Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **17** (2017) **031302** (906-913) AKU J. Sci. Eng. **17** (2017) **031302** (906-913)

DOİ: 10.5578/fmbd.66268

3-Boyutlu Matrislerde Norm Eşitsizlikleri ve Uygulamaları

Burhaneddin İzgi[1], Murat Özkaya[2]

İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul.

e-posta: [1]bizgi@itu.edu.tr, [2]ozkaya16@itu.edu.tr

Geliş Tarihi: 16.05.2017 ; Kabul Tarihi: 12.12.2017

Anahtar kelimeler

3-Boyutlu Matrisler; 3-Boyutlu Matrislerde Çarpma İşlemi; 3-Boyutlu Matris Norm Eşitsizlikleri

Özet

Bu çalışmada ilk olarak 3-boyutlu matrislerde çarpma işlemi, 2-boyutlu matrislerdeki çarpma işlemine benzer şekilde tanımlanmıştır. Daha sonra, 3-boyutlu matrislerdeki norm eşitsizlikleri elde edilmiş ve bu eşitsizlikler ispatlanmıştır. Ayrıca tanımlanan eşitsizliklerin kullanışlılığı simülasyonlar yardımıyla elde edilmiş veriler ve gerçek veriler kullanılarak oluşturulmuş 3-boyutlu matrisler için ayrı ayrı hesaplanan norm değerleri yardımıyla gösterilmiştir.

Norm Inequalities and Applications in 3-Dimesional Matrices

Keywords

3-Dimensional Matrices; 3-Dimesional Matrix Product; 3-Dimesional Matrix Norms Inequalities

Abstract

In this paper, we first define 3-dimensional matrix product as it is defined for 2-dimensional matrices. Moreover, we present norm inequalities for 3-dimensional matrices and prove them. Furthermore, the usefulness of these inequalities is presented for 3-dimensional matrices obtain from simulations and real data applications.

1. Giriş

Matris normları matematikten, mühendisliğe, istatistikten, fiziğe kullanılması oldukça yaygın olan araçlardan biridir. Matris normları, bir dikdörtgensel matrisin, örneğin m x n boyutlu bir matris için, içindeki m.n tane sayıyı kullanılan norma özgü tek bir sayı haline getirerek verilerin yorumlanmasını kolaylaştıran bir fonksiyondur. Matris norm eşitsizlikleri ise bu normlara özgü sayılar arasındaki ilişkileri bize vermektedir. Geçmişten günümüze kadar bu normlar çeşitli alanlarda kullanılmıştır. Literatürdeki bazı örneklerden kısaca bahsetmek gerekirse örneğin, Zielke (1988) çalışmasında matris normları ve matrisleri koşul sayıları arasında ilişkileri göstermiştir. Li (1998) ise Frobenius normunu, Hermitian matrislerinin özdeğer problemleri için bağıl öteleme teoremlerinde kullanmıştır. Wilkinson'ın 2005 yılında yayınlanan bir çalışmasında gürültü varyanslarına iki farklı sınır bulmak için 2-normunu kullandığını ifade etmiştir. De Maio ve Carotenuto 2013 yılındaki ortak çalışmalarında, Hermitian matrisinin Frobenius norm veya spektral normlarından birini içeren iki maliyet fonksiyonunu ele aldıkları görülmektedir. Bu maliyet fonksiyonlarının optimalitelerini bu iki matris normunu kullanarak ispatlamışlardır. Öte yandan 2015'te Whitaker ve Anderson'nun çalışmasında ise matris normları seyrek kodlama yöntemiyle anormal özelliklerin öğretilmesinde kullanılmıştır. Günümüzde ise matris normlarının kullanımı yeni yeni 2-boyuttan 3-boyuta taşınarak kullanılmaya başlanmıştır. İzgi (2015)'nin çalışmasında 3-boyutlu matris normlarının tanım ve ispatlarının yanı sıra, matematiksel finanstaki uygulanışı stokastik diferansiyel denklemler yardımıyla kapsamlı bir şekilde göstermiştir. Ayrıca, Duran ve İzgi'nin 2015 yılında yazmış oldukları makalede de görüleceği üzere 3-boyutlu matris normlarının kullanışlılığı gerçek veriler kullanılarak yapılan analiz ve simülasyonlar ışığı altında da gösterilmiştir. Her ne kadar 3-boyutlu matris normlarıyla ilgili çalışmalar, Duran ve İzgi (2014, 2015) ve İzgi (2015)'nin çalışmalarında karşımıza çıksa da, 3-boyutlu matris normlarının eşitsizliğiyle ilgili literatürde bildiğimiz kadarıyla herhangi bir çalışma yapılmış bulunmamaktadır. Bu eksikliği mümkün olduğu kadarıyla tamamlamak için makalemizde bu problem ele alınmıştır. Ele almış olduğumuz problemin bu yönüyle de oldukça önemli olduğu kanaatini taşımaktayız. Bu nedenle ilk olarak eşitsizliklerin ispatlarında kullanılacağı için, 3-boyutlu matrislerde çarpma işlemi, 2-boyutlu matrislerdeki çarpma işlemine benzer şekilde tanımlanacaktır. Daha sonra 3-boyutlu matrislerdeki norm eşitsizlikleri ispatlanacaktır.

Çalışmanın devam eden kısımları şu şekilde sıralanmaktadır. Bölüm 1.1'de tanımlar, Bölüm 2'de 3-boyutlu matrislerde çarpma işlemi ve 3-boyutlu matrislerdeki norm eşitsizlikleri, Bölüm 3'te de uygulamalar ve sonuçlar kısmı yer almaktadır. Ekler kısmında ise bazı norm eşitsizliklerin ispatları mevcuttur.

1.1. 3-Boyutlu Matris Normları

İlk olarak, 3-boyutlu matrisler için Duran ve İzgi'nin (2015) çalışmalarında verilmiş olan tanım ve önsavlardan kısaca bahsedilecektir.

Tanım: 3-Boyutlu matris normu, $\|\cdot\|_{m\times n\times s}$ kompleks değerli matrislerden reel sayılara olan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur:

- $\|A\|\geq 0$ ve $\|A\|= 0$ ancak ve ancak $A=0$;
- $\|\alpha A\|=|\alpha|.\|A\|$, α bir skaler olmak üzere
- $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$; A ve B $mxnxs$ boyutlu matrisler olmak üzere.

Tanım: A 3-boyutlu kompleks değerli bir matris olmak üzere yani $A\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$ için A'nın 1-normu ve ∞-normu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$\|A\|_1= \max\limits_{1\leq j\leq n}\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}^{(k)}|$ = En büyük mutlak sütun bloğu toplamı.

$\|A\|_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq m}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$ = En büyük mutlak satır bloğu toplamı.

Önsav. $A\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$ olsun. $\|A\|_1$ ve $\|A\|_\infty$ birer normdur.

Tanım. $A\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$'nın p-normu aşağıdaki gibidir:

$$\|A\|_p=\left(\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ 1<p<\infty$$

Önsav. $A\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$ olsun. $\|A\|_p$ bir normdur.

Tanım. $A\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$ olsun. A'nın Frobenius normu aşağıdaki gibidir:

$$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}^{(k)}|^2}$$

Tanım. $A\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$ ve $\left(A^k\right)^*$ da k. kesitteki matrisin eşlenik transpozesini belirtsin. λ_{max}^k bütün k değerleri için $\left(A^k\right)^*A^k$ 'nın en büyük özdeğeri olmak üzere, A'nın 2-normu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\|A\|_2=\max_{k=1,\dots,s}\left(\max_{\|x\|_2=1}\left\|A^{(k)}x\right\|_2\right)=\sqrt{\lambda_{max}^k}$$

Ayrıca, $\lambda_{max}^k=\left(\max\left|\left(A^k\right)^*A^k-\lambda_k I\right|=0\right)$ olmak üzere, $\|A\|_2^2=\max\limits_k\left(\lambda_{max}^k\right)$ şeklinde de tanımlanabilir.

Önsav. $A\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$ olsun. $\|A\|_2$ bir normdur.

2. 3-Boyutlu Matrislerde Çarpma İşlemi ve Norm Eşitsizlikleri

3-boyutlu matris normlarının ispatlanmasında kullanılmak üzere öncelikle 3-boyutlu matrislerde çarpma işlemini aşağıdaki gibi tanımlayacağız.

Tanım. $A\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$ ve $B\epsilon\mathbb{C}^{nxpxs}$ 3-boyutlu matrislerinin çarpımı şeklinde tanımlanan $C=AB$ matrisi, girdileri $c_{ij}^k=\sum_{t=1}^{n}a_{it}^k b_{tj}^k$ olan 3-boyutlu $C\epsilon\mathbb{C}^{mxpxs}$ bir matristir.

2.1. 3-Boyutlu Matris Norm Eşitsizlikleri

$A\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$ olmak üzere, 3-boyutlu matris norm eşitsizlikleri aşağıdaki gibidir:

- $\frac{1}{s\sqrt{n}}\|A\|_\infty\leq\|A\|_2\leq s\sqrt{m}\|A\|_\infty$ (1)
- $\frac{1}{s\sqrt{m}}\|A\|_1\leq\|A\|_2\leq s\sqrt{n}\|A\|_1$ (2)
- $\frac{1}{s\sqrt{n}}\|A\|_\infty\leq\|A\|_F\leq s\sqrt{m}\|A\|_\infty$ (3)
- $\frac{1}{ms^2}\|A\|_1\leq\|A\|_\infty\leq ns^2\|A\|_1$ (4)
- $\frac{1}{s\sqrt{m}}\|A\|_1\leq\|A\|_F\leq s\sqrt{n}\|A\|_1$ (5)
- $\frac{1}{\sqrt{r_2r_3}}\|A\|_2\leq\|A\|_F\leq\sqrt{r_1r_3}\|A\|_2$ (6)

$r_1=\min(m,s),\ r_2=\min(n,s),\ r_3\leq s$

Genel olarak ispatlar, 2-boyutlu matris norm eşitsizliklerinin ispatlarında kullanılan yaklaşıma benzer olarak yapılacaktır. Bazı kaynaklarda nasıl ki 2-boyutlu matris norm eşitsizliklerinin ispatları, 2-boyutlu matrislerin vektörlere indirgenmesi yardımıyla yapılıyorsa, buradaki ispatlar da benzer yaklaşımla 3-boyutlu matrislerin 2-boyutlu matrislere indirgenmesiyle yapılacaktır. Herhangi bir 3-boyutlu $M\epsilon\mathbb{C}^{kx1xp}$ matrisinin, 2-boyutlu bir matris olarak $M\epsilon\mathbb{C}^{kxp}$ gibi davrandığı düşünülebilir. Bu amaçla ilk olarak 3-boyutlu matrisler, çarpma işlemi altında 2-boyutlu matrislere indirgenip daha önceden 2-boyutlu matris normları için bilinen matris norm eşitsizlikleri de kullanılarak kanıtlar yapılmıştır (Golub ve Val Loan 1996). Ayrıca, burada sadece (1) , (2) ve (6) numaralı eşitsizliklerin ispatları verilecektir. Ortaya koyduğumuz diğer eşitsizliklerin benzer şekildeki kanıtları ise Ekler kısmında sunulmuştur.

Aşağıdaki ispatların tümünde $A\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$, $\mathrm{x}\epsilon\mathbb{C}^{nx1xs}$, $\mathrm{y}\epsilon\mathbb{C}^{sx1}$, $Ax\epsilon\mathbb{C}^{mx1xs}$ ve $Axy\epsilon\mathbb{C}^{mx1}$ olmak üzere, ispatlar yapılmıştır.

İspat.(1) $v\epsilon\mathbb{C}^{n}$ bir vektör ve $M\epsilon\mathbb{C}^{mxn}$ 2-boyutlu bir matris olmak üzere,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|M\|_\infty \leq \|M\|_2 \leq \sqrt{m}\|M\|_\infty$$

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty$$

olduğu bilinmektedir. Bu eşitsizlikler ispat içerisinde gerekli düzenlemeler yapılarak kullanılacaktır.

$$\|A\|_\infty = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup_{x\neq 0}\left(\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\|y\|_\infty}}{\|x\|_\infty}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\|x\|_\infty\,\|y\|_\infty}\right);\ Axy\epsilon\mathbb{C}^{mx1}$$

$\|y\|_2 \leq \sqrt{s}\|y\|_\infty$ ve $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$kullanılarak;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}}\frac{\|y\|_2}{\sqrt{s}}}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\cdot\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\|x\|_2\,\|y\|_2}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\|y\|_2}}{\|x\|_2}\right)$$

öte yandan $\|y\|_\infty \leq \|y\|_2$ olduğundan;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\|y\|_\infty}}{\|x\|_2}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\cdot\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_2}\right)$$

ve $\|Ax\|_\infty \leq \sqrt{s}\|Ax\|_2$ olduğundan;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\cdot\sqrt{s}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right)$$

$$= s\sqrt{n}\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = s\sqrt{n}\,\|A\|_2 \text{ olur.}$$

Bunun sonucunda, $\|A\|_\infty \leq s\sqrt{n}\|A\|_2$ eşitsizliği elde eldilir.

Diğer taraftan $\|A\|_2$ için bir üst sınır bulmak için,

$$\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x\neq 0}\left(\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\|y\|_2}}{\|x\|_2}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\|x\|_2\,\|y\|_2}\right);\ \mathrm{Axy}\epsilon\mathbb{C}^{\mathrm{mx1}}$$

$\|y\|_\infty \leq \|y\|_2$ ve $\|x\|_\infty \leq \sqrt{s}\|x\|_2$ eşitsizliklerini kullanarak;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\frac{\|x\|_\infty}{\sqrt{s}}\|y\|_\infty}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{s}\cdot\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\|x\|_\infty\,\|y\|_\infty}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{s}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\|y\|_\infty}}{\|x\|_\infty}\right)$$

$\|y\|_2 \leq \sqrt{s}\|y\|_\infty$ olduğu için;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{s}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\frac{\|y\|_2}{\sqrt{s}}}}{\|x\|_\infty}\right) = \sup_{x\neq 0}\left(s\,\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\|y\|_2}}{\|x\|_\infty}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(s\cdot\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_\infty}\right)$$

ayrıca $\|Ax\|_2 \leq \sqrt{m}\|Ax\|_\infty$ olduğundan;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(s\cdot\sqrt{m}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}\right) = s\sqrt{m}\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

$$= s\sqrt{m}\|A\|_\infty \text{ olur.}$$

Böylece, $\|A\|_2 \leq s\sqrt{m}\|A\|_\infty$ eşitsizliğine ulaşılır.

Sonuç olarak elde etmiş olduğumuz bu iki eşitsizliği birleştirirsek, $\frac{1}{s\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq s\sqrt{m}\|A\|_\infty$ elde edilir. ■

İspat (2) $v\epsilon\mathbb{C}^{n}$ bir vektör ve $M\epsilon\mathbb{C}^{mxn}$ 2-boyutlu bir matris olmak üzere,

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|M\|_1 \leq \|M\|_2 \leq \sqrt{n}\|M\|_1$$
$$\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq \sqrt{v}\|y\|_2$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizlikler de dikkate alınarak;

$$\|A\|_1 = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_1}{\|x\|_1\,\|y\|_1}\right)$$

$\|x\|_2 \leq \sqrt{s}\|x\|_1$ ve $\|y\|_2 \leq \|y\|_1$olduğundan;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{s}\cdot\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_1}{\|x\|_2\,\|y\|_2}\right)$$

ve $\|y\|_1 \leq \sqrt{n}\|y\|_2$ olduğunu biliyoruz;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{s}\sqrt{s}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_1}{\|y\|_1}}{\|x\|_2}\right) = \sup_{x\neq 0}\left(\mathrm{s}\cdot\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_2}\right)$$

son olarak $\frac{1}{\sqrt{m}}\|Ax\|_1 \leq \|Ax\|_2$ kullanıldığında;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\mathrm{s}\sqrt{m}\cdot\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right)s\sqrt{m}\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$
$$= s\sqrt{m}\|A\|_2 \text{ olur.}$$

Böylece, $\|A\|_1 \leq s\sqrt{m}\|A\|_2$ elde edilir. Öte yandan bir üst sınır bulmak amacıyla,

$$\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\|x\|_2\,\|y\|_2}\right)$$

$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2\ ve\ \|y\|_1 \leq \sqrt{s}\|y\|_2$ olduğundan;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{sn}\cdot\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\|x\|_1\,\|y\|_1}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{sn}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\|y\|_1}}{\|x\|_1}\right)$$

$\|y\|_2 \leq \|y\|_1$ eşitsizliğiyle;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{sn}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\|y\|_2}}{\|x\|_1}\right) = \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{sn}\cdot\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}\right)$$

ve $\|Ax\|_2 \leq \sqrt{s}\|Ax\|_1$ eşitsizliği kullanılarak;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{s}\sqrt{sn}\cdot\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\right) = s\sqrt{n}\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$$
$$= s\sqrt{n}\|A\|_1 \text{ olur.}$$

İşlemler sonucunda elde edilen eşitsizlikleri birleştirirsek, $\frac{1}{s\sqrt{m}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq s\sqrt{n}\|A\|_1$ olur. ■

İspat (6). $v\epsilon\mathbb{C}^n$ bir vektör ve $M\epsilon\mathbb{C}^{mxn}$ 2-boyutlu bir matris r_M=Rank(M) olmak üzere,

$$\|M\|_2 \leq \|M\|_F \leq \sqrt{r_M}\|M\|_2$$
$$\|v\|_2 = \|v\|_F \leq \sqrt{r}\|v\|_2, r \leq n$$

$$\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\|x\|_2\,\|y\|_2}\right)$$

$r_1 = \min(m,s)$, $r_3 \leq s$ olmak üzere, $\|x\|_F \leq \sqrt{r_1}\|x\|_2$ ve $\|y\|_F \leq \sqrt{r_3}\|y\|_2$ olduğu bilinmektedir. Böylece;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\frac{\|x\|_F\|y\|_F}{\sqrt{r_1}\ \sqrt{r_3}}}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{r_1r_3}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\|y\|_F}}{\|x\|_F}\right)$$

$\|y\|_F = \|y\|_2$ olduğundan dolayı;

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{r_1r_3}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_2}{\|y\|_2}}{\|x\|_F}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{r_1r_3}\cdot\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_F}\right)$$

ve son olarak $\|Ax\|_2 \leq \|Ax\|_F$ eşitsizliği kullanılarak;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{r_1r_3}\cdot\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_F}\right) = \sqrt{r_1r_3}\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_F}$$
$$= \sqrt{r_1r_3}\|A\|_F \text{ olur.}$$

Sonuç olarak, $\|A\|_2 \leq \sqrt{r_1r_3}\|A\|_F$ eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan,

$$\|A\|_F = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_F} \leq \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\|x\|_F\,\|y\|_F}\right)$$

$\|x\|_2 \leq \|x\|_F$ ve $\|y\|_2 = \|y\|_F$ olduğundan;

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\|x\|_2\,\|y\|_2}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\|y\|_2}}{\|x\|_2}\right); \|y\|_F \leq \sqrt{r_3}\|y\|_2 \text{ olduğu}$$

için;

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{r_3}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\|y\|_F}}{\|x\|_2}\right) = \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{r_3}\cdot\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_2}\right)$$

ve $\|Ax\|_F \leq \sqrt{r_2}\|Ax\|_2, r_2 = \min(m,s)$ olmak üzere

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{r_3}\sqrt{r_2}\cdot\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right) = \sqrt{r_3r_2}\|A\|_2 \text{ olur.}$$

Yukarıda elde edilen eşitsizlikler birleştirildiğinde, $\frac{1}{\sqrt{r_1r_3}}\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{r_3r_2}\|A\|_2$ ispat tamamlanmış olur. ■

Tüm ispatlarda 3. boyutun (s'nin) etkisinin bir sonucu olarak da, 2-boyutlu matris normları için verilen eşitsizliklerdeki aralıklardan daha geniş bir aralığın elde edildiği görülmektedir.

Böylelikle; 3-boyutlu matris normlarının hepsinin birbirlerine denk olduklarını göstermiş olduk.

Kısaca, elde ettiğimiz eşitsizliklerin katsayıları N_{ab} olsun. Öyle ki, A boyutları $mxnxs$ olan 3-boyutlu bir matris olmak üzere $\|A\|_a \leq N_{ab} \cdot \|A\|_b$ eşitsizliğindeki, $N_{ab}(m,n,s)$ değerleri aşağıdaki çizelge yardımıyla kolayca elde edilir.

Çizelge 1. Norm eşitsizlikleri katsayıları çizelgesi

a\b	1	2	F	∞
1	1	$s\sqrt{m}$	$s\sqrt{m}$	ms^2
2	$s\sqrt{n}$	1	$\sqrt{r_2 r_3}$	$s\sqrt{m}$
F	$s\sqrt{n}$	$\sqrt{r_1 r_3}$	1	$s\sqrt{m}$
∞	ns^2	$s\sqrt{n}$	$s\sqrt{n}$	1

3. Uygulamalar ve Sonuçlar

3.1 Uygulamalar

Bu bölümde yukarıda ispatlamış olduğumuz norm eşitsizliklerinin, simülasyon sonucu elde edilen ve gerçek veriler için hesaplanmış norm değerleri için sağlandığının gösterilmesi hedeflenmektedir.

Aşağıda oluşturduğumuz Çizelge 2., İzgi (2015)'nin ve Duran ve İzgi (2015)'nin çalışmalardaki stokastik diferasiyel denklemlerle yapmış oldukları simülasyonlar sonucu elde edilmiş 3-boyutlu matrisler için hesaplanan norm değerlerini içermektedir. Öyle ki, Çizelge 2.'nin 1. sütunundaki değerler her adımda rassal olarak %[-2,2] aralığındaki değerlere göre güncellenmiş faiz oranlarına karşın simülasyonlar sonucu elde edilen 3-boyutlu matrisler için oluşturulmuş norm değerlerini göstermektedir (İzgi, 2015). Çizelgenin 2. sütunundaki değerler ise gerçek faiz oranları kullanılarak yapılan analizler sonucu elde edilmiş 3-boyutlu matrisler için hesaplamış norm değerlerini göstermektedir (Duran ve İzgi, 2015).

Çizelge 2. Simülasyonlar sonucu oluşturulan 3-boyutlu matrisler için elde edilen norm değerleri

Normlar	Milstein	SRK
1-norm	3.9863	3.6732E+07
2-norm	2.8489	2.8541E+06
Inf-norm	6.4641	1.1129E+10
Fro-norm	4.0322	4.3077E+07

İlk olarak, İzgi (2015)'nin çalışmasında kullanılan $M\epsilon\mathbb{C}^{1000x101x280}$'lik matris için Çizelge 1.'dekine benzer norm eşitsizlikleri katsayı çizelgesini oluşturalım. Bölüm 1.1'de 3-boyutlu bir matrisi $M\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$ olarak tanımlamıştık; o halde m=1000, n=101 ve s=280 olur. Sonuç olarak, bu değerler kullanılarak Çizelge 3. değerleri kolayca elde edilir.

Çizelge 3. $M\epsilon\mathbb{C}^{1000x101x280}$'lik matris için norm eşitsizlikleri katsayılar çizelgesi

a\b	1	2	F	∞
1	1	8854.38	8854.38	64009000
2	2542.62	1	159.85	8854.38
F	2542.62	280	1	8854.38
∞	28280	2542.62	2542.62	1

Benzer çizelge Duran ve İzgi (2015)'nin çalışmasındaki 3-boyutlu matrisler için de elde edilebilir. Sonuç olarak, her bir yöntem ile elde edilmiş norm değerleri için ayrı ayrı oluşturulmuş norm eşitsizlikleri katsayı çizelgeleri yardımıyla, Bölüm 2.1.'de verilen eşitsizlikler Çizelge 4.'teki gibi özetlenebilir.

Çizelge 4. Milstein ve SRK metotları sonucu elde edilmiş norm değerleri için oluşturulan eşitsizlikler

#	Milstein	SRK
1	2.30E-03≤2.849≤5.72E+04	1.39E+06≤2.85+E06≤2.83E+13
2	4.50E-04≤2.849≤1.12E+04	1.44E+04≤2.85E+06≤2.94E+11
3	2.30E-03≤4.032 ≤5.72E+04	1.39E+06≤4.31E+07≤2.83E+13
4	1.424E-05≤6.464≤3.16E+07	1.55E-07≤1.11E+10≤2.35E+15
5	4.50E-04≤4.032≤1.12E+04	1.44E+04≤4.31E+07≤2.94E+11
6	1.69E-02≤4.032≤7.98E+02	1.13E+04≤4.31E+07≤4.56E+08

\# Eşitsizliklerin numarası

Norm eşitsizlikleri matris boyutlarına bağlı olarak ifade edildiği için, bu $(mxnxs)$ boyut değerlerinin büyük olduğu durumlarda eşitsizlikler her ne kadar geniş bir aralık ifade etse de, değerlerin küçülmesi durumunda daha optimal aralıklar elde edileceği eşitsizlik ifadelerinden de görülmektedir. Bunların yanı sıra, uygulamalar kısmında bahsedilen iki çalışmada da stokastik diferansiyel denklemlerin (SDD) sayısal çözümlerinde kullanılan Milstein ve SRK yöntemleriyle elde edilmiş norm değerleri görülmektedir. Bu metotların yakınsama hızları bilindiği üzere sırasıyla 1.0 ve 2.0 dir (Bkz. P.E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz, 2215). SDD'lerin kullanıldığı analizlerde her ne kadar yakınsama hızı yüksek olan yöntemler genel olarak tercih edilmek istense de, Çizelge 4.'teki değerler dikkatlice incelendiğinde, norm eşitsizliklerinin SDD ile yapılan sayısal analizlerde kullanılan metotlardan bağımsız olarak korunduğu da gözlemlenen bir diğer önemli sonuç olarak karşımıza çıkmaktadır.

3.2. Sonuçlar

Böylece yukarıda ifade etmiş olduğumuz 3-boyutlu matrislerdeki norm eşitsizlikleri ispatlanarak tıpkı 2-boyutlu matrislerdeki gibi normların denklikleri de gösterilmiştir. Ortaya koyduğumuz bu 3-boyutlu matris norm eşitsizlikleri kullanılarak, matris normları arasındaki bağıntılar çok daha kolay bir şekilde ifade edilmiş olacaktır. Bunun yanı sıra, hesaplanması kolay olan normlardan (mesela $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ normları gibi) yola çıkarak diğer normlar için alt ve üst sınırlar belirlenebilir. Böylece normlar arası geçişler kolay bir hal alacak ve norm değerlerinin dikkate alınarak yapılacağı analizlerde, bu eşitsizlikler yardımıyla sonuca ulaşma süresi kısaltılarak daha hızlı bir şekilde değerlendirme yapma imkanı sağlanmış olacaktır.

Öyle ki, veri seçimlerinin normlara bağlı olduğu durumlarda hesaplanması diğer normlara göre daha kolay olan $\|.\|_\infty$ veya $\|.\|_1$ normlarından biri kullanılarak (yaklaşık olarak) diğer norm değerlerine geçiş yapılabilir. Böylece $\|.\|_F$ ya da $\|.\|_2$ normları için aralıklar belirlenebilir. Bu noktada dikkat edilmesi gereken bir diğer husus ise; bu iki normun hesaplanması 2-boyutlu matrislerde bile oldukça uzun zaman alırken, 3-boyutlu matrislerde çok daha uzun süreceğidir. Bu sebeple yukarıda elde ettiğimiz norm eşitsizlikleri kullanılarak, uygun seçimlerin yapılması ile belirtilen bu normlar için yaklaşık bir değer bulmak daha kolay hale gelecektir.

Diğer taraftan matris tabanlı algoritmaların analizleri, matris normlarının kullanılmasını gerektirdiği için bu tarz analizlerde de elde edilen norm eşitsizliklerinden faydalanılabilinir.

Sonuç olarak, birçok farklı kullanım alanı olan matris normları için matris norm eşitsizlikleri 3-boyutlu matrisler için de gösterilerek farklı ve yeni bir boyut kazanmış oldu. Böylece tek bir norm hesaplanarak diğer normların yaklaşık değerleri hakkında fikir sahibi olunacaktır. Bunların bir sonucu olarak da, yapılan bazı simülasyon veya algoritmaların analizlerinin daha hızlı bir şekilde tamamlanmasında bu eşitsizlikler yardımıyla elde edilen sınır değerlerinin önemli bir rol oynayacağına inanmaktayız.

Ekler

İspat.(3) $A\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$, $x\epsilon\mathbb{C}^{nx1xs}$, $y\epsilon\mathbb{C}^{sx1}$, $Ax\epsilon\mathbb{C}^{mx1xs}$ ve $Axy\epsilon\mathbb{C}^{mx1}$olsun.
$M\epsilon\mathbb{C}^{mxn}$ 2-boyutlu bir matris ve $v\epsilon\mathbb{C}^{n}$ vektör olmak üzere,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|M\|_\infty \le \|M\|_F \le \sqrt{m}\|M\|_\infty$$

Vektörlerde 2-normu, Frobenius normuna eşit olduğundan, $\|v\|_\infty \le \|v\|_F \le \sqrt{n}\|v\|_\infty$

olduğu söylenebilir.

$$\begin{aligned}
\|A\|_\infty &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup_{x\neq 0}\left(\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\|y\|_\infty}}{\|x\|_\infty}\right)\\
&\le \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\frac{\|x\|_F}{\sqrt{n}}\frac{\|y\|_F}{\sqrt{s}}}\right)\\
&= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\cdot\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\|x\|_F\,\|y\|_F}\right)\\
&= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\|y\|_F}}{\|x\|_F}\right)\\
&\le \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\|y\|_\infty}}{\|x\|_2}\right)\\
&= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\cdot\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_F}\right)\\
&\le \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\sqrt{s}\cdot\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_F}\right)\\
&= s\sqrt{n}\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_F} = s\sqrt{n}\,\|A\|_F.
\end{aligned}$$

$\|A\|_\infty \le s\sqrt{n}\|A\|_F$ eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\|A\|_F &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_F} = \sup_{x\neq 0}\left(\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\|y\|_F}}{\|x\|_F}\right)\\
&\le \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\frac{\|x\|_\infty}{\sqrt{s}}\|y\|_\infty}\right)\\
&= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{s}\cdot\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\|x\|_\infty\,\|y\|_\infty}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{s}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\|y\|_\infty}}{\|x\|_\infty}\right)$$

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(s\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\|y\|_F}}{\|x\|_\infty}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(s\cdot\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_\infty}\right) \leq \sup_{x\neq 0}\left(s\sqrt{m}\cdot\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}\right)$$

$$= s\sqrt{m}\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = s\sqrt{m}\,\|A\|_\infty.$$

Bu sebeple, $\|A\|_F \leq s\sqrt{m}\|A\|_\infty$ elde edilir.

Sonuç olarak elde etmiş olduğumuz bu iki eşitsizliği birleştirirsek, $\frac{1}{s\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_F \leq s\sqrt{m}\|A\|_\infty$ elde edilir. ■

İspat.(4) $A\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$, $x\epsilon\mathbb{C}^{nx1xs}$, $y\epsilon\mathbb{C}^{sx1}$, $Ax\epsilon\mathbb{C}^{mx1xs}$ ve $Axy\epsilon\mathbb{C}^{mx1}$olsun.
$v\epsilon\mathbb{C}^n$ vektör ve $M\epsilon\mathbb{C}^{mxn}$2-boyutlu bir matris olmak üzere,

$$\frac{1}{m}\|M\|_1 \leq \|M\|_\infty \leq n\|M\|_1$$
$$\|v\|_1 \leq \|v\|_\infty \leq n\|v\|_1$$

olduğu bilinmektedir ve bu eşitsizlikler gerekli düzenlemelerin yapılmasının ardından kanıt aşağıdaki gibi sunulmuştur.

$$\|A\|_1 = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \sup_{x\neq 0}\left(\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_1}{\|y\|_1}}{\|x\|_1}\right)$$

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_1}{\frac{\|x\|_\infty}{s}\frac{\|y\|_\infty}{s}}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(s^2\cdot\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_1}{\|x\|_\infty\|y\|_\infty}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(s^2\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_1}{\|y\|_\infty}}{\|x\|_\infty}\right)$$

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(s^2\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_1}{\|y\|_1}}{\|x\|_\infty}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(s^2\cdot\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_\infty}\right) \leq \sup_{x\neq 0}\left(s^2 m\cdot\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}\right)$$

$$= s^2 m\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = s^2 m\,\|A\|_\infty.$$

Yani, $\|A\|_1 \leq ms^2\|A\|_\infty$ eşitsizliği elde edillir.
Diğer taraftan,

$$\|A\|_\infty = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup_{x\neq 0}\left(\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\|y\|_\infty}}{\|x\|_\infty}\right)$$

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\frac{\|x\|_1}{n}\|y\|_1}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(n\cdot\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\|x\|_1\|y\|_1}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(n\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\|y\|_1}}{\|x\|_1}\right)$$

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(ns\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_\infty}{\|y\|_\infty}}{\|x\|_1}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(ns\cdot\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_1}\right) \leq \sup_{x\neq 0}\left(ns^2\cdot\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\right)$$

$$= ns^2\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = ns^2\,\|A\|_1$$

kısaca, $\|A\|_\infty \leq ns^2\|A\|_1$ eşitsizliğine ulaşılır. ■

İspat.(5) $A\epsilon\mathbb{C}^{mxnxs}$, $x\epsilon\mathbb{C}^{nx1xs}$, $y\epsilon\mathbb{C}^{sx1}$, $Ax\epsilon\mathbb{C}^{mx1xs}$ ve $Axy\epsilon\mathbb{C}^{mx1}$olsun.
$M\epsilon\mathbb{C}^{mxn}$ 2-boyutlu bir matris ve $v\epsilon\mathbb{C}^n$ bir vektör olmak üzere,

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|M\|_1 \leq \|M\|_F \leq \sqrt{n}\|M\|_1$$

$$\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq \sqrt{n}\|v\|_2 \text{ ve } \|y\|_F = \|y\|_2$$

olduğu bilinmektedir. Bu eşitsizlikler ışığı altında aşağıdaki ispat yapılmıştır.

$$\|A\|_1 = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \sup_{x\neq 0}\left(\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_1}{\|y\|_1}}{\|x\|_1}\right)$$

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_1}{\frac{\|x\|_F}{\sqrt{s}}\|y\|_F}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{s}\cdot\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_1}{\|x\|_F\|y\|_F}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{s}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_1}{\|y\|_F}}{\|x\|_F}\right)$$

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(s\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_1}{\|y\|_1}}{\|x\|_F}\right)$$

$$= \sup_{x\neq 0}\left(s\cdot\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_F}\right)$$

$$\leq \sup_{x\neq 0}\left(s\sqrt{m}\cdot\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_F}\right)$$

$$= s\sqrt{m}\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_F} = s\sqrt{m}\|A\|_F.$$

Böylece, $\|A\|_1 \leq s\sqrt{m}\|A\|_F$ elde eldilir.

Üst sınır bulmak için ise,

$$
\begin{aligned}
\|A\|_F &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_F} = \sup_{x\neq 0}\left(\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\|y\|_F}}{\|x\|_F}\right)\\
&\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\frac{\|x\|_1}{\sqrt{n}}\frac{\|y\|_1}{\sqrt{s}}}\right)\\
&= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\cdot\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\|x\|_1\,\|y\|_1}\right)\\
&= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\|y\|_1}}{\|x\|_1}\right)\\
&\leq \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\cdot\frac{\sup_{y\neq 0}\frac{\|Axy\|_F}{\|y\|_F}}{\|x\|_1}\right)\\
&= \sup_{x\neq 0}\left(\sqrt{ns}\cdot\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_1}\right) \leq \sup_{x\neq 0}\left(s\sqrt{n}\cdot\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\right)\\
&= s\sqrt{n}\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = s\sqrt{n}\|A\|_1
\end{aligned}
$$

olur ve son olarak $\|A\|_F \leq s\sqrt{n}\|A\|_1$ eşitsizliği elde edilir. Böylece $\frac{1}{s\sqrt{m}}\|A\|_1 \leq \|A\|_F \leq s\sqrt{n}\|A\|_1$ eşitsizliğinin de ispatı tamamlanmış olur. ■

Kaynaklar

Aubry A., De Maio A., Carotenuto V., July 2013. Optimality Claims for the FML Covariance Estimator with respect to Two Matrix Norms. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, **49**, Issue: 3, 2055-2057.

Duran A., İzgi B., 2014. Solution Behavior of Heston Model Using Impression Matrix Norm, Advances in Applied Mathematics Springer, Cham. 215-221.

Duran A., İzgi B., 2015. Application of the Heston stoctastic volatility model for Borsa Istanbul using impression matrix norm, Journal of Comput. and Appl. Math., **281**, 126-134.

Golub G.H., Val Loan C. F., 1996, Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, 56-57.

İzgi B., 2015. Behavioral Classification of Stochastic Differential Equations in Mathematical Finance, PhD Thesis, Istanbul Technical University.

Kloeden P.E., Platen E., Schurz H.,2003. Numerical Solution of SDE through Computer Experiments, Springer, Berlin.

Li R.,1998. Relative Perturbation Theory, SIAM. J. Matrix Anal. & Appl., **19**(4), 956–982, 27.

Whitaker B. M., Anderson D. V., August 2015 Learning anomalous features via sparse coding using matrix norms. Signal Processing and Signal Processing Education Workshop (SP/SPE), IEEE.

Wilkinson D.M.,2005. Moment Instabilities in Multidimesional Systems with Noise, The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems, **43**, Issue 2, 221-242.

Zielke G, November 1988. Linear Algebra and its Applications, **110**, Elsevier Inc. 29-41.