemenin ilk basamaklarında başarılı oldukları fakat genel terime ulaşmada başarısız oldukları belirlenmiştir. Araştırmacılar öğrencilerin yakın terimi bulmada uzak terimi bulmaya göre daha yeterli olduklarını ifade etmişlerdir (Stacey, 1989; Orton & Orton, 1999; Feife Ye, 2005, Akkan, 2009; Akkan & Çakıroğlu, 2012; Akkan, 2013). Diğer yandan öğrencilerin aşina oldukları örüntülerde ezberlerindeki formülü doğrudan yazarak daha kolay genellemeye vardığı da elde edilen bir başka sonuçtur. Nitekim birçok araştırmacı da öğrencilerin aşina oldukları örüntü çeşitlerinde daha başarılı olduğunu belirtmişlerdir (Orton

& Orton, 1999; Feife Ye, 2005; Lannin, 2005). Ayrıca Feife Ye (2005) öğrenme ortamlarında farklı örüntü çeşitlerine değinilmemesinin, öğrencilerin karşılaştıkları örüntü problemlerine sınırlı çözüm stratejileri geliştirmelerine yol açtığını ve bununda öğrencileri ezbere yönlendirdiğini ifade etmiştir. Örüntüleri genelleme bileşeni için cebirsel düşünme düzeyleri açısından öğrenim görülen bölüm ya da başarı düzeyleri arasında bir farklılaşma belirlenmemiştir.

Sonuç olarak cebirsel düşünmenin bu çalışmada kullanılan bileşenleri için genelde öğrenim görülen bölüme göre bir farklılaşma oluşmadığı elde edilen nitel bulgular sonucunda ortaya çıkmaktadır. Fakat zayıf düzeydeki öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin diğer düzeydeki öğrencilere oranla daha düşük ve yapmış oldukları hataların ise daha fazla olduğu görülmüştür. Bunun yanı sıra iyi düzeydeki öğrencilerin yaptıkları hataların genelde kavramsal boyutta olduğu (örneğin; denklem ve cebirsel ifade kavramlarını birbiri yerine kullanma gibi) belirlenirken orta ve zayıf düzeydeki öğrencilerin daha basit düzeyde (örneğin; bir açının tümleri ve bütünlerinin toplamının 1800 olduğunu düşünme gibi) ve gösterimsel hatalar yaptıkları belirlenmiştir. Bunun yanı sıra ortaya çıkan hatalarda genellemeye yönelik kavram yanılgılarının (karenin özelliklerini eşkenar dörtgene genelleme gibi) da oluştuğu ortaya çıkmıştır.

Öneriler

Çalışma sonucunda Van Hiele geometri düşünme düzeyi ile cebirsel düşünme düzeyleri arasında ortaya çıkan ilişkinin nicel verilerle desteklenmesine yönelik araştırmalarının yapılması ve cebirsel düşünme becerilerinin öğrencilere uygun öğrenme araçları ve yöntemler kullanılarak küçük yaşlarda kazandırılması önerilebilir. Diğer yandan araştırmada öğrencilerin genelleme yaparken aşina oldukları örüntülerde ezberden formül yazdıkları belirlenmiştir. Bu durumun önüne geçebilmek adına geometri derslerinde örüntü gerektiren problemlere ağırlık verilmesi önerilebilir. Bunun yanı sıra öğrencilerin geometri dersine katılmadan önce cebirde daha iyi bir hazırlık yapmaları tavsiye edilir.

Kaynakça

Akkan, Y. (2009). *İlköğretim öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin incelenmesi*, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Akkan, Y. & Çakıroğlu, Ü. (2012). Generalization Strategies of Linear and Quadratic Pattern: A Comparison of 6th-8th Grade Students. *Education and Science*, 37(165), 104-120.

Akkan, Y. (2013). Comparison of 6th-8th Graders' Efficiencies, Strategies and representations Regarding Generalization Patterns. *BOLEMA*, 27(47), 703-732.

Bağdat, O. (2013). *İlköğretim 8. Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme Becerilerinin SOLO Taksonomisi İle İncelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.

Crowley, M.L. (1987). *The van Hiele model of the development of geometric thought*. In M. M. Lindquist (Ed.), LTMrning and tTMching geometry, K-12, N.C.T.M.,1-16. Reston.

Çağdaşer, T. B. (2008). *Cebir Öğrenme Alanının Yapılandırmacı Yaklaşımla Öğretiminin 6. Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme Düzeyleri Üzerindeki Etkisi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi, Bursa

Çelik, D. (2007). *Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi,* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

Çepni, S. (2005). *Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş*, Trabzon: Erol Ofset.

Dede, Y., Yalın, H. & Argün, Z. (2002). İlköğretim 8. Sınıf Öğrencilerinin Değişken Kavramının Öğrenimindeki Hataları ve Kavram Yanılgıları. UFBMEK (16-18 Eylül 2002). ODTÜ, Ankara

Dindiyal, J. (2004). Algebraic thinking in geometry at high school level: Students' use of variables and unknowns. 27th Annual Conference of the Mathematics Education ResTMrch Group of Australasia Incorporated (MERGA 2004) on "Mathematics Education for the Third Millennium, Towards 2010", Townsville, Australia.

Dindyal, J. (2003). *Algebraic Thinking in Geometry at High School Level*. Unpublished Doctoral Dissertations, Illinois State University.

Dindyal, J. (2004). Algebraic Thinking In Geometry at High School Level: Students' Use of Variables and Unknowns. In I. Putt, R. Faragher, & M. MclTMn (Eds.) Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia (pp. 183-190). Townsville: MERGA.

Driscoll, M. (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for TTMchers Grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann

Duatepe, A. (2000). *An investigation on the relationship between Van Hiele geometric level of thinking and demographic variables for preservice elementary school tTMchers*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Fuys, D., Geddes, D. & Tiskler, R. (1988). An investigation of the Van Hiele levels of thinking in geometry among adolescents. *Journal for ResTMrch in Mathematics Education Monographs*, No.3, N.C.T.M., Reston.

Feifei, Y. (2005). *Diagnostic Assessment of Urban Middle School Student LTMrning of PrTMlgebra Patterns. Doctoral Dissertation*, Ohio State University, USA.

Gülpek, P. (2006). *İlköğretim 7. ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme Düzeylerinin Gelişimi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Herbert, K.& R. Brown. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics, 3 (February)*, 340-344.

Oral, B., İlhan, M., & Kınay, İ. (2013). İlköğretim 8. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik ve Cebirsel Düşünme Düzeyleri Arasındaki İlişkinin İncelenmesi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 34(34), 33-46.

Joffrion, H. K. (2005). *Conceptual and Procedural Understanding of Algebra Concepts in the Middle Grades*. Unpublished Master of Science Thesis, Texas A&M University.

Kaf, Y. (2007). *Matematikte Model Kullanımının 6. Sınıf Öğrencilerinin Cebir Erişilerine etkisi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Kalman, R. (2008). TTMching algebra without algebra. *Mathematics TTMching in the Middle School*, 13, 334-339.

Kaput, J. J. (2008). *What is algebra? What is algebraic reasoning?* In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kardeş, D. (2010). *Matematik Öğretmen Adaylarının Lineer Denklem Sistemleri Çözüm Süreçlerinin Öz-Yeterlik Algısı ve Çoklu Temsil Bağlamında İncelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Kaya, D. & Keşan C. (2014). İlköğretim seviyesindeki öğrenciler için cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, 3(2), 38-47.

Kaya, D., Keşan, C., İzgiol, D. & Erkuş, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel muhakeme becerilerine yönelik başarı düzeyi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 7(1), 142-163.

Kieran, C. (1992). *The lTMrning and tTMching of school algebra*. In D.A. Grouws (Eds.). Handbook of ResTMrch on Mathematics TTMching and LTMrning, 390-419. New York: Macmillan.

Kieran, C. (1990). *Cognitive Processes involved in LTMrning School Algebra*. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics and Cognition, 96-112. Cambridge: Cambridge University Pres.

Lannin, J., K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic RTMsoning through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and LTMrning*, 73(7), 231-258.

Macgregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15, *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1-19.

National Council of TTMchers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of TTMcher of Mathematics. http://www.nctm.org/ (06.08.2017).

Orton, A. & Orton, J. (1999). *Pattern and the Approach to Algebra*. In A. Orton (Eds.), Pattern in the TTMching and LTMrning of Mathematics , 104–120. Cassell, London.

Öner-Sünkür, M., İlhan, M. & Kılıç, M. A. (2012). Yedinci Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme Düzeyleri İle Zekâ Alanları Arasındaki İlişkinin İncelenmesi. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14(2), 183-200.

Palabıyık, U. (2010). *Örüntü Temelli Cebir Öğretiminin Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Becerileri ve Matematiğe Yönelik Tutumlarına Etkisi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Pilten, P. (2008). *Üstbiliş Stratejileri Öğretiminin İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Muhakeme Becerilerine Etkisi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara.

Poehl, T. T. (1997). *Using the van Hiele model of thinking: Assessing geometry knowledge of high ability and gifted high school students in Algebra II, Trigonometry, and AP calculus*. Unpublished doctoral dissertation, University of New OrlTMns, New OrlTMns.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Math Ed Res J*, 26(2), 257-277.

Sert, Ö. (2007). *Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Cebir Kavramlarının Farklı Temsil Biçimleri Arasında Dönüşüm Yapma Becerileri*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in LinTMr Generalizing Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147–164.

Steele, D. (2005). Using Writing to Access Students' Schemata Knowledge for Algebraic Thinking. *School Science and Mathematics*, 105(3), 142-154.

Van Ameron, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 63 - 75.

Van de Walle, J.A., Karp, S.K. & Bay-Wiliams, J.M. (2011). Elementary and Middle school Mathematics Teaching developmentally. New York: Allyn & Bacon.

Yaprak-Ceyhan, E. (2012). *İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı Çerçevesindeki Öğretimin Öğrencilerin Cebir Başarısına Etkisi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Yenilmez, K. & Teke, M. (2008). Yenilenen Matematik Programının Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Düzeylerine Etkisi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(15), 229-246.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2006). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. (6. baskı) Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yılmaz, E. (2011). *İlköğretim İkinci Kademe Öğrencilerinin Okuduğunu Anlama ve Yazılı Anlatım İle Cebirde Sembolik ve Sözel Gösterimleri Dönüştürme Becerileri Arasındaki İlişki*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.