Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **16** (2016) 031302 (576-584) AKU J. Sci. Eng. **16** (2016) 031302 (576-584)
DOI: 10.5578/fmbd.27766

Araştırma Makalesi / Research Article

Uyumlu Kesir Mertebeden Chebyshev Diferensiyel Denklemleri ve Kesirsel Chebyshev Polinomları

Emrah Ünal[1], Ahmet Gökdoğan[2]
[1] *Artvin Çoruh Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Temel Eğitim Bölümü, Artvin.*
[2] *Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Gümüşhane.*
e-posta: emrah.unal@artvin.edu.tr, gokdogan@gumushane.edu.tr

Geliş Tarihi: 10.04.2016 ; Kabul Tarihi: 07.11.2016

Anahtar kelimeler
Uyumlu Kesir Merteben Diferensiyel Denklemler; Uyumlu Kesir Merteben Chebyshev Diferensiyel Denklemleri; Kesirsel Chebyshev Polinomları

Özet

Bu çalışmada, $x = 0$ α- adi noktası civarında uyumlu kesir mertebeden birinci ve ikinci tip Chebyshev Diferensiyel denklemlerin kesirsel seri çözümlerini verdik. Bu çözümlerden yararlanarak birinci ve ikinci tip kesirsel Chebyshev polinomlarını ifade ettik. Son olarak, elde edilen bu kesirsel Chebysev polinomların bazı özelliklerini sunduk.

Conformable Fractional Chebyshev Equations and Fractional Chebyshev Polynomials

Keywords
Conformable Fractional Differential Equations; Conformable fractional Chebyshev Differential Equations; Fractional Chebyshev Polynomials

Abstract

In this work, we give the fractional power series solutions around $x = 0$ α-ordinary point of conformable fractional first and second kind Chebyshev differential equations. We present first and second kind fractional Chebyshev polynomials using by these solutions. Finally, we present certain property of fractional first and second kind Chebyshev polynomials.

1. Giriş

1695 yılında L'Hospital tarafından Leibniz'e gönderilen bir mektupta türev mertebesinin kesirli olmasının anlamının sorulmasıyla matematik literatürüne giren kesirli diferensiyel denklemler, günümüzde pek çok alanda kendini göstermektedir. Tarihsel gelişim süreci içerisinde Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi birçok ünlü matematikçi kesirli türevin tanımı ve kesirli diferensiyel denklemler üzerine çalışmalar yapmıştır. O günden bu güne kesirli diferensiyel denklemler kendine birçok uygulama alanı bulmuştur. Bunlardan bazıları iletim hatları teorisi, sıvıların kimyasal analizi, ısı transferi, difüzyon, Schrödinger denklemi, malzeme bilimi, akışkanlar, elektrokimya, fraktal süreçler gibi uygulama alanlarıdır (Bayın, 2004) .

Kesirli türevin literatürde birçok farklı tanımı vardır. Bu tanımların en popüler olanları Riemann-Liouville ve Caputo tanımlarıdır. Bu tanımlar sırasıyla aşağıdaki gibidirler:

Riemann-Liouville tanımı:

$$D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt\,,$$

$$n-1 < \alpha \leq n$$

Caputo tanımı:

$$D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt\,,$$

$$n-1 < \alpha \leq n$$

Riemann-Liouville, Caputo ve diğer kesirli türev tanımları için Kilbas ve ark. (2006), Miller (1993) ve Podlubny (1999) referanslarına bakılabilir.

Son zamanlarda Khalil ve arkadaşları tarafından kesirli türev ve kesirli integralin yeni bir tanımı yapıldı. Bu yeni tanım klasik türevin tanımındaki gibi bir limit formundan yararlanır. Onlar çalışmalarında, bu yeni kesirli türev tanımı için lineerlik şartını, çarpım kuralını, bölüm kuralını, kesirsel Rolle teoremini ve kesirsel ortalama değer teoremlerini sundular (Khalil, 2014). Abdeljawad bu yeni teoriyi geliştirdi. Sol ve sağ uyumlu kesirli türev tanımlarını, $\alpha > 1$ için yüksek mertebeden kesirli integral tanımını, kesirsel Gronwall eşitsizliğini, uyumlu kesirli türevler için zincir kuralını ve kısmi integrasyon formüllerini, kesirsel kuvvet seri açılımını ve laplace dönüşümünü verdi (Abdeljawad, 2014).

Kısa zamanda bu yeni kesirli türevle alakalı bir çok çalışma yapıldı. Kesirsel fourier serileri (Khalil, 2014), uyumlu kesirli Legendre diferensiyel denklemi ve kesirsel Legender polinomları (Abu Hammad and Khalil 2014) uyumlu kesir mertebeden dizisel lineer diferensiyel denklemlerin varlık ve teklik teoremleri (Gökdoğan *et al.* 2016), uyumlu kesir merteben Bessel denklemi ve kesirsel Bessel polinomları (Gökdoğan *et* al. 2015) bu çalışmalardan bazılarıdır.

Bu çalışmada, uyumlu kesir merteben birinci ve ikinci tip Chebyshev Diferensiyel denklemlerini çözülüp birinci ve ikinci tip kesirsel Chebyshev polinomlarını elde edilecektir. Buna ek olarak birinci ve ikinci tip kesirsel Chebyshev polinomlarının bazı özellikleri sunulacaktır.

2. Materyal ve Metot

2.1. Uyumlu kesirli türev analizi

Tanım 2.1. $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun bütün $x > a$ ve $\alpha \in (0,1]$ için α mertebeden sol uyumlu kesirli türevi

$$(T_\alpha^a f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon(x-a)^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Burada $a = 0$ olduğu zaman, notasyon T_α olarak yazılır. Eğer $(T_\alpha^a f)(x)$ (a,b) aralığında oluşursa o zaman $(T_\alpha^a f)(a) = \lim_{x\to a^+}(T_\alpha^a f)(x)$ dır.

Tanım 2.2. $f\colon (-\infty,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun bütün $x < b$ ve $\alpha \in (0,1]$ için α mertebeden sağ uyumlu kesirli türevi

$$\left({}_{\alpha}^{b}Tf\right)(x) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon(b-x)^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\left({}_{\alpha}^{b}Tf\right)(x)$ (a,b) aralığında oluşursa o zaman $\left({}_{\alpha}^{b}Tf\right)(b) = \lim_{x\to b^-}\left({}_{\alpha}^{b}Tf\right)(x)$ dır.

Teorem 2.1. $\alpha \in (0,1]$ and f,g bir $x > 0$ noktasında α-diferensiyellenebilen iki fonksiyon olsun. O zaman

(1) $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(af + bg) = a\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} + b\frac{d^\alpha g}{dx^\alpha}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$

(2) $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(x^p) = px^{p-\alpha}$, $\forall p \in \mathbb{R}$

(3) Bütün sabit $f(x) = \lambda$ için $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(\lambda) = 0$ dir.

(4) $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(fg) = f\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(g) + g\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(f)$

(5) $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(f/g) = \frac{g\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(f) - f\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(g)}{g^2}$

(6) Eğer f diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise o zaman $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\big(f(x)\big) = x^{1-\alpha}\frac{df}{dx}(x)$ dır.

Teorem 2.2. f fonksiyonu bazı $0 < \alpha \leq 1$ için bir x_0 noktasının komşuluğunda sonsuz α-diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. O zaman f fonksiyonu aşağıdaki gibi bir kesirsel kuvvet seri açılımına sahiptir:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left({}^{(k)}T_\alpha^{x_0} f\right)(x_0)(x-x_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!}, x_0 < x < x_0 + R^{1/\alpha}, R > 0.$$

Burada, $\left({}^{(k)}T_\alpha^{x_0} f\right)(x_0)$ k kez f fonksiyonunun uyumlu kesir türevinin alınması manasınadır.

2.2. Uyumlu kesirli diferansiyel denklemler ve adi nokta civarında çözümleri

Bu bölümde, Ünal ve ark. (2015) tarafından yapılan bazı tanım ve teoremler verilecektir. En genel dizisel lineer homojen uyumlu kesirli diferansiyel denklem

$^{(n)}T_\alpha^a y + a_{n-1}(x)^{(n-1)}T_\alpha^a y + \ldots + a_1(x)T_\alpha^a y + a_0(x)y = 0$
(1)

şeklinde yazılabilir. Burada $^{(n)}T_\alpha^a y$, y fonksiyonuna art arda n kez uyumlu kesir mertebeden türevin uygulanması manasınadır.

Tanım 2.3. $\alpha \in (0,1]$, $f(x)$, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve $x_0 \in [a,b]$ olsun. Bu durumda $N(x_0)$, x_0 ın bir komşuluğu olmak üzere $\nabla x \in N(x_0)$ için $f(x)$ fonksiyonu, $(x-x_0)^\alpha$ nın doğal kuvvetlerinin bir serisi olarak yazılabiliyorsa $f(x)$ fonksiyonuna x_0 noktasında α - analitiktir denir. Yani $f(x)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^{k\alpha} \qquad (c_k \in R)$$

olarak yazılabilir ve $|x-x_0| < \delta$ $(\delta > 0)$ için bu seri mutlak yakınsaktır. Burada δ, serinin yakınsaklık yarıçapıdır.

Tanım 2.4. $\alpha \in (0,1]$, $x_0 \in [a,b]$ ve $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ için $a_k(x)$ fonksiyonları $x_0 \in [a,b]$ noktasında α-analitik olsun. Bu durumda, $x_0 \in [a,b]$ noktasına (1) denkleminin bir α-adi noktası denir. Eğer $x_0 \in [a,b]$ bir α-adi noktası değilse, o zaman bu noktaya α singüler nokta denir.

Örnek 2.1. a) Aşağıdaki uyumlu kesir mertebeden diferansiyel denklemleri göz önüne alalım.

$$T_\alpha y - x^\alpha y = 0$$
$$^2T_\alpha y - 2x^\alpha y = 0$$
$$x^{2\alpha}\ {}^2T_\alpha y - 2x^\alpha T_\alpha y + x^{2\alpha} y = 0$$

Herhangi bir $x = x_0 > 0$ noktası yukarıdaki denklemlerin α-adi noktasıdır.

b)

$$(x-1)^\alpha T_\alpha y - y = 0$$
$$(x-1)^{2\alpha}\ {}^2T_\alpha y - 2(x-1)^\alpha T_\alpha y + (x-1)^{2\alpha} y = 0$$

Bu denklemler için, herhangi bir $x = x_0 > 1$ noktası adi noktadır.

Teorem 2.3. $\alpha \in (0,1]$ ve $x_0 \in [a,b]$

$$T_\alpha^{x_0} T_\alpha^{x_0} y + p(x) T_\alpha^{x_0} y + q(x) y = 0 \qquad (2)$$

denkleminin bir α-adi noktası olsun. O zaman $c_0 = y(x_0)$, $\alpha c_1 = T_\alpha y(x_0)$ başlangıç şartları ile verilen (2) denkleminin $x \in (x_0, x_0+\rho)$ için aşağıdaki gibi bir çözümü vardır:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^{k\alpha}$$

burada $\rho = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ dir. Burada x_0, (2) denkleminin bir α-adi noktası olduğu için, Tanım 3.1 ve Tanım 3.2 den dolayı

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x-x_0)^{k\alpha} \qquad (x \in [x_0, x_0+\delta_1];\ \delta_1 > 0)$$

ve

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x-x_0)^{k\alpha} \qquad (x \in [x_0, x_0+\delta_2];\ \delta_2 > 0)$$

dir.

3. Bulgular

3.1. Uyumlu kesir mertebeden birinci tip Chebyshev diferensiyel denklemi ve kesirsel Chebyshev polinomları

Aşağıdaki uyumlu kesir mertebeden birinci tip Chebyshev diferensiyel denklemini göz önüne alalım:

$$(1-x^{2\alpha})^{(2)}T_\alpha y - \alpha x^\alpha T_\alpha y + \alpha^2 p^2 y = 0 \quad (3)$$

Burada $\alpha \in (0,1]$ ve p bir sabittir. Eğer $\alpha = 1$ olursa, o zaman (3) denklemi klasik birinci tip Chebyshev diferensiyel denklemine dönüşür. $x = 0$ noktası (3) denkleminin bir α-adi noktasıdır. Şimdi Teorem 3.1 gereğince (3) denkleminin aşağıdaki gibi çözümlerini araştıralım:

$$y = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n\alpha}. \qquad (4)$$

(4) denklemi ve (4) denkleminin uyumlu mertebeden kesirli türevleri (3) denkleminde yerine yazılacak olursa

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 c_2 + 6\alpha^2 c_3 x^\alpha - \alpha^2 c_1 x^\alpha + \alpha^2 p^2 c_0 \\ + \alpha^2 p^2 c_1 x^\alpha \\ + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2)\alpha^2 c_{n+2} \\ + (p^2 - n^2)\alpha^2 c_n] x^{n\alpha} = 0 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu durumda

$$2\alpha^2 c_2 + \alpha^2 p^2 c_0 = 0$$

$$6\alpha^2 c_3 + \alpha^2(p^2-1)c_1 = 0$$
$$(n+1)(n+2)\alpha^2 c_{n+2} + (p^2-n^2)\alpha^2 c_n = 0$$

$$c_2 = \frac{-p^2}{2!}c_0$$
$$c_4 = \frac{-p^2(2^2-p^2)}{4!}c_0$$
$$c_6 = \frac{-p^2(2^2-p^2)(4^2-p^2)}{6!}c_0$$
$$\vdots$$
$$c_{2n} = \frac{-p^2(2^2-p^2)(4^2-p^2)\dots((2n-2)^2-p^2)}{(2n)!}c_0$$

yazılır. n tek ise

$$c_3 = \frac{1-p^2}{3!}c_1$$
$$c_5 = \frac{(1-p^2)(3^2-p^2)}{5!}c_1$$
$$c_7 = \frac{(1-p^2)(3^2-p^2)(5^2-p^2)}{7!}c_1$$
$$\vdots$$
$$c_{2n+1} = \frac{(1-p^2)(3^2-p^2)(5^2-p^2)\dots((2n-1)^2-p^2)}{(2n+1)!}c_1$$

elde edilir. Böylece (3) denkleminin çözümü

$$y(x) = c_0 + c_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-p^2(2^2-p^2)(4^2-p^2)\dots((2n-2)^2-p^2)}{(2n)!}x^{2n\alpha} + c_1 x^\alpha + c_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-p^2)(3^2-p^2)(5^2-p^2)\dots((2n-1)^2-p^2)}{(2n+1)!}x^{(2n+1)\alpha}$$

olarak bulunur. Burada c_0 ve c_1 keyfi sayılardır.

$c_0 = 1$ ve $c_1 = 0$ için (3) denkleminin çözümüne $F(x)$ denirse

$$F(x) = 1 + \frac{-p^2}{2!}x^{2\alpha} + \frac{-p^2(2^2-p^2)}{4!}x^{4\alpha} + \frac{-p^2(2^2-p^2)(4^2-p^2)}{6!}x^{6\alpha} + \cdots$$

yazılabilir. Benzer olarak $c_0 = 0$ ve $c_1 = 1$ için (3) denkleminin çözümüne $G(x)$ denirse yazılabilir. Böylece c_n katsayıları için n çift olmak üzere

$$G(x) = x^\alpha + \frac{1-p^2}{3!}x^{3\alpha} + \frac{(1-p^2)(3^2-p^2)}{5!}x^{5\alpha} + \frac{(1-p^2)(3^2-p^2)(5^2-p^2)}{7!}x^{7\alpha} + \cdots.$$

şeklinde ifade edilir. p bir tamsayı olduğu zaman, bu iki fonksiyondan birisi sınırlı sayıda terim içerir. Örneğin, Eğer p çift bir tamsayı ise $F(x)$ fonksiyonu sınırlı sayıda terimden oluşur. Tersine p tek bir tamsayı ise o zaman $G(x)$ fonksiyonu sınırlı sayıda terim içerir. Bu durumda, elde edilen fonksiyon p. dereceden kesirsel polinom olacaktır. Elde edilen bu kesirsel polinomlar yardımıyla p. dereceden kesirsel Chebyshev polinomu;

p çift ise $(Ђ_\alpha)_p(x) = (-1)^{p/2}F(x)$
p tek ise $(Ђ_\alpha)_p(x) = (-1)^{(p-1)/2}pG(x)$

olarak tanımlanır. Birinci tip ilk birkaç kesirsel Chebyshev polinomu

$$(Ђ_\alpha)_0(x) = 1$$
$$(Ђ_\alpha)_1(x) = x^\alpha$$
$$(Ђ_\alpha)_2(x) = -1 + 2x^{2\alpha}$$
$$(Ђ_\alpha)_3(x) = -3x^\alpha + 4x^{3\alpha}$$
$$(Ђ_\alpha)_4(x) = 1 - 8x^{2\alpha} + 8x^{4\alpha}$$
$$(Ђ_\alpha)_5(x) = 5x^\alpha - 20x^{3\alpha} + 16x^{5\alpha}$$
$$(Ђ_\alpha)_6(x) = -1 + 18x^{2\alpha} - 48x^{4\alpha} + 32x^{6\alpha}$$
$$\vdots$$

şeklindedir.

Sonuç 3.1. $Ђ_p(x)$ klasik Chebyshev polinomu olsun. O zaman

$$(Ђ_\alpha)_p(x) = Ђ_p(x^\alpha)$$

dir.

Özellik 3.1.

1. $(Ђ_\alpha)_p(x) = 2x^\alpha(Ђ_\alpha)_{p-1}(x) - (Ђ_\alpha)_{p-2}(x)$, $p = 2,3,\dots$
2. $p \geq 1$ için $(Ђ_\alpha)_p(x)$ deki $x^{p\alpha}$ nın katsayısı 2^{p-1} dir.
3. $0 \leq x \leq 1$ için $(Ђ_\alpha)_p(x) = cos(p.arccos(x^\alpha))$ dir.

4. $p = 2,3, \dots$ için
$$(Ђ_\alpha)_p(x) = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{T_\alpha\big((Ђ_\alpha)_{p+1}(x)\big)}{p+1} - \frac{T_\alpha\big((Ђ_\alpha)_{p-1}(x)\big)}{p-1}\right)$$
5. $2(Ђ_\alpha)_m(x)(Ђ_\alpha)_n(x) = (Ђ_\alpha)_{m+n}(x) + (Ђ_\alpha)_{|m-n|}(x)$
6. Eğer p çift ise $(Ђ_\alpha)_p(x)$, $0 \le x \le 1$ aralığına $\frac{p}{2}$ farklı köke sahiptir ve kökler $k = 1, \dots, \frac{p}{2}$ için $x_k = \left[\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2p}\right)\right]^{1/\alpha}$ şeklindedir.
7. Eğer p tek ise $(Ђ_\alpha)_p(x)$, $0 \le x \le 1$ aralığında $\frac{p+1}{2}$ farklı köke sahiptir. Kökler $k = 1, \dots, \frac{p+1}{2}$ için $x_k = \left[\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2p}\right)\right]^{1/\alpha}$ şeklindedir.
8. Eğer $j, l \in \mathbb{N}$ için $0 < \alpha = \frac{2l+1}{2j+1} \le 1$ ise $(Ђ_\alpha)_p(x)$ $-1 \le x \le 1$ aralığında p tane farklı köke sahiptir. Kökler $k = 1, \dots, p$ için $x_k = \left[\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2p}\right)\right]^{1/\alpha}$ şeklindedir.

İspat: 1) Eğer p bir çift sayı ise $p-1$ tek ve $p-2$ çift sayı olur. Buna göre
$$\begin{aligned}2x^\alpha(Ђ_\alpha)_{p-1}(x) - (Ђ_\alpha)_{p-2}(x) &= 2x^\alpha(p-1)(-1)^{(p-2)/2}G(x) - (-1)^{(p-2)/2}F(x)\\ &= (-1)^{p/2}\left(1 + \frac{-p^2}{2!}x^{2\alpha} + \frac{-p^2(2^2-p^2)}{4!}x^{4\alpha} + \cdots\right)\\ &= (-1)^{p/2}F(x) = (Ђ_\alpha)_p(x)\end{aligned}$$
olduğu görülür. Eğer p bir tek sayı ise $p-1$ çift ve $p-2$ tek sayı olur. Buna göre
$$2x^\alpha(Ђ_\alpha)_{p-1}(x) - (Ђ_\alpha)_{p-2}(x) = 2x^\alpha(-1)^{(p-1)/2}F(x) - (-1)^{(p-3)/2}(p-2)G(x) = (-1)^{(p-1)/2}\left(px^\alpha + \frac{p(1-p^2)}{3!}x^{3\alpha} + \frac{p(1-p^2)(3^2-p^2)}{5!}x^{5\alpha} + \cdots\right) = (-1)^{(p-1)/2}pG(x) = (Ђ_\alpha)_p(x)$$
olduğu görülür.

2) Bu özellik 1. Özellikteki rekürsif bağıntı aracılığıyla görülür. $(Ђ_\alpha)_{p-1}(x)$ nin $2x^\alpha$ ile çarpıldığı düşünülecek olursa verilen özellik ispatlanabilir.

3) Bu özelliğin ispatı için
$$\cos(p\theta) = \cos(2\theta)\cos\big((p-2)\theta\big) - \sin(2\theta)\sin\big((p-2)\theta\big)$$
trigonometrik açılımından faydalanmalıyız. $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ ve $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ yukarıdaki denklemde yerine yazılacak olursa
$$\cos(p\theta) = 2\cos(\theta)\Big(\cos(\theta)\cos\big((p-2)\theta\big) - \sin(\theta)\sin\big((p-2)\theta\big)\Big) - \cos\big((p-2)\theta\big)$$
elde edilir. Bu ifade sadeleştirilecek olursa
$$\cos(p\theta) = 2\cos(\theta)\cos\big((p-1)\theta\big) - \cos\big((p-2)\theta\big)$$
elde edilir. Son olarak, $\theta = \arccos(x^\alpha)$ yazılırsa $0 \le x \le 1$ için
$$2x^\alpha\cos\big((p-1)\arccos(x^\alpha)\big) - \cos\big((p-2)\arccos(x^\alpha)\big) = \cos\big(p.\arccos(x^\alpha)\big) \qquad (5)$$
elde edilir. Eğer $j \in N$ için $0 < \alpha = \frac{1}{2j+1} \le 1$ ise o zaman $-1 \le x \le 1$ için
$$2x^\alpha\cos\big((p-1)\arccos(x^\alpha)\big) - \cos\big((p-2)\arccos(x^\alpha)\big) = \cos\big(p.\arccos(x^\alpha)\big)$$
elde edilir. İlk iki birinci tip Chebyshev polinomları için
$(Ђ_\alpha)_0(x) = \cos\big(0.\arccos(x^\alpha)\big) = 1$ ve
$(Ђ_\alpha)_1(x) = \cos\big(1.\arccos(x^\alpha)\big) = x^\alpha$
olup özellik sağlanır. Şimdi $k = 2,3, \dots p-1$ için
$$(Ђ_\alpha)_k(x) = \cos\big(k.\arccos(x^\alpha)\big)$$
olduğunu varsayalım. (5) denklemi ile 1. Özelliği beraber düşünürsek $0 \le x \le 1$ için
$$\begin{aligned}(Ђ_\alpha)_p(x) &= 2x^\alpha(Ђ_\alpha)_{p-1}(x) - (Ђ_\alpha)_{p-2}(x)\\ &= 2x^\alpha\cos\big((p-1)\arccos(x^\alpha)\big) - \cos\big((p-2)\arccos(x^\alpha)\big)\\ &= \cos\big(p.\arccos(x^\alpha)\big)\end{aligned}$$
yazılır. Eğer $j \in \mathbb{N}$ için $0 < \alpha = \frac{1}{2j+1} \le 1$ ise o zaman $-1 \le x \le 1$
$$(Ђ_\alpha)_p(x) = \cos\big(p.\arccos(x^\alpha)\big)$$
yazılabilir.

4) $\theta = \arccos(x^\alpha)$ olmak üzere
$$\frac{T_\alpha\big((Ђ_\alpha)_{p+1}(x)\big)}{p+1} = \alpha\frac{\sin((p+1)\theta)}{\sin\theta} \quad \text{ve} \quad \frac{T_\alpha\big((Ђ_\alpha)_{p-1}(x)\big)}{p-1} = \alpha\frac{\sin((p-1)\theta)}{\sin\theta}$$

dir.

$$\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{T_\alpha\left((Ђ_\alpha)_{p+1}(x)\right)}{p+1}-\frac{T_\alpha\left((Ђ_\alpha)_{p-1}(x)\right)}{p-1}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{sin((p+1)\theta)}{sin\theta}-\frac{sin((p-1)\theta)}{sin\theta}\right)=cosp\theta=(Ђ_\alpha)_p(x)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

5) $2cosm\theta cosn\theta = cos\big((m+n)\theta\big)+cos\big((m-n)\theta\big)$ yardımıyla sonuç görülür.

6)

$$(Ђ_\alpha)_p(x)= cos\big(p.arccos(x^\alpha)\big)=0$$

$$p.arccos(x^\alpha)=\frac{(2k-1)\pi}{2}$$

$$arccos(x^\alpha)=\frac{(2k-1)\pi}{2p}$$

$$x^\alpha=cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2p}\right)$$

$$x=\left(cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2p}\right)\right)^{1/\alpha}$$

elde edilir. Eğer p çift ise, $k=1,\dots,\frac{p}{2}$ için

$$cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2p}\right)\geq 0$$

olur. Böylece, $0\leq x\leq 1$ aralığında $\frac{p}{2}$ tane farklı kök vardır.

7) Eğer p tek ise, $k=1,\dots,\frac{p+1}{2}$ için

$$cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2p}\right)\geq 0$$

olur. Böylece, $0\leq x\leq 1$ aralığında $\frac{p+1}{2}$ tane farklı kök vardır.

8) Eğer $j,l\in\mathbb{N}$ için $0<\alpha=\frac{2l+1}{2j+1}\leq 1$ ise, $k=1,\dots,p$ için

$$-1\leq cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2p}\right)\leq 1$$

olup $-1\leq x\leq 1$ aralığında p tane farklı kök oluşur.

3.2. Uyumlu kesir mertebeden ikinci tip Chebyshev diferensiyel denklemi ve kesirsel Chebyshev polinomları

Aşağıdaki uyumlu kesir mertebeden ikinci tip Chebyshev diferensiyel denklemini göz önüne alalım:

$$(1-x^{2\alpha})^{(2)}T_\alpha y-3\alpha x^\alpha T_\alpha y+\alpha^2p(p+2)y=0 \qquad (6)$$

Burada $\alpha\in(0,1]$ ve p bir sabittir. Eğer $\alpha=1$ olursa, o zaman (6) denklemi klasik ikinci tip Chebyshev diferensiyel denklemine dönüşür. $x=0$ noktası (6) denkleminin bir α-adi noktasıdır. Şimdi Teorem 3.1 gereğince (6) denkleminin (4) deki gibi çözümlerini araştıralım. (4) denklemi ve (4) denkleminin uyumlu mertebeden kesirli türevleri (6) denkleminde yerine yazılacak olursa

$$\begin{aligned}2\alpha^2c_2+6\alpha^2c_3x^\alpha-3\alpha^2c_1x^\alpha+\alpha^2p(p+2)c_0\\+\alpha^2p(p+2)c_1x^\alpha\\+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)(n+2)\alpha^2c_{n+2}\\+(p(p+2)-n(n\\+2))\alpha^2c_n]x^{n\alpha}=0\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu durumda

$$2\alpha^2c_2+\alpha^2p(p+2)c_0=0$$

$$6\alpha^2c_3+\alpha^2(p+3)(p-1)c_1=0$$

$$(n+1)(n+2)\alpha^2c_{n+2}+(p(p+2)-n(n+2))\alpha^2c_n=0$$

yazılabilir. Böylece c_n katsayıları için n çift olmak üzere

$$c_2=\frac{-p(p+2)}{2!}c_0$$

$$c_4=\frac{-p(p+2)(2.4-p(p+2))}{4!}c_0$$

$$c_6=\frac{-p(p+2)(2.4-p(p+2))(4.6-p(p+2))}{6!}c_0$$

.
.
.

$$c_{2n}=\frac{-p(p+2)(2.4-p(p+2))(4.6-p(p+2))\dots((2n-2)2n-p(p+2))}{(2n)!}c_0$$

yazılır. n tek ise

$$c_3=\frac{\big(1.3-p(p+2)\big)}{3!}c_1$$

$$c_5=\frac{\big(1.3-p(p+2)\big)\big(3.5-p(p+2)\big)}{5!}c_1$$

$$c_7=\frac{\big(1.3-p(p+2)\big)\big(3.5-p(p+2)\big)\big(5.7-p(p+2)\big)}{7!}c_1$$

.
.
.

$$c_{2n+1}=\frac{\big(1.3-p(p+2)\big)\big(3.5-p(p+2)\big)\big(5.7-p(p+2)\big)\dots\big((2n-1)(2n+1)-p(p+2)\big)}{(2n+1)!}c_1$$

elde edilir. Böylece (5) denkleminin çözümü

$$y(x) = c_0 + c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-p(p+2)(2.4-p(p+2))(4.6-p(p+2))\ldots((2n-2)2n-p(p+2))}{(2n)!} x^{2n\alpha} + c_1 x^{\alpha} + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1.3-p(p+2))(3.5-p(p+2))(5.7-p(p+2))\ldots((2n-1)(2n+1)-p(p+2))}{(2n+1)!} x^{(2n+1)\alpha}$$

olarak bulunur. Burada c_0 ve c_1 keyfi sayılardır. $c_0 = 1$ ve $c_1 = 0$ için (6) denkleminin çözümüne $F(x)$ denirse

$$F(x) = 1 + \frac{-p(p+2)}{2!} x^{2\alpha} + \frac{-p(p+2)(2.4-p(p+2))}{4!} x^{4\alpha} + \frac{-p(p+2)(2.4-p(p+2))(4.6-p(p+2))}{6!} x^{6\alpha} + \cdots$$

yazılabilir. Benzer olarak $c_0 = 0$ ve $c_1 = 2$ için (6) denkleminin çözümüne $G(x)$ denirse

$$G(x) = 2x^{\alpha} + \frac{2(1.3-p(p+2))}{3!} x^{3\alpha} + \frac{2(1.3-p(p+2))(3.5-p(p+2))}{5!} x^{5\alpha} + \frac{2(1.3-p(p+2))(3.5-p(p+2))(5.7-p(p+2))}{7!} x^{7\alpha} + \cdots$$

şeklinde ifade edilir. p bir tamsayı olduğu zaman, bu iki fonksiyondan birisi sınırlı sayıda terim içerir. Örneğin, Eğer p çift bir tamsayı ise $F(x)$ fonksiyonu sınırlı sayıda terimden oluşur. Tersine p tek bir tamsayı ise o zaman $G(x)$ fonksiyonu sınırlı sayıda terim içerir. Bu durumda, elde edilen fonksiyon p. dereceden kesirsel polinom olacaktır. Elde edilen bu kesirsel polinomlar yardımıyla p. dereceden kesirsel ikinci tip Chebyshev polinomu;

p çift ise $(U_\alpha)_p(x) = (-1)^{p/2} F(x)$

p tek ise $(U_\alpha)_p(x) = (-1)^{(p-1)/2} \left(\frac{p+1}{2}\right) G(x)$

olarak tanımlanır. İkinci tip ilk birkaç kesirsel Chebyshev polinomu

$$(U_\alpha)_0(x) = 1$$
$$(U_\alpha)_1(x) = 2x^{\alpha}$$
$$(U_\alpha)_2(x) = -1 + 4x^{2\alpha}$$
$$(U_\alpha)_3(x) = -4x^{\alpha} + 8x^{3\alpha}$$
$$(U_\alpha)_4(x) = 1 - 12x^{2\alpha} + 16x^{4\alpha}$$
$$(U_\alpha)_5(x) = 6x^{\alpha} - 32x^{3\alpha} + 32x^{5\alpha}$$
$$(U_\alpha)_6(x) = -1 + 24x^{2\alpha} - 80x^{4\alpha} + 64x^{6\alpha}$$

.

.

.

şeklindedir.

Sonuç 3.2. $U_p(x)$ klasik ikinci tip Chebyshev polinomu olsun. O zaman

$$(U_\alpha)_p(x) = U_p(x^{\alpha})$$

dir.

Özellik 3.2.

1. $p = 2,3,\ldots$ için $(U_\alpha)_p(x) = 2x^{\alpha}(U_\alpha)_{p-1}(x) - (U_\alpha)_{p-2}(x)$,
2. $0 \le x \le 1$ için $\theta = arccos x^{\alpha}$ olmak üzere $(U_\alpha)_p(x) = \frac{sin((p+1)\theta)}{sin(\theta)}$ dır.
3. $p = 1,2,3,\ldots$ için $(\text{Ђ}_\alpha)_{p+1}(x) = x^{\alpha}(\text{Ђ}_\alpha)_p(x) - (1 - x^{2\alpha})(U_\alpha)_{p-1}(x)$
4. $p = 1,2,3,\ldots$ için $T_\alpha\left((\text{Ђ}_\alpha)_p(x)\right) = \alpha p (U_\alpha)_{p-1}(x)$
5. $p = 1,2,3,\ldots$ için $(\text{Ђ}_\alpha)_p(x) = (U_\alpha)_p(x) - x^{\alpha}(U_\alpha)_{p-1}(x)$
6. $p = 2,3,\ldots$ için $(\text{Ђ}_\alpha)_p(x) = \frac{1}{2}\left((U_\alpha)_p(x) - (U_\alpha)_{p-2}(x)\right)$
7. Eğer p çift ise $(U_\alpha)_p(x)$, $0 \le x \le 1$ aralığına $\frac{p}{2}$ farklı köke sahiptir ve kökler $k = 1,\ldots,\frac{p}{2}$ için $x_k = \left[cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)\right]^{1/\alpha}$ şeklindedir.
8. Eğer p tek ise $(U_\alpha)_p(x)$, $0 \le x \le 1$ aralığında $\frac{p+1}{2}$ farklı köke sahiptir. Kökler $k = 1,\ldots,\frac{p+1}{2}$ için $x_k = \left[cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)\right]^{1/\alpha}$ şeklindedir.
9. Eğer $j, l \in \mathbb{N}$ için $0 < \alpha = \frac{2l+1}{2j+1} \le 1$ ise $(U_\alpha)_p(x)$ $-1 \le x \le 1$ aralığında p tane farklı köke sahiptir. Kökler $k = 1,\ldots,p$ için $x_k = \left[cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)\right]^{1/\alpha}$ şeklindedir.

İspat: 1) Özellik 4.1 in 1.şıkkının ispatında yapılanlara benzer olarak ispatlanabilir.

2) Bu özelliğin ispatı için

$$sin\big((p+1)\theta\big) = 2cos(\theta)sin(p\theta) - sin\big((p-1)\theta\big)$$

trigonometrik açılımından faydalanılır.

Her iki tarafı $sin(\theta)$ ile bölünürse

$$\frac{sin\big((p+1)\theta\big)}{sin(\theta)} = 2cos(\theta)\frac{sin(p\theta)}{sin(\theta)} - \frac{sin\big((p-1)\theta\big)}{sin(\theta)}$$

olur. Son olarak $\theta = arccos(x^\alpha)$ yerine yazılırsa $0 \le x \le 1$ için

$$\frac{sin\big((p+1)arccos(x^\alpha)\big)}{sin\big(arccos(x^\alpha)\big)} = 2x^\alpha \frac{sin\big(parccos(x^\alpha)\big)}{sin\big(arccos(x^\alpha)\big)} - \frac{sin\big((p-1)arccos(x^\alpha)\big)}{sin\big(arccos(x^\alpha)\big)}$$

elde edilir. Eğer $j \in N$ için $0 < \alpha = \frac{1}{2j+1} \le 1$ ise o zaman $-1 \le x \le 1$ için

$$\frac{sin\big((p+1)arccos(x^\alpha)\big)}{sin\big(arccos(x^\alpha)\big)} = 2x^\alpha \frac{sin\big(parccos(x^\alpha)\big)}{sin\big(arccos(x^\alpha)\big)} - \frac{sin\big((p-1)arccos(x^\alpha)\big)}{sin\big(arccos(x^\alpha)\big)}$$

yazılabilir. İlk iki ikinci tip Chebyshev polinomları için

$(U_\alpha)_0(x) = \frac{sin(\theta)}{sin(\theta)} = 1$ ve $(U_\alpha)_1(x) = \frac{sin(2\theta)}{sin(\theta)} = 2x^\alpha$

olup özellik sağlanır. Şimdi $k = 2,3,\dots p-1$ için $(U_\alpha)_k(x) = cos\big(k.arccos(x^\alpha)\big)$

olduğunu varsayılsın. (9) denklemi ile 1. Özelliği beraber düşünülürse $0 \le x \le 1$ için

$$\begin{aligned}(U_\alpha)_p(x) &= 2x^\alpha (U_\alpha)_{k-1}(x) - (U_\alpha)_{k-2}(x)\\ &= 2x^\alpha \tfrac{sin(p\theta)}{sin(\theta)} - \tfrac{sin((p-1)\theta)}{sin(\theta)}\\ &= 2cos(\theta)\tfrac{sin(p\theta)}{sin(\theta)} - \tfrac{sin((p-1)\theta)}{sin(\theta)}\\ &= \frac{sin\big((p+1)\theta\big)}{sin(\theta)}\end{aligned}$$

yazılır. Eğer $j \in \mathbb{N}$ için $0 < \alpha = \frac{1}{2j+1} \le 1$ ise o zaman $-1 \le x \le 1$

$$(U_\alpha)_p(x) = \frac{sin\big((p+1)\theta\big)}{sin(\theta)}$$

yazılabilir.

3) $\theta = arccos(x^\alpha)$ için $(Ъ_\alpha)_p(x) = cos(p\theta)$, $(U_\alpha)_{p-1}(x) = \frac{sin(p\theta)}{sin(\theta)}$ ve $1 - x^{2\alpha} = sin^2(\theta)$ dir. Bu sonuçlar için

$$\begin{aligned}x^\alpha (Ъ_\alpha)_p(x) - (1 - x^{2\alpha})(U_\alpha)_{p-1}(x) &= cos(\theta)cos(p\theta) - sin(\theta)sin(p\theta)\\ &= cos\big((p+1)\theta\big) = (Ъ_\alpha)_{p+1}(x)\end{aligned}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

4) $\theta = arccos(x^\alpha)$ olmak üzere

$$T_\alpha\left(Ъ_p(x)\right) = \alpha p \frac{sin(p\theta)}{sin(\theta)} = \alpha p (U_\alpha)_{p-1}(x)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

5) Trigonometric formüllere göre

$$cos(p\theta) = sin\big((p+1)\theta\big)sin(\theta) + cos\big((p+1)\theta\big)cos(\theta)$$

yazılabilir.

$\cos\big((p+1)\theta\big) = \cos(p\theta)\cos(\theta) - \sin(p\theta)\sin(\theta)$

açılımı yardımıyla

$cos(p\theta) = sin\big((p+1)\theta\big)sin(\theta) - sin(p\theta)sin(\theta)cos(\theta) + cos(p\theta)cos^2(\theta)$

yazılır. Buradan da

$$cos(p\theta) = \frac{sin((p+1)\theta)}{sin(\theta)} - \frac{sin(p\theta)}{sin(\theta)}cos(\theta) \qquad (7)$$

olduğu görülür. $cos(\theta) = x^\alpha$ olduğu da göz önüne alınırsa

$$(Ъ_\alpha)_p(x) = (U_\alpha)_p(x) - x^\alpha (U_\alpha)_{p-1}(x)$$

sonucuna ulaşılır.

6) 5. Özellikteki (7) denkleminde $sin(p\theta)cos(\theta)$ ifadesi için trigonometrik çarpım formülünden yararlanılarak ispat tamamlanır.

7)

$$(U_\alpha)_p(x) = \frac{sin\big((p+1)arccos(x^\alpha)\big)}{sin\big(arccos(x^\alpha)\big)} = 0$$

$$(p+1)arccos(x^\alpha) = k\pi$$

$$arccos(x^\alpha) = \frac{k\pi}{p+1}$$

$$x^\alpha = cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)$$

$$x = \left(cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)\right)^{1/\alpha}$$

elde edilir. Eğer p çift ise, $k = 1, \dots, \frac{p}{2}$ için

$$cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) \geq 0$$

olur. Böylece, $0 \leq x \leq 1$ aralığında $\frac{p}{2}$ tane farklı kök vardır.

8) Eğer p tek ise, $k = 1, \ldots, \frac{p+1}{2}$ için

$$cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) \geq 0$$

olur. Böylece, $0 \leq x \leq 1$ aralığında $\frac{p+1}{2}$ tane farklı kök vardır.

9) Eğer $j, l \in \mathbb{N}$ için $0 < \alpha = \frac{2l+1}{2j+1} \leq 1$ ise, $k = 0,1, \ldots, p-1$ için

$$-1 \leq cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) \leq 1$$

olup $-1 \leq x \leq 1$ aralığında p tane farklı kök oluşur.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, uyumlu kesir mertebeli birinci ve ikinci tip Chebyshev diferensiyel denklemleri çözülerek birinci ve ikinci tip kesirsel Chebyshev polinomları elde edilmiştir. Buna ek olarak birinci ve ikinci tip kesirsel Chebyshev polinomlarının bazı özellikleri sunulmuştur. Bu çalışmada uyumlu kesir mertebeden türev yardımıyla elde edilen sonuçların klasik türev yardımıyla elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görülmüştür.

Kaynaklar

Bayın, Ş. S., 2004. Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler, Ders Kitapları A.Ş.

Kilbas, A., Srivastava, H. and Trujillo, J., 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland, New York.

Miller, K.S., 1993. An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, J. Wiley and Sons, New York.

Podlubny, I., 1999. Fractional Differential Equations, Academic Press, USA.

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababheh, M., 2014. A new Definition of Fractional Derivative, J. Comput. Appl. Math., **264**, 65-70.

Abdeljawad, T., 2015. On conformable fractional calculus, J. Comput. Appl. Math., **279**, 57-66.

Khalil, R., 2014. Fractional Fourier Series with Applications, *American Journal of Computational and Applied Mathematics,* **4.6,** 187-191.

Khalil, R. and Abu Hammad, M., 2014. Legendre fractional differential equation and Legendre fractional polynomials, International Journal of Applied Mathematical Research, **3.3**, 214-219.

Gökdoğan, A., Ünal, E. and Çelik, E., 2016. Existence and Uniqueness Theorems for Sequential Linear Conformable Fractional Differential Equations, *to appear, Miskolc Mathematical Notes.*

Gökdoğan, A., Ünal, E. and Çelik, E., 2015. Conformable Fractional Bessel Equation and Bessel Functions, *arXiv preprint arXiv:1506.07382*.

Ünal, E., Gökdoğan, A. and Çelik, E., 2015. Solutions of Sequential Conformable Fractional Differential Equations around an Ordinary Point and Conformable Fractional Hermite Differential Equation, British Journal of Applied Science & Technology, **10(2)**, 1-11.