

---

*Araştırma Makalesi / Research Article*

---

## **İki Bacaklı Bir Robotun Yapay Sinir Ağı Desteği ile Denge Sağlaması**

Ahmet Burak TATAR\*, Beyda TAŞAR, Alper Kadir TANYILDIZI

*Fırat Üniversitesi, Mekatronik Mühendisliği, Elazığ*

---

### **Öz**

Robotlar genellikle doğadaki canlılardan esinlenerek tasarlanmaktadır. Özellikle eklem bacaklı robot çalışmalarında 4 bacaklı robotlara çok geniş yer verilmektedir. Doğada 4 bacaklı hayvanların davranışlarından esinlenerek robotlara çeşitli özellikler kazandırılmaktadır. Dört bacaklı olan birçok hayvan doğar doğmaz ayağa kalkabilme ve hatta yürüyebilme becerisine sahiptir. Bu canlıların fizyolojik gelişimleri anne karnında tamamlanmakta ve doğduktan hemen sonra kemik ve bacak kas grupları kullanılabilir duruma gelmektedir. Canlıların doğduktan sonra ayağa kalkarak dengede kalabilmesinin, bacak kaslarına beyinden iletilen nörolojik sinyallerle gerçekleştirildiği açıkça bilinen bir gerçektir. Bu bilgiler ışığında bu çalışmada, 4 bacaklı bir robotu andıran 2 bacaklı bir robotun düzlemsel kinematiği ve dinamiği elde edilerek, ayakta dengede kalabilme kabiliyetinin bir yapay sinir ağı desteği ile robota kazandırılması ele alınmıştır. Dinamik hareket için robotun düzlemsel modeli ele alınmış ve 7 eksenli hareket denklemleri elde edilmiştir. Robotun yerden kalkarak ayakta dengede kalabilmesi amaçlanmıştır. Bunun bir yapay sinir ağı yapısının kullanımı ile öğrenme sonucunda gerçekleştirilebilmesi hedeflenmiştir. Robotun eklemlerine uygulanması gereken kontrol sinyalleri için klasik PID kontrol yöntemi kullanılmıştır. Sistem cevapları grafiksel olarak elde edilmiş ve sonuçlar değerlendirilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** İki Bacaklı Robot, Dinamik Model, Kinematik, Yapay Sinir Ağları.

---

## **Balancing a Two- Legged Robot with the aid of Artificial Neural Network**

---

### **Abstract**

Robots are usually designed by inspiration from living beings in nature. Particularly, 4-legged robots are widely used in joint legged robotics. It is inspired by the behaviors of 4 legged animals in nature and various characteristics are given to robots. Many animals with four legs have the ability to stand up and even new-born walking. The physiological developments of these living beings are completed in the mother's womb and soon after birth, bone and leg muscle groups become available. It is a well-known fact that living things are able to stand up after birth and remain in balance with neurological signals transmitted from the brain to the leg muscles. According to this information it is discussed in this study, to gain the ability to stay in balance with the aid of an Artificial Neural Network(ANN) by obtaining the planar kinematics and dynamics of a 2-legged robot, which resembles a 4-legged robot. For the dynamic motion, the planar model of the robot is considered and 7-axis motion equations are obtained. It is intended that staying in the balance of the robot by standing up from the ground. It is aimed to be realized as a result of learning with the use of an artificial neural network structure. Conventional PID control method has been used for control signals that should be applied to robot joints. System responses are obtained graphically and the results are evaluated.

**Keywords:** Two-legged robot, Dynamic Model, Kinematic, Artificial Neural Network.

---

### **1. Giriş**

Bacaklı robotlar, arazi düzensizlikleri ve üstün arazi hareketliliğine daha fazla uyum sağlayan tekerlekli robotlara göre birçok avantaj sunar. Bu özellik, bacaklı robotların tekerlekli mobil robotlara karşı koyamayacağı yüzeyleri çaprazlamasına imkân verir [1,2]. Ayrıca, insanlarla birlikte başarılı bir şekilde çalışabilmesi için, robotun çalışma alanı düz zeminler ve rampalarla sınırlı olmamalıdır. Merdivenlere

---

\*Sorumlu yazar: [atatar@firat.edu.tr](mailto:atatar@firat.edu.tr)

Geliş Tarihi: 17.07.2018, Kabul Tarihi: 20.12.2018

tırmanabilmeli, engellerin üstünden geçebilmeli ve engebeli arazilerde gezinebilmelidir [3]. Tüm bu avantajlar, bacaklı robotların mobil robotlar alanında önemli ve aktif bir araştırma alanı olmasını sağlar [4]. Bacaklı mobil robot çalışmalarında, daha hızlı hareket kabiliyetine sahip oldukları için genelde 4 bacaklı robot uygulamaları yaygındır. BigDog[5], DARPA'nın finanse ettiği, Boston Dynamics'te geliştirilmekte olan 4 bacaklı robot çalışmalarının öncülerindedir.

Günümüzde 4-bacaklı robotlar, insanoğlunun yaşamını işlevsel olarak kolaylaştıracak ve ihtiyaçları karşılayacak birçok uygulamada kullanılmaktadır. Robotlara kazandırılacak her bir özellik robotları daha yetenekli hale getirmektedir.

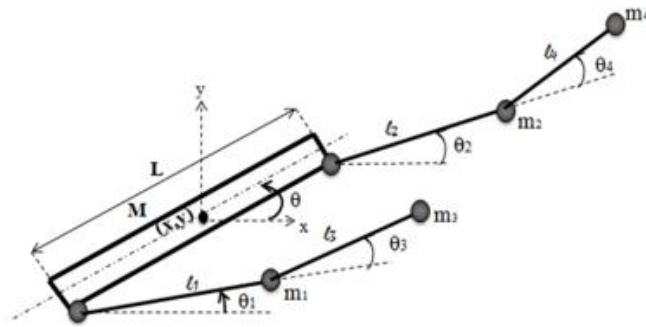
Bu çalışmada 2 bacaklı bir robota, yerden kalkarak gövdesini dengede tutabilme özelliğinin, bir YSA yardımıyla kazandırılabilmesi hedeflenmiştir. Bunun için öncelikle 2 bacaklı düzlemsel bir robotun dinamiği modellenmiş ve matematiksel ifadelerinden yararlanılmıştır. Robotun her bir bacağına ait kinematik analizler gerçekleştirilmiştir. Düz kinematik analizi gerçekleştirebilmek için Denavit-Hartenberg yöntemi [6] kullanılmıştır. Daha sonra düz kinematik denklemler kullanılarak ters kinematik analiz yapılmıştır. Kinematik analizlerden elde edilen veriler kullanılarak robotun dinamiği için hareket denklemleri elde edilmiştir. Robot gövdesinin yatayda ve düşeyde olmak üzere bağımsız öteleme hareketleri yanında, robot gövdesi ağırlık merkezinde düzleme dik eksen etrafındaki açısız dönme hareketi göz önüne alınmıştır. Robot gövdesine bağlı hareketli 2 bacak ve her bir bacağın döner eklemlere sahip 2 eksenli olduğu kabul edilmiştir.

Robot sistemini ayağı kaldırabilmek için bir yapay sinir ağ yapısı kullanılmıştır. Kullanılan yapay sinir ağının eğitiminde genetik algoritmalarından faydalanılmıştır. Yapay sinir ağına giriş olarak robotun durum değişkenleri verilmiş ve ağ çıkışında elde edilen değerler robot bacaklarındaki eklemler için referans açıları olarak belirlenmiştir. Bu referans açıları PID kontrolcü tarafından değerlendirilerek eklemler kontrol edilmiştir. Yapay sinir ağları, genetik algoritma ile eğitilirken robot gövdesinin yerden belirli bir yükseklikte tutulmasını ve gövdenin yere göre paralel kalmasını sağlayan bir amaç fonksiyonu kullanılmıştır. Yapay sinir ağı için giriş katmanında 3 hücre kullanılmıştır. Çıkış katmanında ise 4 hücre kullanılmıştır. Çıkıştaki her hücre ait olduğu eklemler için referans açı değerini üretmektedir.

Sayısal çözümler ve benzetimler için Matlab paket programı kullanılmıştır. Yapay sinir ağlarının eğitiminde Matlab genetik algoritmalar araç kutusundan yararlanılmıştır.

## 2. Robotun Kinematik ve Dinamik Modeli

Bu çalışmada ele alınan 2 bacaklı robot (4 bacaklı robotun düzlemsel yarım modeli), Şekil 1'deki gibi düzlemsel 7 serbestlik dereceli olarak modellenmiştir. Burada  $x$  ve  $y$ , gövdenin yatay ve düşey eksenlerde yaptığı doğrusal hareketini,  $\theta$  ise gövdenin zemine göre yapmış olduğu açısız hareketini,  $\theta_{1-4}$  de robotun bacak eklemlerinin açısız hareketlerini ifade etmektedir.



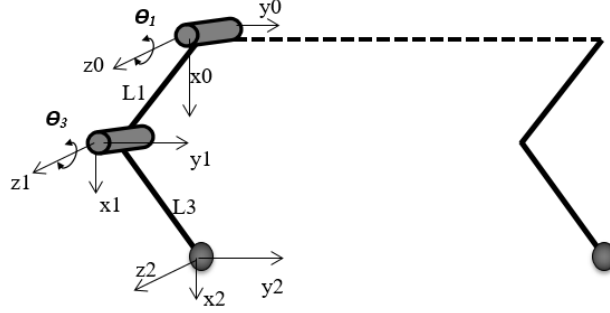
Şekil 1. 4 Bacaklı Robotun Düzlemsel Yarım Modeli

### 2.1. Kinematik Analiz

Robot sistemlerinin kinematik analizi, düz ve ters kinematik analiz olarak incelenir. Robotik sistemlerde düz kinematik, genellikle robotun uç işlevcisinin pozisyon ve oryantasyonunun hesaplanması anlamına

gelir [7]. Ters kinematik ise, robotun uç işlevcisinin yönelim ve pozisyonu bilindiğinde, eklem açısai değerlerinin belirlenmesi olarak tanımlanır [8].

Robotun tek bacağına ait kinematik analiz için Denavit-Hartenberg yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemle göre modellenen düzlemsel yarım robot modelinin bacak eksen takımlarının yerleşimi Şekil 2.'de verilmiştir



Şekil 2. Robot Bacağının Eksenel Yerleşimi

Oluşturulan eksen takımlarına göre, bu yöntemin gereği olarak bir D-H tablosu oluşturulmuştur. Tablo 1'de verilen bu değerleri doğrultusunda da her bir hareketli eksenin dönüşüm matrisi ( $A_i$ ) elde edilir.

Tablo 1. D-H Tablosu

Link	$\theta$	d	$\alpha$	a
1	$\theta_1$	0	0	$L_1$
2	$\theta_3$	0	0	$L_3$

Bu matrislerin çarpımı sonucu temel dönüşüm matrisi ( ${}^2_0T$ ) elde edilir ve bu matrisin son sütunundaki ifadeler robot bacağına göre uç konumlarını ifade etmektedir.

$${}^2_0T = A_1 A_2 \quad (1)$$

$${}^2_0T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_3) & 0 & L_1 \cos \theta_1 + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_3) \\ \sin(\theta_1 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_3) & 0 & L_1 \sin \theta_1 + L_3 \sin(\theta_1 + \theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{p}_x = L_1 \cos \theta_1 + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_3) \quad , \quad \mathbf{p}_y = L_1 \sin \theta_1 + L_3 \sin(\theta_1 + \theta_3) \quad , \quad \mathbf{p}_z = 0 \quad (3)$$

Ters kinematik analiz için denklem (4) kullanılmıştır.

$$A_1^{-1} {}^2_0T = A_2 \quad (4)$$

Buna göre bacak eklemlerinin açısal konumlarını veren ifadeler (5) ve (6)'da gösterildiği gibidir.

$$\cos \theta_3 = \sqrt{\frac{p_x^2 + p_y^2 - 2L_3^2}{2L_3^2}} \quad , \quad \sin \theta_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_3} \quad , \quad \theta_3 = \arctan\left(\frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_3}\right) \quad (5)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{p_x L_3 \cos \theta_3 + p_x L_3 + p_y L_3 \sin \theta_3}{p_x^2 + p_y^2}, \quad \sin \theta_1 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_1}, \quad \theta_1 = \arctan\left(\frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1}\right) \quad (6)$$

Robotun diğer bacağına eklem açıları da aynı yöntemle hesaplanarak (7) ve (8)'de verilmiştir.

$$\cos \theta_4 = \sqrt{\frac{p_x^2 + p_y^2 - 2L_4^2}{2L_4^2}}, \quad \sin \theta_4 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_4}, \quad \theta_4 = \arctan\left(\frac{\sin \theta_4}{\cos \theta_4}\right) \quad (7)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{p_x L_4 \cos \theta_4 + p_x L_4 + p_y L_4 \sin \theta_4}{p_x^2 + p_y^2}, \quad \sin \theta_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2}, \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2}\right) \quad (8)$$

## 2.2. Dinamik Analiz

### 2.2.1. Lagrange-Euler Metodu

Ele alınan robotun hareket denklemleri için Lagrange-Euler [9] yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemle göre, modellenen sistemin kinetik ve potansiyel enerjileri göz önüne alınarak sistemin tüm hareket denklemleri oluşturulmuştur. Hareket denklemleri ile robot uzuvlarının her birinin arzu edilen hareketi gerçekleştirebilmesi için gereken tork değerleri hesaplanabilmektedir. Sistemin hareketli elemanlarının matematiksel ifadesini elde etmek için kullanılan temel denklem (9)'da verilmiştir.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q, \dot{q}_i) - \frac{\partial}{\partial q_i} L(q, \dot{q}_i) = \tau_i \quad (9)$$

Bu ifadede  $q_i$ ; sistemdeki hareketli elemanın sahip olduğu konumu,  $i$ ; hareketli eleman indisini belirtmektedir. Lagrange denklemini(L) elde etmek için sistemin toplam kinetik enerji ifadesinden(T), toplam potansiyel enerji ifadesinin(V) farkının alınması gerekmektedir.

$$L = T - V \quad (10)$$

$$T = \frac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} m_4(\dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2) \quad (11)$$

Kinetik ve potansiyel enerji ifadelerinde görülen fiziksel parametreler Tablo 2.'de işlevleriyle birlikte belirtilmiştir.

**Tablo 2.** Robotun Fiziksel Parametreleri

$M$	Robot gövdesinin kütlesi
$x$	Robot gövdesinin yatay eksenindeki konumu
$y$	Robot gövdesinin düşey eksenindeki konumu
$m_{1-4}$	Robot bacak uzuvlarının kütleleri
$x_{1-4}$	Robot bacak uzuvlarının yatay eksenindeki konumları
$y_{1-4}$	Robot bacak uzuvlarının düşey eksenindeki konumları
$I$	Gövdenin atalet momenti
$\theta$	Gövdenin zemine göre açısal konumu
$\theta_{1-4}$	Robot eklemlerinin açısal konumları
$L$	Robot gövdesinin uzunluğu
$L_{1-4}$	Bacak uzuvlarının uzunlukları

Kinetik ve potansiyel enerji denklemlerinin elde edilebilmesi için de öncelikle gövdenin ve bacakların düzlemsel konum ifadeleri (12-17)'deki gibi hesaplanmıştır.

$$x_1 = x - \frac{L}{2} \cos \theta + L_1 \cos \theta_1 \quad , \quad y_1 = y - \frac{L}{2} \sin \theta + L_1 \sin \theta_1 \quad (12)$$

$$x_2 = x + \frac{L}{2} \cos \theta + L_2 \cos \theta_2 \quad , \quad y_2 = y + \frac{L}{2} \sin \theta + L_2 \sin \theta_2 \quad (13)$$

$$x_3 = x - \frac{L}{2} \cos \theta + L_1 \cos \theta_1 + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_3) \quad (14)$$

$$y_3 = y - \frac{L}{2} \sin \theta + L_1 \sin \theta_1 + L_3 \sin(\theta_1 + \theta_3) \quad (15)$$

$$x_4 = x + \frac{L}{2} \cos \theta + L_2 \cos \theta_2 + L_4 \cos(\theta_2 + \theta_4) \quad (16)$$

$$y_4 = y + \frac{L}{2} \sin \theta + L_2 \sin \theta_2 + L_4 \sin(\theta_2 + \theta_4) \quad (17)$$

Sistemin kinetik enerjisinin hesaplanabilmesi için, verilen bu konum ifadelerinin türevlerinin alınıp hız ifadeleri elde edilmelidir. Hız hesaplanırken aynı uzvun her iki eksenindeki konumlarının karelerinin toplamlarının  $(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)$  alınması gerekmektedir. Bunun sonucunda da hız ifadeleri  $(V_i^2)$ , kinetik enerjinin  $(\frac{1}{2}mV^2)$  hesaplanması için elde edilmiştir. Aynı şekilde potansiyel enerji hesaplanırken  $(mgy_i)$  bacak eklemlerinin düşey eksenindeki konumları kullanılmaktadır. Gerekli tüm ara işlemlerin sonucunda genel Lagrange denklemi (18)'deki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{m_1\dot{x}^2}{2} + \frac{m_1\dot{y}^2}{2} + \frac{m_1L^2\dot{\theta}^2}{8} + \frac{m_1L_1^2\dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{m_1L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta}{2} - m_1\dot{x}L_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 \\ & - \frac{m_1L\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta}{2} + m_1\dot{y}L_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 - \frac{m_1LL_1\dot{\theta}\dot{\theta}_1\cos(\theta-\theta_1)}{2} + \frac{m_2\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2\dot{y}^2}{2} + \frac{m_2L^2\dot{\theta}^2}{8} + \frac{m_2L_2^2\dot{\theta}_2^2}{2} \\ & - \frac{m_2L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta}{2} - m_2\dot{x}L_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 + \frac{m_2L\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta}{2} + m_2\dot{y}L_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + \frac{m_2LL_2\dot{\theta}\dot{\theta}_2\cos(\theta-\theta_2)}{2} + \frac{m_3\dot{x}^2}{2} \\ & + \frac{m_3\dot{y}^2}{2} + \frac{m_3L^2\dot{\theta}^2}{8} + \frac{m_3L_1^2\dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{m_3L_3^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_3)^2}{2} + \frac{m_3L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta}{2} - m_3\dot{x}L_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 \\ & - m_3\dot{x}L_3(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_3)\sin(\theta_1+\theta_3) - \frac{m_3L\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta}{2} + m_3\dot{y}L_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + m_3\dot{y}L_3(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_3)\cos(\theta_1+\theta_3) \\ & - \frac{m_3LL_1\dot{\theta}\dot{\theta}_1\cos(\theta-\theta_1)}{2} - \frac{m_3LL_3\dot{\theta}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_3)\cos(\theta-\theta_1-\theta_3)}{2} + m_3L_1L_3\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_3)\cos\theta_3 \quad (18) \\ & + \frac{m_4\dot{x}^2}{2} + \frac{m_4\dot{y}^2}{2} + \frac{m_4L^2\dot{\theta}^2}{8} + \frac{m_4L_2^2\dot{\theta}_2^2}{2} + \frac{m_4L_4^2(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_4)^2}{2} - \frac{m_4L\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta}{2} - m_4\dot{x}L_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ & - m_4\dot{x}L_4(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_4)\sin(\theta_2+\theta_4) + \frac{m_4L\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta}{2} + m_4\dot{y}L_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + m_4\dot{y}L_4(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_4)\cos(\theta_2+\theta_4) \\ & + \frac{m_4LL_2\dot{\theta}\dot{\theta}_2\cos(\theta-\theta_2)}{2} + \frac{m_4LL_4\dot{\theta}(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_4)\cos(\theta-\theta_2-\theta_4)}{2} + m_4L_2L_4\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_4)\cos\theta_4 \\ & - Mgy - m_1gy + m_1g\frac{L}{2}\sin\theta - m_1gL_1\sin\theta_1 - m_2gy - m_2g\frac{L}{2}\sin\theta - m_2gL_2\sin\theta_2 - m_3gy \\ & + m_3g\frac{L}{2}\sin\theta - m_3gL_1\sin\theta_1 - m_3gL_3\sin(\theta_1+\theta_3) - m_4gy + m_4g\frac{L}{2}\sin\theta \\ & - m_4gL_2\sin\theta_2 - m_4gL_4\sin(\theta_2+\theta_4) \end{aligned}$$

Genel Lagrange ifadesi hesaplandıktan sonra, robot sisteminde tanımlı tüm hareketlerin tork denklemlerinin elde edilmesi için (9)'daki denklem kullanılmıştır. İlk olarak robotun yatay eksenindeki hareketini ifade eden hareket denklemi (19) elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(x, \dot{x}) - \frac{\partial}{\partial x} L(x, \dot{x}) &= \sum F_x \\ \sum F_x &= M\ddot{x} + m_1\ddot{x} + \frac{m_1L\ddot{\theta} \sin \theta}{2} + \frac{m_1L\dot{\theta}^2 \cos \theta}{2} - m_1L_1\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 - m_1L_1\dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + m_2\ddot{x} \\ &\quad - \frac{m_2L\ddot{\theta} \sin \theta}{2} - \frac{m_2L\dot{\theta}^2 \cos \theta}{2} - m_2L_2\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 - m_2L_2\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + m_3\ddot{x} + \frac{m_3L\ddot{\theta} \sin \theta}{2} \\ &\quad + \frac{m_3L\dot{\theta}^2 \cos \theta}{2} - m_3L_1\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 - m_3L_1\dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 - m_3L_3(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3) \sin(\theta_1 + \theta_3) \\ &\quad - m_3L_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3)^2 \cos(\theta_1 + \theta_3) + m_4\ddot{x} - \frac{m_4L\ddot{\theta} \sin \theta}{2} - \frac{m_4L\dot{\theta}^2 \cos \theta}{2} - m_4L_2\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ &\quad - m_4L_2\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 - m_4L_4(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_4) \sin(\theta_2 + \theta_4) - m_4L_4(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)^2 \cos(\theta_2 + \theta_4) \end{aligned} \quad (19)$$

Robotun düşey eksenindeki yer değiştirmesini ifade eden hareket denklemi de (20)'de verilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} L(y, \dot{y}) - \frac{\partial}{\partial y} L(y, \dot{y}) &= \sum F_y \\ \sum F_y &= M\ddot{y} + m_1\ddot{y} - \frac{m_1L\ddot{\theta} \cos \theta}{2} + \frac{m_1L\dot{\theta}^2 \sin \theta}{2} + m_1L_1\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - m_1L_1\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + m_2\ddot{y} \\ &\quad + \frac{m_2L\ddot{\theta} \cos \theta}{2} - \frac{m_2L\dot{\theta}^2 \sin \theta}{2} + m_2L_2\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - m_2L_2\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + m_3\ddot{y} \\ &\quad - \frac{m_3L\ddot{\theta} \cos \theta}{2} \\ &\quad + \frac{m_3L\dot{\theta}^2 \sin \theta}{2} + m_3L_1\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - m_3L_1\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + m_3L_3(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3) \cos(\theta_1 + \theta_3) \\ &\quad - m_3L_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3)^2 \sin(\theta_1 + \theta_3) + m_4\ddot{y} + \frac{m_4L\ddot{\theta} \cos \theta}{2} - \frac{m_4L\dot{\theta}^2 \sin \theta}{2} \\ &\quad + m_4L_2\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ &\quad - m_4L_2\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + m_4L_4(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_4) \cos(\theta_2 + \theta_4) - m_4L_4(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)^2 \sin(\theta_2 + \theta_4) \\ &\quad + Mg + m_1g + m_2g + m_3g + m_4g \end{aligned} \quad (20)$$

Robot gövdesinin düzlemde yaptığı açısal harekete ait dinamik denklemi (21)'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} L(\theta, \dot{\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta, \dot{\theta}) &= \tau \\ \tau &= I\ddot{\theta} + \frac{m_1L^2\ddot{\theta}}{4} + \frac{m_1L\dot{x} \sin \theta}{2} - \frac{m_1L\dot{y} \cos \theta}{2} - \frac{m_1LL_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta - \theta_1)}{2} \\ &\quad + \frac{m_1LL_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta} - \dot{\theta}_1) \sin(\theta - \theta_1)}{2} + \frac{m_2L^2\ddot{\theta}}{4} - \frac{m_2L\dot{x} \sin \theta}{2} + \frac{m_2L\dot{y} \cos \theta}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_2 LL_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta - \theta_2)}{2} - \frac{m_2 LL_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta} - \dot{\theta}_2) \sin(\theta - \theta_2)}{2} + \frac{m_3 L^2 \ddot{\theta}}{4} + \frac{m_3 L \ddot{x} \sin \theta}{2} \\
& - \frac{m_3 L \ddot{y} \cos \theta}{2} - \frac{m_3 LL_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta - \theta_1)}{2} + \frac{m_3 LL_3 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta} - \dot{\theta}_1) \sin(\theta - \theta_1)}{2} \\
& - \frac{m_3 LL_3 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3) \cos(\theta - \theta_1 - \theta_3)}{2} + \frac{m_4 L^2 \ddot{\theta}}{4} - \frac{m_4 L \ddot{x} \sin \theta}{2} \\
& + \frac{m_3 LL_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3) (\dot{\theta} - \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3) \sin(\theta - \theta_1 - \theta_3)}{2} + \frac{m_4 L \ddot{y} \cos \theta}{2} \\
& + \frac{m_4 LL_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta - \theta_2)}{2} - \frac{m_4 LL_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta} - \dot{\theta}_2) \sin(\theta - \theta_2)}{2} \\
& + \frac{m_4 LL_4 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_4) \cos(\theta - \theta_2 - \theta_4)}{2} - \frac{m_4 LL_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) (\dot{\theta} - \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \sin(\theta - \theta_2 - \theta_4)}{2} \\
& - \frac{m_1 LL_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta - \theta_1)}{2} + \frac{m_2 LL_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta - \theta_2)}{2} - \frac{m_3 LL_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta - \theta_1)}{2} \\
& - \frac{m_3 LL_3 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3) \sin(\theta - \theta_1 - \theta_3)}{2} + \frac{m_4 LL_4 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \sin(\theta - \theta_2 - \theta_4)}{2} \\
& - m_1 g \frac{L}{2} \cos \theta + m_2 g \frac{L}{2} \cos \theta - m_3 g \frac{L}{2} \cos \theta + m_4 g \frac{L}{2} \cos \theta
\end{aligned}$$

Daha sonra düzlemsel olarak modellenen robotun, her biri iki serbestlik derecesine sahip iki bacağı, kalça ve diz eklemlerine etki edecek tork değerlerini bulmak için hesaplanan hareket denklemi  $\tau_1 - \tau_8$ , (EK – 1,2,3 ve 4)’te açıkça verilmiştir.

### 2.2.1. Jakobien

Gövde ve bacakların yere teması ile robota yerden gelecek tepkilerin hesap edilebilmesi için Jakobien matrislerinden yararlanılmıştır. Genel olarak Jakobien matrisi (22)’deki gibi kısmi türevler alınarak elde edilebilmektedir.

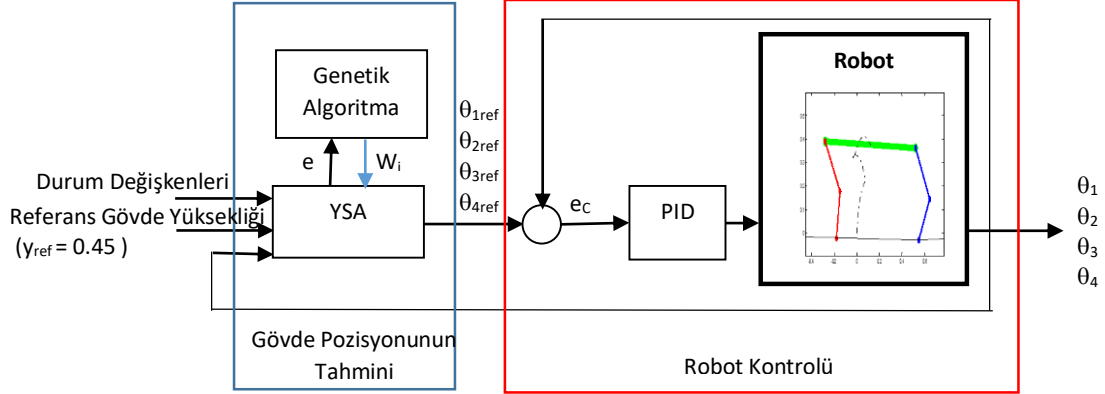
$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x} & \frac{\partial x_i}{\partial y} & \frac{\partial x_i}{\partial \theta} & \frac{\partial x_i}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_i}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_i}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial y_i}{\partial x} & \frac{\partial y_i}{\partial y} & \frac{\partial y_i}{\partial \theta} & \frac{\partial y_i}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_i}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y_i}{\partial \theta_3} & \frac{\partial y_i}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Robot omuzlarının, bacak ekleminin ve bacak uç noktalarının yere teması ile, yerden etki edecek dış kuvvetlerin gövdeye etkisini hesap edebilmek için kullanılacak Jakobien matrisleri (EK 5-10)’da verilmiştir.

### 3. İki Bacaklı Robotun Kontrol Stratejisi

İki bacaklı robotun kontrol stratejisi, bir blok diyagramı olarak Şekil 3’te sunulmuştur. Kontrolün ana hedefi, robotun her iki bacağına da kaldırmaktır. Robot; sağ bacak, sol bacak ve gövde olmak üzere 3 bölümden oluşmaktadır. Robotun ayakta durması halinde, ağırlık merkezinin 0.45 cm ( $y_{ref}$ )’te olması gerektiği kinematik analizden bilinmektedir. Yapay Sinir Ağı, robotun  $y_{ref}$  ‘e göre ilk pozisyonundan kalkacak şekilde bacakların her ekleminin referans açısı değerlerini hesaplamak için kullanılmıştır.

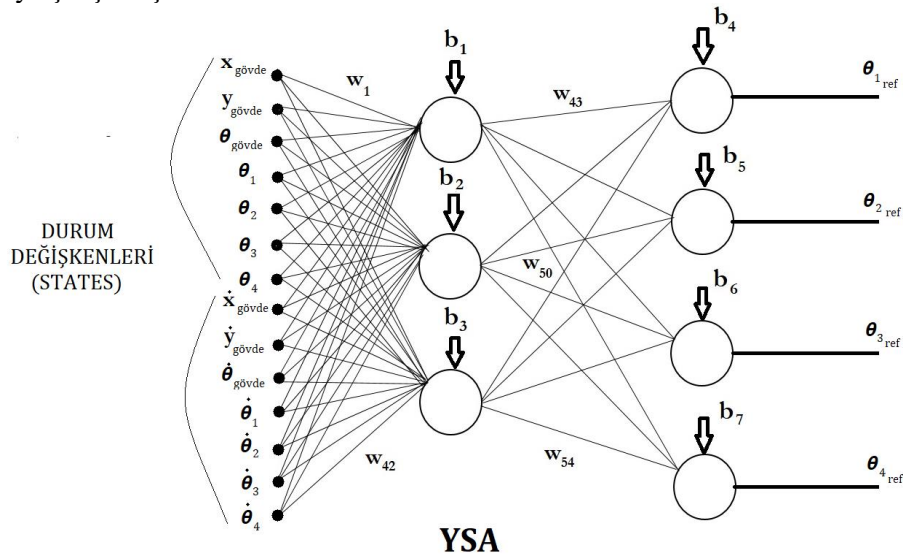
Genetik Algoritma, YSA'daki her bir katmanın nöron ağırlığını tahmin etmek için kullanılmıştır. Robot durum değişkenleri, yapay sinir ağına giriş olarak verilmiştir ve bacak eklemlerinin referans açı değerleri ağ çıkışında elde edilmiştir. Eklemlerin pozisyon hataları, referans değerleri olan  $\theta_{1ref}$ ,  $\theta_{2ref}$ ,  $\theta_{3ref}$  ve  $\theta_{4ref}$  ile anlık açısız konumları  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve  $\theta_4$  arasındaki fark alınarak hesaplanmaktadır. PID kontrolörü, bağlantıların belirtilen referans açılara sağlam bir şekilde ulaşmasını sağlar.



Şekil 3. Genetik Algoritma ile Eğitimin Blok Diyagramı

### 3.1. Yapay Sinir Ağı ile İki Bacaklı Robot İçin Gövde Pozisyon Tahmini

Yapay sinir ağı(YSA), nöronları birbirine bağlayan ağırlıkları değiştirmek için ağıın nöronlarını eğitmeye dayanan modern kontrol sistemleri için yaygın olarak kullanılmaktadır [12]. Yapay sinir ağları evrensel tahmin edicilerdir, yeterli gizli nöronun mevcut olması koşuluyla, doğrusal olmayan herhangi bir fonksiyonel ilişkiye rastgele bir doğrulukla yaklaşabilirler [13]. Bu çalışmada robotun yerdeyken ayağa kalkabilmesine yönelik bacakların alması gereken pozisyonu tespit edecek, eklemlerinin referans konumlarını hesap edecek bir YSA yapısı kullanılmıştır. Şekil 4'te görülen YSA yapısı 14 giriş ve 4 çıkışa sahiptir. Belirlenen amaç için (23)'teki amaç fonksiyonunu minimum yapacak biçimde YSA'nın ağırlık katsayıları belirlenmiştir. Simülasyon süresince iteratif olarak robotun durum değişkenleri YSA'nın girişlerine verilerek robotun bacak eklemlerine ait referans açısının YSA tarafından üretilmesi sağlanmıştır. Üretilen bu referans değerlere göre PID kontrolcülerle bacaklar kontrol edilmeye çalışılmıştır.



Şekil 4. Robot İçin Kullanılan YSA Yapısı

Amaç fonksiyonunda robot gövdesinin x doğrultusundaki hedef pozisyonu ve düzlemdeki açısız hedef pozisyonu sıfır olarak alınmıştır. Robot gövdesinin y doğrultusundaki hedef pozisyonu ise 0.45 m



alınarak YSA'nın eğitimi gerçekleştirilmiştir. YSA'nın eğitiminde genetik algoritmalar tekniğinden faydalanılmıştır. Simülasyonlarla iteratif olarak, belirlenen amaç fonksiyonunu minimum yapacak biçimde genetik algoritma tarafından YSA'nın ağırlık katsayıları güncellenerek hesaplanabilmektedir. YSA'nın eğitimi tamamlandıktan sonra genetik algoritma devre dışı bırakılarak YSA'nın davranışı incelenmiştir.

Genetik algoritma, doğal seçilime dayalı optimizasyon problemlerini çözmek için bir yöntemdir. Bireysel çözümlerin popülasyonunu defalarca değiştirir. Her adımda, mevcut nüfustan anne-baba olmak için rastgele bireyleri seçer ve onları gelecek nesil çocuklarını üretmek için kullanır [14]. Simülasyonlarda kullanılan genetik algoritma için, Matlab genetik algoritmalar araç kutusundan faydalanılmış, popülasyon sayısı 40, iterasyon sayısı ise 120 olarak seçilmiştir.

$$\sum e^2 = \sum(x - x_{Hedef})^2 + \sum(y - y_{Hedef})^2 + \sum(\theta - \theta_{Hedef})^2 \quad (23)$$

### 3.2. İki Bacaklı Robotun Eklem Kontrolü İçin PID Denetleyici Tasarımı

Bu çalışmada robotun bacaklarındaki eklemlerin açısal hareketi klasik PID kontrol yöntemi ile kontrol edilmiştir. PID kontrolörler, mühendislik uygulamalarında tartışmasız en yaygın kullanılan kontrol algoritmasıdır [10,11]. Yaygın kullanım alanı bulunan PID kontrolör, sadece sistemde oluşan hatanın varlığını değil, aynı zamanda hatanın ne kadar olduğuna ve hatanın o anki artış veya azalış eğilimine ( $e_c$ ) bakarak bir çıkış sinyali vermektedir.

$$u(t) = K_p e_c(t) + K_d \frac{d e_c(t)}{d t} + K_i \int_0^t e_c(t) \cdot d t \quad (24)$$

$$e_c = \theta_{ref} - \theta, \quad d e_c = \dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta}, \quad e_{c_i} = \int_0^t \theta_{ref}(t) - \theta(t) \quad (25)$$

Kontrol sinyalinin (24) ile gösterilen ifadesinde yer alan  $K_p$  oransal katsayıyı,  $K_d$  ise türevsel katsayıyı,  $K_i$  ise integral katsayısını ifade etmektedir. İntegral terimi, hatanın zamana göre integraliyle orantılı olan bir kontrol çıkışı verir. Bu da, kalıcı durum hatasının sıfır olmasını sağlar. Ayrıca  $e_c$  eklem konum hatasını,  $d e_c$  eklem hız hatasını,  $e_{c_i}$  de konum hatalarının toplamını temsil etmektedir. Tasarlanan PID kontrol katsayıları deneme yanılma tekniği ile belirlenerek  $K_p = 1000$ ,  $K_d = 10$ ,  $K_i = 0.01$  olarak bulunmuştur. Böylece belirlenen referans noktlara bacakların konumlanmasının PID kontrolcü ile gerçekleşmesi sağlanmıştır.

### 4. Simülasyonlar

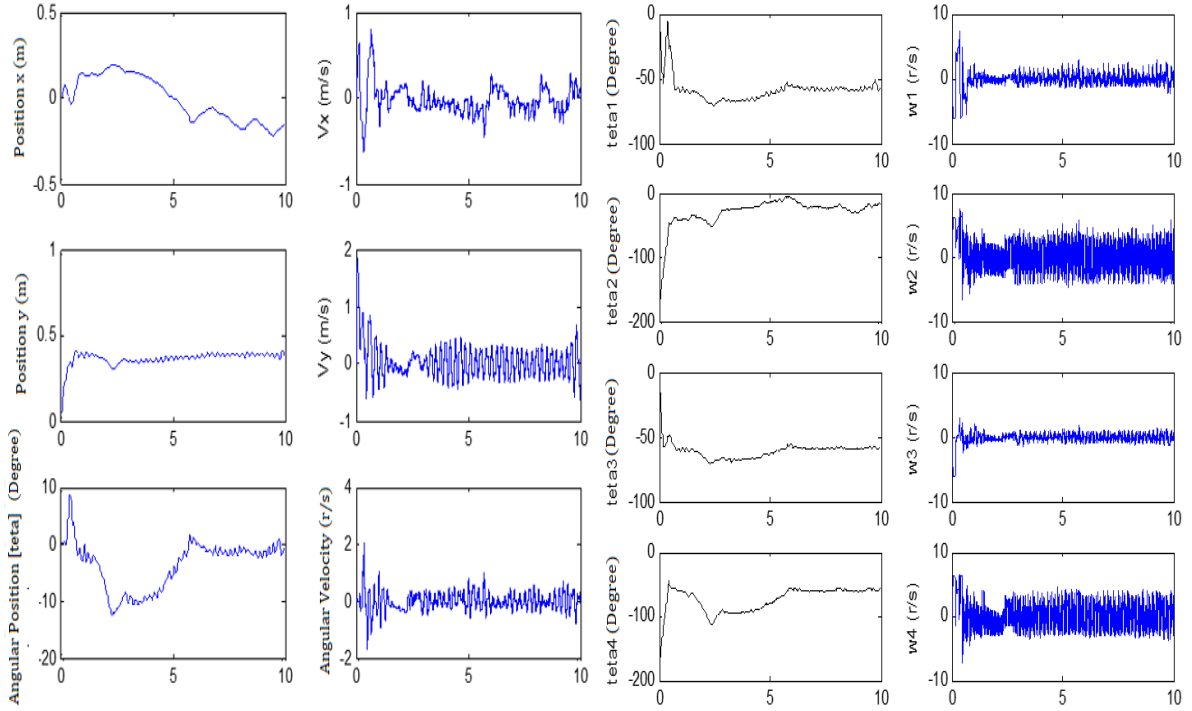
Kontrol stratejisinin başarısını kontrol etmek için bu bölümde 2 adet simülasyon senaryosu oluşturulmuştur.

İlk senaryo; robotu tamamen başlangıç yatay pozisyonundan kaldırmak.

İkinci senaryo; robot dururken x ve y ekseninde robota uygulanan kuvvetin (bozucu etkilerin) etkisi.

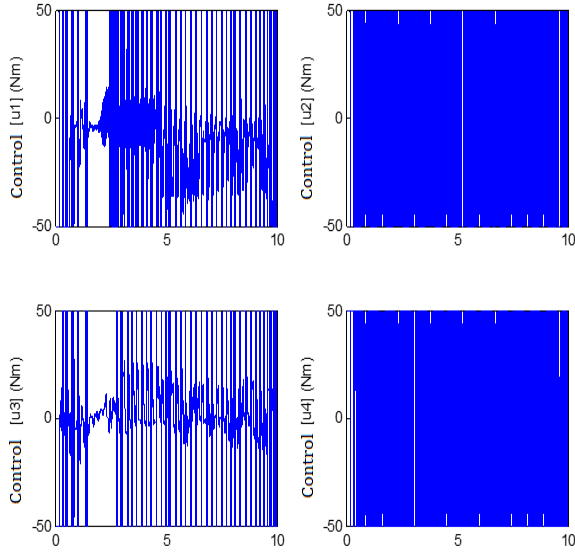
**Senaryo 1:** Sayısal simülasyonlarda, robotun başlangıç koşullarının tamamen yere yatmış ve hareketsiz olduğu varsayılmaktadır. Simülasyonun süresi 10 saniye olarak seçilmiştir. Bu süre zarfında robotun ayağı kalkması ve gövdesini yerden 0.45 metre yükseklikte sabitlemeye çalışması istenmektedir. Bu amaç için yapılan simülasyonda, PID kontrolörünün sistem tepkileri, Genetik Algoritma yoluyla eğitilmiş olan YSA tarafından üretilen referans değerlere kıyasla grafiksel olarak elde edilmiştir. Şekil 5, robotun x ve y eksenlerindeki yer değiştirme ve hızlarını, ve gövdesinin düzlemsel hareketi sırasında düzlemdeki açısal yer değiştirme ve açısal hızını belirten grafik cevaplarını göstermektedir. Şekil 6'da bacak eklemlerinin açısal yer değiştirmeleri ve açısal hızları görülmektedir. Şekil 7, bacak eklemlerine PID kontrolörü tarafından hesaplanarak uygulanan tork kontrol sinyallerinin grafiksel sonuçlarıdır.

Simülasyonlardaki eklemlere uygulanabilecek torqlar 50 Nm ile sınırlandırılmıştır. Simülasyonlarda, sonucun görselleştirilmesi için Matlab paket programında yazılan algoritmalar ile bir animasyon görseli oluşturulmuştur. Şekil 8’de, robot ayağı kalkmaya çalışırken gövde üzerindeki ağırlık merkezinin izlediği yörüngeyi gösteren bir resim verilmiştir.

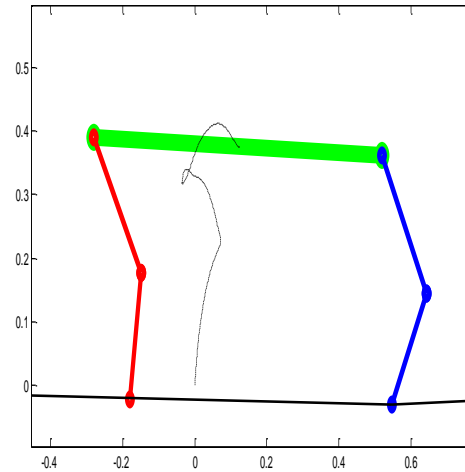


Şekil 5. Robot Gövdesinin Düzlemsel Hareketinin Sistem Cevapları

Şekil 6. Robot Bacak Eklemlerinin Sistem Cevapları



Şekil 7. Robot Bacak Eklemlerine Uygulanan Tork Kontrol Sinyalleri

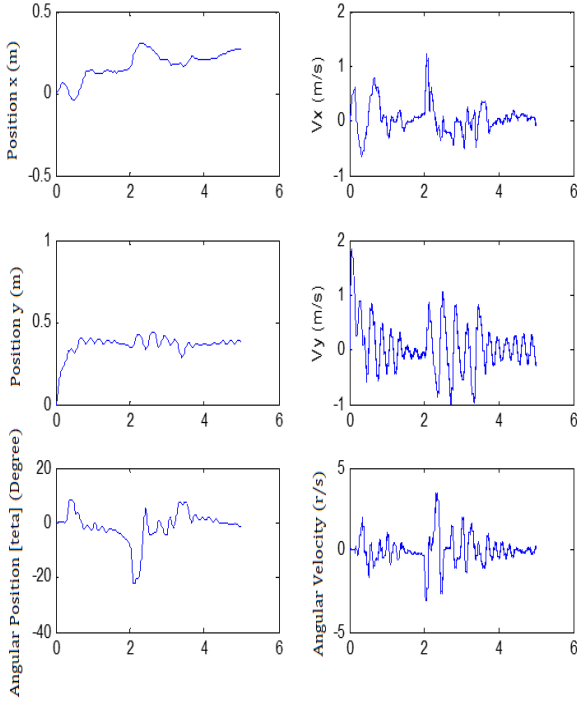


Şekil 8. Robotun Dengeye Durduğu Animasyonun Görüntüsü

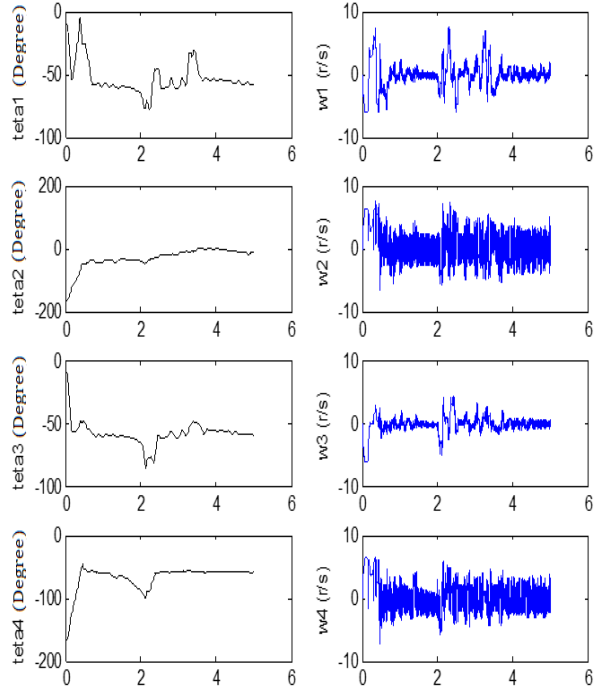
Grafiksel sonuçlara bakıldığında; Şekil 5’te görüldüğü üzere, robot gövdesi yatay (x) ekseninde yaklaşık -0.2 ile 0.2 metre konumları arasında kalmıştır. Aynı zamanda düşey ekseninde (y), ağırlık merkezinin başlangıç konumu olan 0.45 m değerini yakaladığı görülmektedir. Bununla birlikte, robot gövdesinin açısal olarak başlangıç konumu olan  $0^\circ$ 'yi yakaladığı görülür. Robot gövdesinin de yatay ve düşey eksenlerdeki hareketlerinin çizgisel hızlarının yaklaşık 1 m/sn, gövdenin açısal hızının da yaklaşık 2 rad/sn olduğu açıkça görülmektedir. Şekil 6’da, robotun belirtilen referans konumda kalabilmesi için

bacak eklemlerinin bulunması gereken açısall konumları yakalamaya çalışıldığı anlaşılmaktadır. Aynı şekilde robot eklemlerinin açısall hızları da verilmiştir.

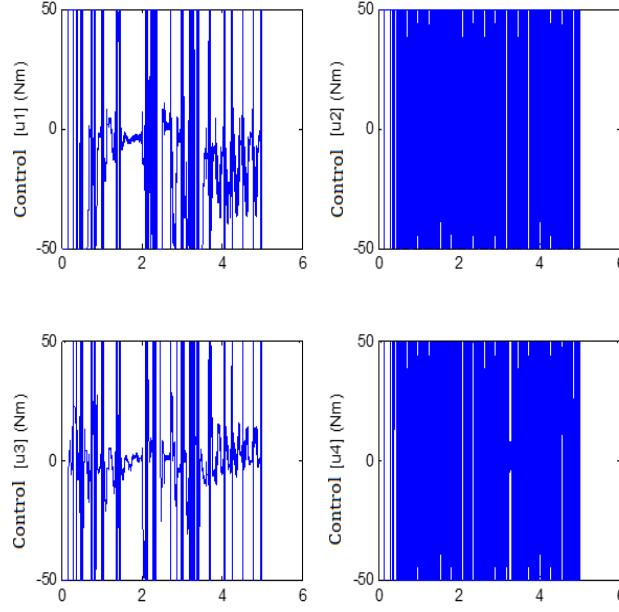
**Senaryo 2:** Robotun kararlı duruşunu test etmek için benzetimin gerçekleştirildiği sürenin 2-2.1 saniye aralığında 0.1 saniye boyunca gövdeye dışarıdan anlık bir bozucu etki ettirilmiştir. Bozucu etkiler gövdeye düzlemin x doğrultusunda 10 N büyüklüğünde kuvvet, y eksenini doğrultusunda -20 N büyüklüğünde kuvvet ve düzleme dik eksene göre -100 Nm büyüklüğünde moment olarak uygulanmıştır. Bu değerler rastgele seçilmiştir. Bu duruma göre robotun gövdesine ait sistem cevapları Şekil 9'da gösterilmiştir. Bozucu etki karşısında Şekil 10.'da robotun eklemlerine ait sistem cevapları yer almaktadır. Buna göre robot eklemlerine uygulanan kontrol sinyalleri Şekil 11'deki gibi elde edilmiştir.



**Şekil 9.** Bozucu Etki Altında Robot Gövdesinin Düzlemsel Hareketinin Sistem Cevapları



**Şekil 10.** Bozucu Etki Altında Robot Bacak Eklemlerinin Sistem Cevapları



**Şekil 11.** Bozucu Etki Altında Robot Bacak Eklemlerine Uygulanan Tork Kontrol Sinyalleri

Şekil 9’da görüldüğü gibi, robota yatay ekseninde 10 N’luk kuvvet uygulandığında yaklaşık 0.2 m gibi küçük bir değer kadar +x ekseninde hareket ettiği görülmektedir. Aynı şekilde düşey ekseninde uygulanan 20 N’luk kuvvet sonucunda robotun, kuvvetin etkisinden dolayı küçük bir salınım yapmasına rağmen istenen referans yükseklik olan 0.45 m’yi yakaladığı görülmektedir. Bununla birlikte, robot gövdesinin yaklaşık 20°’lik bir salınım yaparak, 5 sn gibi bir sürede dengeyi sağladığı açıkça görülür. Robot gövdesinin çizgisel ve açısal hızları da grafikte gösterilmiştir. Şekil 10.’da ise, robotun belirtilen referans konumunda kalabilmesi için bacak eklemlerinin bulunması gereken açısal konumları yakalamaya çalıştığı anlaşılmaktadır.

## 6. Sonuçlar

Bu çalışmada 2 bacaklı düzlemsel bir robotun dinamik modeli için 7 eksenli hareket denklemleri elde edilmiştir. Robotun yerde hareketsiz iken ayağa kalkıp gövdesini dengede tutabilmesi için bir YSA yapısı kullanılmıştır. Amaçlanan hareketin gerçekleştirilmesi için uygun bir amaç fonksiyonu oluşturulmuştur. YSA’nın eğitimi için genetik algoritmalarından faydalanılmıştır. YSA’nın hesaplanmış olduğu değerler, robotun eklemleri için referans açıları olarak kullanılmıştır. Elde edilen referans açı değerleri kullanılarak PID kontrolcü ile eklemlerin açısal hareketleri kontrol edilmiştir. Sayısal benzetimlerle sistem cevapları grafiksel olarak elde edilmiştir. Böylece robotun yerden kalkarak gövdesini dengede tutmasını sağlayacak bir YSA yapısı elde edilmiştir. Bozucu etkiler karşısında robotun gövdesini dengede tutmayı başardığı görülmüştür.

Bununla birlikte bu çalışmada yapay zekâ teknikleri kullanılarak bir robota işlevsellik kazandırılacağı ortaya konulmuştur. Robota bunun gibi farklı amaçlara yönelik birçok özellikler de kazandırılacağı açıkça görülmektedir.

## Kaynaklar

- [1] Todd D.J. 1985. Walking machines, an introduction to legged robots, Koran Page, London, 1985.
- [2] Raibert M.H., 1986. Legged robots that balance, MIT Press, Cambridge, M.A.
- [3] Fitzgerald D., Hunt T., Leiro A. 2015. HydroDog; A quadruped robot actuated by soft fluidic muscles, Worcester Polytechnic Institute Worcester, pp. 12, Massachusetts, USA.
- [4] Agarwal S., Mahapatra A., Roy S.S. 2012. Dynamics and optimal feet force distributions of a realistic four-legged robot, International Journal of Robotics and Automation(IJRA), pp. 223.
- [5] Raibert M., Blankespoor K., Nelson G., Playter R., and the BigDog Team. 2008. BigDog the rough-terrain quadruped robot, Proceedings of the 17th World Congress, The International Federation of Automatic Control, pp. 10822, Seoul, Korea.
- [6] Denavit J., Hartenberg R.S. 1955. A kinematic for lower-pair mechanisms based on matrices, ASME Jappl. Mechan., pp. 215-221.
- [7] Zhang D., Gao Z. 2012. Forward kinematics, performance analysis, and multi-objective optimization of a bio-inspired parallel manipulator, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 28: 484-492.
- [8] Nahangi M., Yeung J., Haas C.T., Walbridge S., West J. 2015. Automated assembly discrepancy feedback using 3D imaging and forward kinematics, Automation in Construction, 56: 36-46.
- [9] Schilling J.R. 2003. Fundamentals of robotics analysis and control, Prentice-Hall of India Private Limited, pp.204-2019, New Delhi.
- [10] Aström K.J., Hägglund T. 1995. PID controllers; theory, design and tuning, North Carolina: Instrument Society of America, pp.70.
- [11] Aström K.J., Hägglund T. 2005. Advanced PID Control, North Carolina, ISA: Instrument Society of America.
- [12] Wang S.C. 2003. Interdisciplinary computing in java programming, Artif Neural Network, Part II, pp.81-100.
- [13] Melingui A., Escande C., Benoudjit N., Merzouki R., Mbede J.B. 2014. Qualitive approach for forward kinematic modeling of a compact bionic handling assistant trunk, The International Federation of Automatic Control, Cape Town, South Africa, pp. 9353-9358.
- [14] Laboudi Z., Chikhi S. 2012. Comparison of genetic algorithm and quantum genetic algorithm, Int Arab J Inform Technol., 9 (3): 243-249.

**Ekler**

1.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} L(\theta_1, \dot{\theta}_1) - \frac{\partial}{\partial \theta_1} L(\theta_1, \dot{\theta}_1) = \tau_1$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_1 L_1 \ddot{x} \sin \theta_1 + m_1 L_1 \ddot{y} \cos \theta_1 - \frac{m_1 L L_1 \ddot{\theta} \cos(\theta - \theta_1)}{2} \\ & + \frac{m_1 L L_1 \dot{\theta}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_1) \sin(\theta - \theta_1)}{2} + m_3 L_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_3 L_3^2 \ddot{\theta}_3 + m_3 L_3^2 \ddot{\theta}_1 - m_3 L_1 \ddot{x} \sin \theta_1 \\ & - m_3 L_3 \ddot{x} \sin(\theta_1 + \theta_3) + m_3 L_1 \ddot{y} \cos \theta_1 + m_3 L_3 \ddot{y} \cos(\theta_1 + \theta_3) \\ & - \frac{m_3 L L_1 \ddot{\theta} \cos(\theta - \theta_1)}{2} + \frac{m_1 L L_1 \dot{\theta}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_1) \sin(\theta - \theta_1)}{2} \\ & + \frac{m_3 L L_3 \dot{\theta}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3) \sin(\theta - \theta_1 - \theta_3)}{2} + 2 m_3 L_1 L_3 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_3 \\ & - 2 m_3 L_1 L_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 + m_3 L_1 L_3 \ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - m_3 L_1 L_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 \\ & + \frac{m_1 L L_1 \dot{\theta} \dot{\theta}_1 \sin(\theta - \theta_1)}{2} + \frac{m_3 L L_1 \dot{\theta} \dot{\theta}_1 \sin(\theta - \theta_1)}{2} + \frac{m_3 L L_3 \dot{\theta}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3) \sin(\theta - \theta_1 - \theta_3)}{2} \\ & + m_1 g L_1 \cos \theta_1 + m_3 g L_1 \cos \theta_1 + m_3 g L_3 \cos(\theta_1 + \theta_3) \end{aligned}$$

2.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} L(\theta_2, \dot{\theta}_2) - \frac{\partial}{\partial \theta_2} L(\theta_2, \dot{\theta}_2) = \tau_2$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 L_2 \ddot{x} \sin \theta_2 + m_2 L_2 \ddot{y} \cos \theta_2 + \frac{m_2 L L_2 \ddot{\theta} \cos(\theta - \theta_2)}{2} \\ & - \frac{m_2 L L_2 \dot{\theta}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_2) \sin(\theta - \theta_2)}{2} + m_4 L_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_4 L_4^2 \ddot{\theta}_2 + m_4 L_2^2 \ddot{\theta}_4 - m_4 L_2 \ddot{x} \sin \theta_2 \\ & - m_4 L_4 \ddot{x} \sin(\theta_2 + \theta_4) + m_4 L_2 \ddot{y} \cos \theta_2 + m_4 L_4 \ddot{y} \cos(\theta_2 + \theta_4) \\ & + \frac{m_4 L L_2 \ddot{\theta} \cos(\theta - \theta_2)}{2} - \frac{m_4 L L_2 \dot{\theta}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_2) \sin(\theta - \theta_2)}{2} + \frac{m_4 L L_4 \ddot{\theta} \cos(\theta - \theta_2 - \theta_4)}{2} \\ & - \frac{m_4 L L_4 \dot{\theta}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \sin(\theta - \theta_2 - \theta_4)}{2} + 2 m_4 L_2 L_4 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_4 \\ & - 2 m_4 L_2 L_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 + m_4 L_2 L_4 \ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 - m_4 L_2 L_4 \dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 \\ & - \frac{m_2 L L_2 \dot{\theta} \dot{\theta}_2 \sin(\theta - \theta_2)}{2} - \frac{m_4 L L_2 \dot{\theta} \dot{\theta}_2 \sin(\theta - \theta_2)}{2} \\ & - \frac{m_4 L L_4 \dot{\theta}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \sin(\theta - \theta_2 - \theta_4)}{2} + m_2 g L_2 \cos \theta_2 + m_4 g L_2 \cos \theta_2 \\ & + m_4 g L_4 \cos(\theta_2 + \theta_4) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_3} L(\theta_3, \dot{\theta}_3) - \frac{\partial}{\partial \theta_3} L(\theta_3, \dot{\theta}_3) = \tau_3$$

3.

$$\begin{aligned} \tau_3 &= m_3 L_3^2 \ddot{\theta}_1 + m_3 L_3^2 \ddot{\theta}_3 - m_3 L_3 \ddot{x} \sin(\theta_1 + \theta_3) + m_3 L_3 \ddot{y} \cos(\theta_1 + \theta_3) \\ &- \frac{m_3 L L_3 \ddot{\theta} \cos(\theta - \theta_1 - \theta_3)}{2} + \frac{m_3 L L_3 \dot{\theta} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3) \sin(\theta - \theta_1 - \theta_3)}{2} \\ &+ m_3 L_1 L_3 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_3 - m_3 L_1 L_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 + \frac{m_3 L L_3 \dot{\theta} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3) \sin(\theta - \theta_1 - \theta_3)}{2} \\ &+ m_3 L_1 L_3 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3) \sin \theta_3 + m_3 g L_3 \cos(\theta_1 + \theta_3) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_4} L(\theta_4, \dot{\theta}_4) - \frac{\partial}{\partial \theta_4} L(\theta_4, \dot{\theta}_4) &= \tau_4 \\ \tau_4 &= m_4 L_4^2 \ddot{\theta}_2 + m_4 L_4^2 \ddot{\theta}_4 - m_4 L_4 \ddot{x} \sin(\theta_2 + \theta_4) + m_4 L_4 \ddot{y} \cos(\theta_2 + \theta_4) \\ &+ \frac{m_4 L L_4 \ddot{\theta} \cos(\theta - \theta_2 - \theta_4)}{2} - \frac{m_4 L L_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \sin(\theta - \theta_2 - \theta_4)}{2} \\ &+ m_4 L_2 L_4 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_4 - m_4 L_2 L_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 - \frac{m_4 L L_4 \dot{\theta} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \sin(\theta - \theta_2 - \theta_4)}{2} \\ &+ m_4 L_2 L_4 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \sin \theta_4 + m_4 g L_4 \cos(\theta_2 + \theta_4) \end{aligned}$$

$$5. \quad [J_{R_{shoulder}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (-L/2) \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (L/2) \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6. \quad [J_{L_{shoulder}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (L/2) \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & (-L/2) \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$7. \quad [J_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (L/2) \sin \theta - L_1 \sin \theta_1 & -L_1 \sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (-L/2) \cos \theta + L_1 \cos \theta_1 & L_1 \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$8. \quad [J_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (-L/2) \sin \theta - L_2 \sin \theta_2 & 0 & -L_2 \sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (L/2) \cos \theta + L_2 \cos \theta_2 & 0 & L_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$9. \quad [J_3] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & (L/2) \sin \theta - L_1 \sin \theta_1 - L_3 \sin(\theta_1 + \theta_3) & -L_1 \sin \theta_1 - L_3 \sin(\theta_1 + \theta_3) & 0 & -L_3 \sin(\theta_1 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 1 & (-L/2) \cos \theta + L_1 \cos \theta_1 + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_3) & L_1 \cos \theta_1 + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_3) & 0 & L_3 \cos(\theta_1 + \theta_3) & 0 \end{bmatrix}$$

$$10. \quad [J_4] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & (-L/2) \sin \theta - L_2 \sin \theta_2 - L_4 \sin(\theta_2 + \theta_4) & 0 & -L_2 \sin \theta_2 - L_4 \sin(\theta_2 + \theta_4) & 0 & -L_4 \sin(\theta_2 + \theta_4) \\ 0 & 1 & (L/2) \cos \theta + L_2 \cos \theta_2 + L_4 \cos(\theta_2 + \theta_4) & 0 & L_2 \cos \theta_2 + L_4 \cos(\theta_2 + \theta_4) & 0 & L_4 \cos(\theta_2 + \theta_4) \end{bmatrix}$$