

**KOORDİNAT DÜZLEMİNDE BİRİM ÇEMBER YARDIMIYLA
TANJANT VE KOTANJANT FONKSİYONLARININ GRAFİK
ÇİZİMİNDE SAYI DOĞRUSU KULLANIMI**

**USE OF NUMERICAL AXIS IN THE GRAPHIC DRAWING OF
TANGENT AND COTANGENT FUNCTIONS ON COORDINATE
PLANE BY MEANS OF UNIT CIRCLE**

Ömer Faruk ÇETİN*

ÖZET

Bu çalışma; ilköğretim matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin koordinat düzleminde birim çemberi kullanarak tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafiklerinin çiziminde sayı doğrusu kullanımlarını araştıran betimsel bir çalışmadır. Çalışmada nicel veri toplama yöntemlerinin yanında gözlem ve görüşme gibi nitel veri toplama yöntemleri de kullanılabilen tarama modeli kullanılmıştır. Çalışma, Türkiye'nin Doğu Anadolu Bölgesinin nüfusça orta ölçekli bir ilinde yapılmıştır. Çalışma grubunu ilköğretim matematik öğretmenliği programına kayıtlı 56 birinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Çalışmaya katılan öğrencilere on bir adet beşli Likert tipi ve altı adet açık uçlu soru sorulmuş ve veriler analiz edilerek elde edilen bulgular yorumlanmıştır. Sonuçlar, öğrencilerin koordinat düzleminde tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafiklerinin çiziminde sayı doğrusunu doğru bir şekilde kullanamadıklarını ve birbirine bağlı olarak tanımlanan kavramları birbirinden bağımsız gibi kullandıklarını göstermektedir. Buna göre öğrencilerin kavramlar arasındaki ilişkileri kurabilecekleri etkinliklerin yaptırılması önerilmiştir.

Anahtar sözcükler: Trigonometrik fonksiyonlar, koordinat düzlemi, birim çember, sayı doğrusu, grafik çizimi

ABSTRACT

This is a descriptive study analyzing use of numerical axis in the graphic drawing of tangent and cotangent functions on coordinate plane by means of unit circle by primary education mathematics teaching department students. In addition to quantitative data gathering methods, scan model which has the capacity to apply qualitative data gathering methods like survey and interview have also been employed. The study has been conducted in a moderately populated Eastern Anatolian Region city in Turkey. Research group consists of 56 freshmen students registered to primary education mathematics teaching department. Participant students in the research have been directed eleven 5-Likert type and six open-ended

* Yrd. Doç. Dr., Eğitim Fak. İlköğretim Bölümü, Erzincan Üniv.

questions; data have been analyzed and obtained findings have been interpreted. The results have demonstrated that students failed to appropriately use numerical axis in drawing tangent and cotangent functions' graphics on coordinate plane and that they used interdependent concepts as if they were independent concepts. In the end it has been suggested that students should be led to activities which enable establishing inter-conceptual relations.

Key words: Trigonometric functions, coordinate plane, unit circle, numerical axis, graphic drawing

1. GİRİŞ

Eğitim sistemi içinde yükseköğretime girdi sağlayan ortaöğretim, aynı zamanda ilköğretim ile yükseköğretim arasında bir köprüdür (Arslan ve Öner, 2006). Bu yüzden Ortaöğretim Matematik Öğretim Programı öğrencinin önceki bilgilerinden faydalanarak yeni matematiksel kavramları ve sistemleri anlayabilmesini, bunlar arasında ilişkiler kurabilmesini, günlük hayatta ve yüksek öğretimde ileri bir eğitim alabilmesi için gerekli matematiksel bilgi ve becerileri kazanmasını hedeflemektedir (MEB, 2005). Diğer taraftan da öğrenciler yeni bir şeyler öğrenirken bunları daha önceki bilgileri üzerine kurarlar. Sahip oldukları mevcut bilgiler bazen yeni kavramların öğrenilmesini kolaylaştırırken bazen de yanlış öğrenmelere sebep olabilmektedir (Baki ve Bell, 1997). Bu durum konuları arasında güçlü ve sıralı bir ilişkiye sahip olan matematikte daha belirgin hale gelir (Altun, 1998; Dikici ve İşleyen, 2004). Örneğin Çetin ve Dane (2004) tarafından yapılan araştırmada öğrencilerin birbirine bağımlı olarak tanımlanan geometrik kavramları birbirinden bağımsız gibi kullandıkları belirtilmiştir. Yine Dane (2008) tarafından yapılan araştırmada ise öğretmen adaylarının nokta, doğru ve düzlem konusunda oldukça yetersiz oldukları ve bu kavramlarla ilgili yanlışlara sahip oldukları ifade edilmiştir. Matematiğin her hangi bir konusunda öğrencilerin sahip oldukları bilgilerin ya da yanlış öğrenmelerin bilinmesi yeni kavramların kolay ve doğru öğrenilmesi açısından önemlidir (Kutluca ve Baki, 2009). Öğrencilerdeki matematikle ilgili eksiklik ve başarısızlıklar yüksek öğretimdeki matematik içeren programların amaçlarına uygun olarak yürütülmesinde ve hedefine ulaşmasında olumsuz etkendir (Tuna ve Kaçar, 2005). Orta ve yüksek öğrenim öğrencilerinin matematik dersindeki bilgi ve yanlış öğrenmelerinin belirlenmesi amacıyla yapılmış birçok bilimsel çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalar matematiğin diğer konularında olduğu gibi trigonometri konularında da öğrencilerin öğrenme zorlukları yaşadıklarını ve yanlış öğrenmelere sahip olduklarını göstermektedir (Aydın, 1998; Boyacıoğlu, Erduran ve Alkan, 1996; Durmuş, 2004; Tatar, Okur ve Tuna, 2008; Durmuş, 2004; Kültür, Kaplan ve Kaplan, 2008). Astronomi, fizik, geometri ve

coğrafya gibi bilim dallarının yanında optik, haritacılık ve denizcilik gibi günlük hayatta geniş bir kullanım alanı bulunan trigonometri matematiğin önemli bir konusudur (Sağlam ve diğerleri, 2007). Trigonometrideki her hangi bir kavram, öncesindeki ve sonrasındaki kavramlarla ve bunlar arasındaki kurulan ilişkilerle oluşturulur. Trigonometrik kavramların öğrenilmesi üst düzey düşünme beceri gerektirdiğinden öğrencilerin bu konularda güçlükler yaşayabilecekleri olasıdır. Fakat bu konuda Türkiye de birkaç çalışmanın dışında çalışma bulunmamaktadır. Akkoç (2008) tarafından öğretmenlerin, öğretmen adaylarının ve öğrencilerin trigonometrik fonksiyonların tanımlanmasında önemli olan radyan kavramı ile ilgili öğrenme güçlüklerine sahip oldukları ortaya konmuştur. Literatüre katkı sağlamak ve öğrencilerdeki güçlüklerini zamanında belirlenip gidermek (Duval, 2002) için trigonometri ve trigonometrik fonksiyonlar konusunda çalışmalar yapılması önemlidir (Kutluca ve Baki 2009; Kültür, Kaplan ve Kaplan, 2008). Birim çember kullanılarak tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafik çiziminde sayı doğrusu kullanımını araştıran bu çalışma sonuç ve önerileri ile öğrencilerin bu konuda yaşadıkları zorlukları giderme adına önem taşımaktadır.

Çalışmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı “ilköğretim matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin koordinat düzleminde birim çemberi kullanarak tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafik çiziminde sayı doğrusu kullanımını nasıldır?” problemini araştırmaktır. Bu amaca uygun olarak aşağıdaki alt problemlere cevap aranmıştır.

1. Öğrencilerin doğru-sayı doğrusu algıları ve doğru-sayı doğrusu uygulamaları ne düzeydedir?
2. Öğrencilerin tanjant, kotanjant fonksiyonlarının grafik çizimi algıları ve tanjant, kotanjant fonksiyonlarının grafik çizimi uygulamaları ne düzeydedir?
3. Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafiklerinin birim çember kullanılarak çiziminde öğrenciler sayı doğrusunu doğru bir şekilde kullanabilmekte midirler?

2. YÖNTEM

Çalışmanın Yöntemi

Bu çalışmada tarama modeli kullanılmıştır. Tarama modelleri, geçmişte veya halen var olan bir durumu var olduğu şekliyle betimlemeyi amaçlayan bir araştırma yaklaşımıdır. Bu model araştırmaya konu olan olayı, bireyi, grup veya nesneyi kendi koşulları içinde olduğu gibi tanımlamaya çalışır.

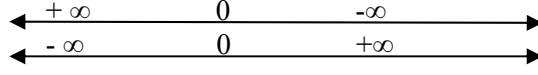
şır (Karasar, 2008). Tarama modelinde nicel veri toplama yöntemlerinin yanında gözlem ve görüşme gibi nitel veri toplama yöntemleri de kullanılabilir (Büyüköztürk, Kılıç Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2008). Bu çalışmada amaca uygun olmasından dolayı sadece nitel veri toplama yöntemi kullanılmıştır.

Çalışma Grubu

Araştırma grubunu, 2010–2011 eğitim-öğretim yılı bahar yarıyılında Doğu Anadolu Bölgesi'nin orta ölçekli bir ilinde yer alan eğitim fakültesinin ilköğretim matematik öğretmenliği programına kayıtlı elli altı birinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır.

Verileri Toplama Aracı

Bu çalışmada veriler, *Bilgi Algılama Ölçeği (BAÖ)* ve *Bilgi Testi (BT)* ile toplanmıştır. Buna göre, (BAÖ) ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin tanjant ve kotanjant fonksiyonların grafik çiziminde gerekli olan temel bilgileri hakkındaki algılarını belirlemek üzere yapılandırılmış on üç adet beşli Likert tipi maddeden, (BT) ise bunların uygulamasını içeren yapılandırılmış altı adet açık uçlu maddeden oluşmaktadır. Öncelikle (BAÖ) ve (BT) alanında uzman üç öğretim elamanına sunularak görüşleri alınmış ve bu görüşler doğrultusunda (BAÖ) nün on üç adet beşli Likert tipi maddesi on bir maddeye indirilerek gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Daha sonra (BAÖ) ve (BT) ilköğretim matematik öğretmenliği programının her sınıfından tamamen tesadüfî olarak seçilen beşer öğrenciye sunulmuş, soruların anlaşılır ve amacına uygun olduğu belirlenmiştir. Buna göre maddeleri “Hiç katılmıyorum (1)”, “Katılmıyorum (2)”, “Karasızım (3)”, “Katılıyorum (4)” ve “Tamamen katılıyorum (5)” şeklinde beşli derecelendirilen Likert tipi (BAÖ) nün ölçeğinin iç güvenirlik katsayısı Cronbach alfa 0.78 olarak bulunmuştur. (BAÖ) nün öğrencilerin doğru ve sayı doğrusu algılarını yoklayan maddeleri “Sayı doğrusu ile doğru arasındaki farkı bilebilirim”, “Bir doğru verildiğinde bunu sayı doğrusuna dönüştürebilirim” ve “Bir sayı doğrusunda $-\infty$ ve $+\infty$ un ne anlama geldiğini bilirim” şeklindedir. (BT) in öğrencilerin doğru ve sayı doğrusu uygulamalarını içeren iki adet açık uçlu maddesi “Bir doğru çiziniz ve çizdiğiniz doğruyu sayı doğrusu haline getiriniz” ve “Sizce aşağıdaki gibi paralel iki sayı doğrusunun birindeki $-\infty$ diğerinde $+\infty$ a karşılık gelebilir mi? Neden?”



şeklindedir. (BAÖ) nün tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafik çizimleri ile ilgili öğrenci algılarını yoklayan maddeleri “Açıyı bilirim”, “Açı ölçüsünün ne anlama geldiğini bilirim”, “Bir açıyı negatif ve pozitif yönlü yapabilirim”, “Açı ile yay arasındaki farkı bilirim”, “Yay ölçümünün ne anlama geldiğini bilirim”, “Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının $(0, 2\pi)$ arasındaki değerlerinin pozitif ya da negatif olduklarını yani işaretlerini bulabilirim”, “Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının $(-2\pi, 0)$ arasındaki değerlerinin pozitif ya da negatif olduklarını yani işaretlerini bulabilirim” ve “Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafiklerinden artan ya da azalan oldukları aralıkları bulabilirim” şeklindedir. (BT) in öğrencilerin tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafik çizimi uygulamalarını içeren dört adet açık uçlu maddesi ise şunlardır:

X	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	2π
Tan(x)								
Cotan(x)								

Yukarıdaki tablo da verilen aralıklarda fonksiyonların pozitif (+) ya da negatifliğini (-) ilgili aralığa belirtiniz”,

X	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	$3\pi/2$	2π
Tan(x)								
Cotan(x)								

Yukarıdaki tablo da verilen aralıklarda fonksiyonların artanlığını “ ile ve azalanlığını “ ” sembollerini kullanarak belirtiniz”, “Tanjant fonksiyonunun $(\pi/2, 3\pi/2)$ ile $(-3\pi/2, -\pi/2)$ aralığında grafiğini çiziniz” ve “Kotanjant fonksiyonunun $(\pi, 2\pi)$ ile $(-2\pi, -\pi)$ aralığında grafiğini çiziniz”.

Verilerin Toplanması ve Analizi

(BAÖ) ve (BT) iki gruba ayrılmış ilköğretim matematik öğretmenliği programı öğrencilerine iki derslikte ve elli dakika içinde yanıtlamaları istenerek sunulmuştur. Cevaplama için belirlenen süre sonunda yanıtlar yazılı olarak alınmıştır. Cevaplanan (BAÖ) ve (BT) formları BT.1 den BT.56 ya kadar numaralandırılarak elde edilen veriler bilgisayar ortamına aktarılmış ve betimsel olarak analiz edilmiştir. Betimsel analizde veriler araştırma soru-

larının ortaya koyduğu temalara göre düzenlenebilir. Bu analizde bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara sık sık yer verilir. Bu tür analizde amaç elde edilen bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde okuyucuya sunmaktır. Bunun için elde edilen veriler önce sistematik ve açık bir biçimde betimlenir. Daha sonra yapılan bu betimlemeler açıklanır ve yorumlanır, neden sonuç ilişkileri irdelenir ve bir takım sonuçlara ulaşılır. Ortaya çıkan temaların ilişkilendirilmesi anlamlandırılması ve ileriye yönelik tahminlerde bulunulması da araştırmacının yapacağı yorumların boyutları arasında yer alabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Çalışmada Likert tipi maddeler için temalar “(1) ve (2) için zayıf, (3) için orta, (4) ve (5) için iyi”, uygulama soruları için “doğru” ve “yanlış” olarak belirlenmiştir. Öğrencilerin yanıtları temalara göre bir araya getirip frekans ve yüzde değerleri hesaplanarak tablolar haline getirilmiştir.

3. BULGULAR ve YORUMLAR

Bu kısımda “öğrencilerin doğru-sayı doğrusu algıları ve doğru-sayı doğrusu uygulamaları ne düzeydedir?” şeklindeki birinci alt probleme ilişkin veriler tablolar halinde sunulmuş ve yorumlanmıştır. Daha sonra “Öğrencilerin tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafik çizimi algıları ve tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafik çizimi uygulamaları ne düzeydedir?” şeklindeki ikinci alt probleme ilişkin veriler tablolar halinde sunulmuş ve yorumlanmıştır.

Son olarak “Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafiklerinin birim çember kullanılarak çiziminde öğrenciler sayı doğrusunu doğru bir şekilde kullanabilmekte midirler?” şeklindeki üçüncü alt probleme ilişkin elde edilen veriler tablolar halinde verilmiş ve yorumlanmıştır.

Öğrencilerin doğru ve sayı doğrusu algı düzeyleri ile ilgili bulgular aşağıda tablo halinde verilmiş ve yorumlanmıştır.

Tablo1 de görüldüğü gibi araştırmaya katılan öğrencilerin % 83,92 si doğru ile sayı doğrusu arasındaki farkı ayırt edebileceği, % 85,71 i verilen bir doğruyu sayı doğrusuna dönüştürebileceği, % 91,07 si sayı doğrusundaki $-\infty$ ve $+\infty$ un anlamlarını bildikleri algısındadırlar.

Tablo 1. (BAÖ)' de öğrencilerin doğru ve sayı doğrusu algılarını yoklayan maddelerine verilen yanıtların temalara göre frekans ve yüzde değerleri;

Sorular	Tema	n	%
Sayı doğrusu ile doğru arasındaki farkı bilebilirim	Zayıf	1	% 1,79
	Orta	8	% 14,29
	İyi	47	% 83,92
Bir doğru verildiğinde bunu sayı doğrusuna dönüştürebilirim	Zayıf	1	% 1,79
	Orta	7	% 12,5
	İyi	48	% 85,71
Bir sayı doğrusunda - ∞ ve + ∞ un ne anlama geldiğini bilirim	Zayıf	2	% 3,57
	Orta	3	% 5,36
	İyi	51	% 91,07

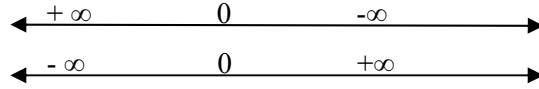
Öğrencilerin doğru ve sayı doğrusu uygulamaları ile ilgili bulgular aşağıda tablolar halinde verilmiş ve yorumlanmıştır.

Tablo 2. (BT)' de “Bir doğru çiziniz ve çizdiğiniz doğruyu sayı doğrusu haline getiriniz” sorusuna verilen yanıtların temalara göre frekans ve yüzde değerleri;

Tema	n	%
Doğru	23	% 41,07
Yanlış	33	% 58,93

Tablo2 den anlaşılacağı üzere, araştırmaya katılan öğrencilerin % 41,07 si bir doğru çizip bu doğruyu sayı doğrusuna dönüştürebilirken % 58,93 ü dönüştürememektedir.

Tablo 3. (BT) de “Sizce aşağıdaki gibi paralel iki sayı doğrusunun birindeki $-\infty$ diğerinde $+\infty$ a karşılık gelebilir mi? Neden?”



sorusuna verilen yanıtların temalara göre frekans ve yüzde değerleri;

Tema	n	%
Doğru (Gelir)	15	% 26,79
Yanlış (Gelmez)	41	% 73,21

Tablo3 de görüldüğü gibi araştırmaya katılan öğrencilerin % 26,79 ü paralel iki sayı doğrusunun birindeki $-\infty$ un diğerindeki $+\infty$ a karşılık gelebileceğini belirtirken % 73,21 i gelemeyeceğini belirtmektedir. Bu soruya verilen yanıtlar ve gerekçeleri temalara göre ayrıntılı olarak aşağıda ele alınmıştır.

Doğru teması altında yer alan 15 yanıtta biri gerekçesiz olup diğerlerinin gerekçelerinin ortak vurguları “sonsuzluk (6)”, “başlangıç noktası (2)”, “paralellik (4)” ve “bakış açısı (2)” dır. Ortak vurgular içeren gerekçeler BT kodları ile birlikte vurgu sırasıyla aşağıda örneklendirilmiştir.

“ ∞ un işaret olarak değeri önemli değildir.” (BT.1)

“Sonsuzun sınırı yoktur.” (BT.55)

“Sayı doğrusunun tam olarak belli bir başlama noktası yoktur.”(BT.12)

“Paralel olduklarından dolayı sayılar birbirini karşılar ve $-\infty$, $+\infty$ a karşılık gelebilir.” (BT.23)

“Kişinin bakışına göre değişebilir, ama genelde evrensel olan ($-\infty$) solda ($+\infty$) sağda olmasıdır.” (BT.28)

Yanlış teması altında yer alan 41 yanıtta 7 si gerekçesizdir. Gerekçe bildiren öğrencilerin çoğunluğunun gerekçelerinin ortak vurguları “sağ, sol, sıfır, yön, başlangıç noktası”, bir kısmının “paralellik” olup dört öğrencinin

gerekçelerinin ortak vurgusu yoktur. Ortak vurgular içeren gerekçeler BT kodları ile birlikte vurgu sırasıyla aşağıda örneklendirilmiştir.

“Sayı doğrusunda sıfırın sağına doğru gidildikçe sayı büyür ve $+\infty$ a gider. Aynı şekilde sıfırın soluna doğru sayı küçülür ve $-\infty$ a gider.” (BT.9)

“Sayı doğrusunda yön kavramı vardır. 0' dan sola gidildikçe - ' ler ifade edilir.” (BT.38)

“0 dan geriye doğru gidince $-\infty$ gidilir, ileri doğru gidilince $+\infty$ a gidilir.” (BT.20)

“Başlangıç noktasının sağı pozitif solu negatif değerleri içerir.” (BT.48)

“ $+\infty$ ile $-\infty$ yönleri farklıdır.” (BT.50)

“Paralel iki doğrunun yönleri aynıdır. Yani sol taraf negatifi sağ taraf pozitif değerlere karşılık gelir. Yani iki doğrunun solunda $-\infty$, sağına da $+\infty$.” (BT.40)

Farklı olması nedeni ile BT.10 kodlu kâğıtta yer alan gerekçe ortak vurgusu olmayan gerekçelere örnek olarak aşağıda verilmiştir.

“Matematiğin ve kâinatın kanunudur bundan dolayı karşılık gelemmez.” (BT.10)

Araştırmaya katılan öğrencilerin % 83,92 ü doğru ile sayı doğrusu arasındaki farkı ayırt edebileceği, % 85,71 i verilen bir doğruyu sayı doğrusuna dönüştürebileceği algısında olmalarına rağmen % 58,93 ü bir doğru çizip bu doğruyu sayı doğrusuna dönüştürememektedir.

Benzer şekilde araştırmaya katılan öğrencilerin % 91,07 si bir sayı doğrusundaki

$-\infty$ ve $+\infty$ un anlamlarını bildikleri algısında olmalarına rağmen % 73,21 i paralel iki sayı doğrusunun birindeki $-\infty$ un diğerindeki $+\infty$ a karşılık gelemeyeceğini belirtmektedir.

Öğrencilerin trigonometrik fonksiyonların grafiklerinin çizimi algıları ile ilgili bulgular aşağıda tablo halinde verilmiş ve yorumlanmıştır.

Tablo 4 den anlaşılacağı üzere araştırmaya katılan öğrencilerin % 94,64 ü açığı bildiği, % 85,71 i açı ölçüsünün ne anlama geldiğini bildiği, % 89,28 i bir açığı pozitif ya da negatif yönlü yapabileceği, % 78,57 si açı ve yay arasındaki farkı bildiği, % 69,64 ü yay ölçüsünün ne anlama geldiğini bildiği, % 85,71 i tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının $(0,2\pi)$ aralığındaki

değerlerinin pozitif ya da negatif olduklarını yani işaretlerini bulabilecekleri, % 83.93 ü trigonometrik fonksiyonların $(-2\pi,0)$ aralığındaki değerlerinin pozitif ya da negatif olduklarını yani işaretlerini bulabilecekleri, % 75 i tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafiklerinden artan ya da azalan oldukları aralıkları bulabilecekleri algısındadır.

Tablo 4. BAÖ' de öğrencinin tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafik çizimi algılarını yoklayan maddelerine verilen yanıtların temalara göre frekans ve yüzde değerleri.

Madde	Tema	n	%
Açıyı bilirim	Zayıf	1	% 1,79
	Orta	2	% 3,57
	İyi	53	% 94,64
Açı ölçüsünün ne anlama geldiğini bilirim	Zayıf	3	% 5,36
	Orta	5	% 8,93
	İyi	48	% 85,71
Bir açıyı negatif ve pozitif yönlü yapabili- rim	Zayıf	3	% 5,36
	Orta	3	% 5,36
	İyi	50	% 89,28
Açı ile yay arasındaki farkı bilirim	Zayıf	4	% 7,14
	Orta	8	% 14,29
	İyi	44	% 78,57
Yay ölçümünün ne anlama geldiğini bilirim	Zayıf	6	% 10,72
	Orta	11	% 19,64
	İyi	39	% 69,64

Tablo 4'ün devamı.

Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının $(0, 2\pi)$ aralığındaki değerlerinin pozitif ya da negatif olduklarını yani işaretlerini bulabilirim	Zayıf	3	% 5,36
	Orta	5	% 8,93
	İyi	48	% 85,71
Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının $(-2\pi, 0)$ aralığındaki değerlerinin pozitif ya da negatif olduklarını yani işaretlerini bulabilirim	Zayıf	3	% 5,36
	Orta	6	% 10,71
	İyi	47	% 83,93
Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafiklerinden artan ya da azalan oldukları aralıkları bulabilirim	Zayıf	3	% 5,36
	Orta	11	% 19,64
	İyi	42	% 75

Öğrencilerin tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafik çizim uygulamaları ile ilgili bulgular aşağıda tablo halinde verilmiş ve yorumlanmıştır.

Tablo 5. BT'de öğrencilerin tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafik çizimi uygulamalarını içeren dört adet açık uçlu maddelerine verilen yanıtların temalara göre frekans ve yüzde değerleri.

Madde	Tema	n	%
Yukarıda verilen aralıklarda, fonksiyonların pozitif (+) ya da negatifliğini (-) ilgili aralığa belirtiniz	Doğru	53	% 94,64
	Yanlış	3	% 5,36
Yukarıda tablo da verilen aralıklarda fonksiyonların artanlığını \nearrow ile ve azalanlığını \searrow sembollerini kullanarak belirtiniz	Doğru	53	% 94,64
	Yanlış	3	% 5,36

Tablo 5'in devamı.

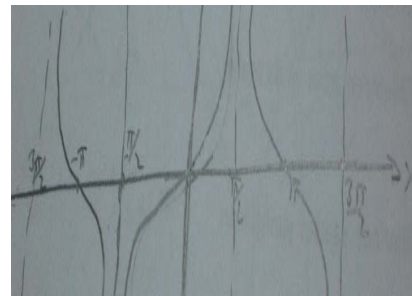
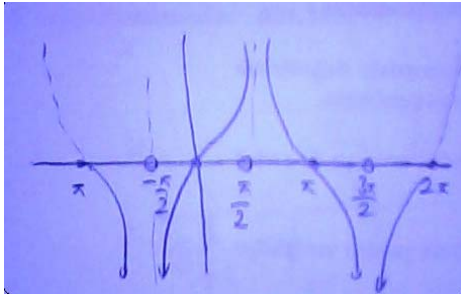
Tanjant fonksiyonunun $(\pi/2, 3\pi/2)$ ile $(-3\pi/2, -\pi/2)$ aralığında grafiğini çiziniz	Doğru	11	% 19,64
	Yanlış	45	% 80,36
Kotanjant fonksiyonunun $(\pi, 2\pi)$ ile $(-2\pi, -\pi)$ aralığında grafiğini çiziniz	Doğru	2	% 3,57
	Yanlış	54	% 96,43

Tablo5'den anlaşılacağı üzere araştırmaya katılan öğrencilerin % 94,64 ü istenen aralıkların tamamında fonksiyonların negatifliğini, pozitifliğini, artanlığını ve azalanlığını doğru olarak bulmuş % 5,36 sı ise bulamamıştır. Yine araştırmaya katılan öğrencilerin % 19,64 ü istenen aralıkların tamamında tanjant fonksiyonunun grafiğini doğru çizerken % 80,36 sı yanlış çizmiştir. Benzer şekilde araştırmaya katılan öğrencilerin % 3,57 si istenen aralıkların tamamında kotanjant fonksiyonunun grafiğini doğru çizerken % 96,43 ü yanlış çizmiştir.

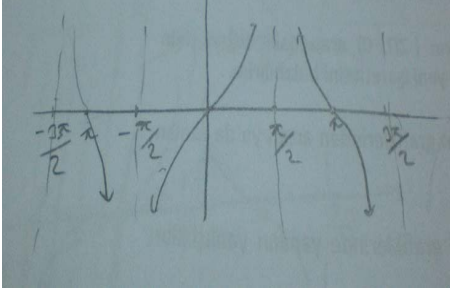
Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafiklerinin birim çember kullanılarak çiziminde öğrencilerin sayı doğrusu kullanımları ile ilgili bulgular aşağıda verilmiş ve yorumlanmıştır.

Öğrencilerin “tanjant fonksiyonunun $(\pi/2, 3\pi/2)$ ile $(-3\pi/2, -\pi/2)$ aralığında grafiğini çiziniz” sorusuna vermiş oldukları yanıtlardan bazılarının fotoğrafları aşağıda şekil 1’de verilmiştir.

Şekil 1.

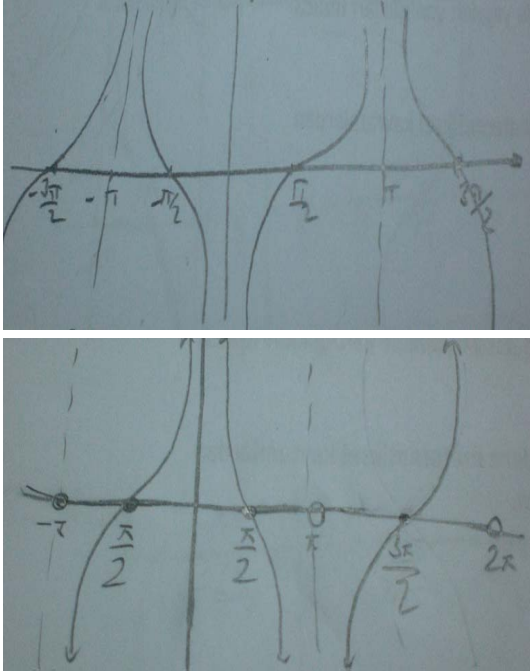


Şekil 1'in devam.

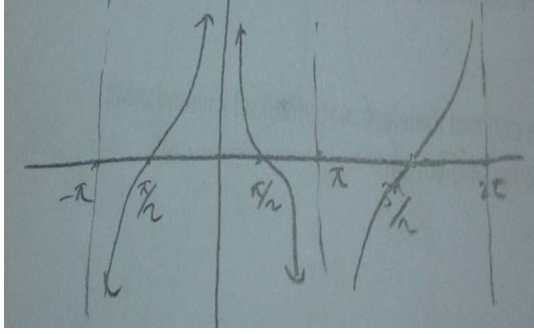


Öğrencilerin “kotanjant fonksiyonunun $(\pi, 2\pi)$ ile $(-2\pi, -\pi)$ aralığında grafiğini çiziniz” sorusuna vermiş oldukları yanıtlardan bazılarının fotoğrafları aşağıda Şekil 2 de verilmiştir.

Şekil 2.



Şekil 2'nin devamı.

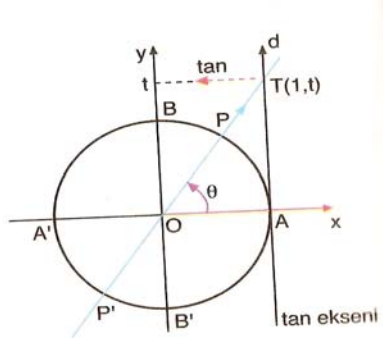


Şekil 1 ve Şekil 2'den anlaşılacağı üzere tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafikleri sadece bir aralıkta doğru çizilmesine rağmen bu aralık dışında yanlış çizilmiştir. Öğrenciler tanjant, kotanjant fonksiyonları ve tanjantları, kotanjant teğetlerini birim çember kullanılarak tanımlamayla ilk olarak ortaöğretim 10 sınıfında görmekteyiz. "Ortaöğretim Matematik 10" ders kitabında bunlar şöyle tanımlanmaktadır:

Ç birim çember, bu çemberin $A(1,0)$ noktasındaki teğeti d , $B(0,1)$ ile $B'(0,-1)$ noktalarından farklı bir noktası P ve P ile eşlenen gerçek sayılardan biri θ olsun. OP doğrusunun d yi kestiği nokta $T(1, t)$ ise

$$\tan : \left. \begin{array}{l} \mathbb{R} - \{B, B'\} \rightarrow d \\ P \rightarrow T \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \tan : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta \rightarrow \tan \theta = t \end{array} \right.$$

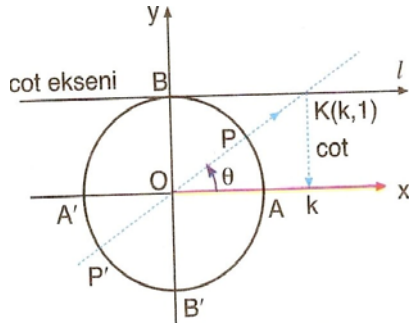
fonksiyonuna, tanjant fonksiyonu denir. Bu fonksiyon, **tan** ile gösterilir. d doğrusuna da tanjant eksenini deriz.



Ç birim çember, bu çemberin $B(0,1)$ noktasındaki teğeti l , $A(1,0)$ ile $A'(-1,0)$ noktalarından farklı bir noktası P ve P ile eşlenen gerçekte sayılardan biri θ olsun. OP doğrusunun l yi kestiği nokta $K(k, 1)$ ise

$$\left. \begin{array}{l} \cot: \mathcal{S} - \{A, A'\} \rightarrow l \\ P \rightarrow K \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \cot: \mathcal{R} - \{k \Pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathcal{R} \\ \theta \rightarrow \cot \theta = k \end{array} \right.$$

fonksiyonuna, **kotanjant fonksiyonu** denir. Bu fonksiyonu, **cot** ile gösteririz. l doğrusuna da kotanjant ekseni deriz (Kaplan, 2010).



Bu tanımlarda d , l ile gösterilen ve sırasıyla tanjant, kotanjant ekseni olarak adlandırılan doğrular öğrencilerin analitik düzlemde birim çember yardımı ile tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının özelliklerini görsel olarak

tanımlarına yardım etmektedir. Bunlardan tanjant eksenine y-eksenine, kotanjant eksenine ise x-eksenine paralel doğrulardır. Bu doğrulardan tanjant teğeti olarak adlandırılan “ d ” doğrusu ile birim çemberin AP yayına karşılık gelen açısının \overline{OP} kolunun kesişim noktasının y-bileşeni tanjant fonksiyonunun “ θ ” deki değeridir. Buna göre “ θ ”nın $[0, -\pi/2)$ ve $[0, \pi/2)$ aralığında olması durumunda tanjant değerleri bulunabilmektedir. Fakat birim çemberin pozitif yönlü BB' yayına karşılık gelen hiçbir açının \overline{OP} kolu “ d ” doğrusu kesişmemektedir. Yani “ θ ”nın $(\pi/2, 3\pi/2)$ aralığındaki değerleri için bu yolla tanjant değeri bulunamamaktadır. Benzer olarak “ θ ”nın $(\pi, 2\pi)$ aralığındaki değerleri için bu yolla kotanjant değeri bulunamamaktadır. Öğrencilerin doğru çizim yaptıkları aralıklarla tanjant ve kotanjant teğet doğrularının kullanılabilirdikleri aralıklar, yanlış çizim yaptıkları aralıklar ile de tanjant ve kotanjant teğet doğrularının kullanılmadığı aralıklar yukarıdaki şekil1 ve şekil2 den görüleceği gibi örtüşmektedir. Çizimin yanlışlığına ilgili aralıklarda çizim yapabilmek için “ d ” ve “ l ” doğrularına paralel doğru olarak çizilen doğruların sayı doğrusu olarak kullanımındaki hata yol açmıştır. Öğrencilerin tanjant teğet eksenine olarak adlandırılan “ d ” doğrusunu sayı doğrusuna dönüştürmede “ d ”nin y-eksenine paralel olmasını dikkate aldıkları, tanjant değerlerinin sinüs değerinin kosinüs değerine oranı alınarak elde edildiğini göz ardı etkileri görülmektedir. Buna göre, analitik düzlemin birinci bölgesinde sinüs ve kosinüsün pozitif değerler almasıyla bu değerlerin oranının pozitif, dördüncü bölgesinde ise sinüsün negatif ve kosinüsün pozitif değerler almasıyla bu değerlerin oranının negatif olması dikkate alınmamıştır. Benzer ilişki kotanjant değerleri içinde kurulamamış, kotanjant teğet eksenine olarak adlandırılan l doğrusunu sayı doğrusuna dönüştürmede l nin x-eksenine paralel olmasını dikkate alınmıştır. Bu duruma şekil1 ve şekil2 de verilen resimlerdeki çizimler iyi birer örnektir. Burada öğrenciler tanjant fonksiyonunun $(\pi/2, 3\pi/2)$ arasında artan ve azalanlığını birim çembere $(-1,0)$ noktasında teğet çizerek (bu aralıkta geniş açının x-ekseni dışındaki diğer kolu “ d ” olarak verilen tanjant teğet doğrusunu kesemeyeceğinden) geniş açının x-ekseni dışındaki diğer kolunun bu teğeti kestiği noktayı tanjant değeri olarak hesaplamışlardır. Fakat bu teğet doğrusunu sayı doğrusuna dönüştürmede, bu doğrunun y-eksenine paralel olması temel alınmıştır. Benzer ifadeler tanım aralığı $(\pi, 2\pi)$ alındığında kotanjant fonksiyonu içinde söylenebilir. Bu durum öğrencilerin doğru ve sayı doğrusu uygulamalarında vermiş oldukları yanıtlarla da örtüşmektedir.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Çalışmaya katılan öğrencilerin doğru ve sayı doğrusu algıları (tablo1) iyi düzeyde olmasına rağmen uygulama sorularına yanlış yanıt veren öğrenci sayısı (tablo2) oldukça yüksektir. Bu öğrencilerin doğru ve sayı doğrusu algıları ile uygulamalarının örtüşmediğini göstermektedir. Öğrenciler birbiri ile bağlı kavramları birbirlerinden bağımsızmış gibi kullanmışlardır. Bu sonuç, Çetin ve Dane (2004), Dane (2008) tarafından elde edilen sonuçla benzerdir. Sayı doğrusu oluşturulmada kullanılan reel sayı-doğru üzerindeki nokta eşlemesi bilinen bir bilgidir. Örneğin çoğu kez kullandıkları $y=x$, $y=-x$, $y=x+1$, $y=2x-5$ v.b. doğruları, x değişkenine göre değer alan y reel sayılarının oluşturduğu sayı doğrularıdır. Kavramlar arasında ilişkilendirme yapma matematik yapmanın ilk basamağıdır. Öğrencilerin kavramlar arasında ilişkilendirme yapma becerileri geliştirilmelidir.

Benzer şekilde öğrencilerin tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafik çiziminde kullanılan kavramlar (artanlık, azalanlık, açı, yay ve bunların ölçümü gibi) ile ilgili algıları (tablo4) iyi düzeydedir. Bu öğrencilerin tanjant ve kotanjant fonksiyonları tanımlamada kullanılan temel kavramları ayrı ayrı bildikleri algısında olduğunu göstermektedir. Öğrencilerin verilen aralıklarda tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının artanlığı, azalanlığı ve işaretlerini bulma ile ilgili uygulama sorularına verdikleri doğru yanıt sayısı (tablo5, 1 ve 2. sorular) yüksektir. Bu sonuç öğrencilerin tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının artanlığı, azalanlığı ve işaretlerini bulma ile ilgili algıları ile uygulamalarının örtüşmediğini göstermektedir. Fakat birim çember kullanılarak tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafik çizimlerinde sayı doğrusu uygulamaları ile ilgili sorulara verilen yanlış yanıt sayısı (tablo5, 3 ve 4. sorular) oldukça fazladır. Bu sonuç öğrencilerin doğru ve sayı doğrusu algıları ile uygulamalarının örtüşmediği sonucu ile örtüşmektedir. Bu sonuçlar, Kültür, Kaplan ve Kaplan, (2008) ve Akkoç, (2008) tarafından elde edilen sonuçlarla uyumaktadır. Öğrenciler tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafik çizimlerinde tanjant ve kotanjant teğetlerini kullanmaktadır. Onuncu sınıf matematik ders kitabında birim çember yardımı ile tanjant teğeti tanımlanırken çemberin "0" dan " $\pi/2$ " ye ve " $3\pi/2$ " den " 2π " ye kadar olan yayları kullanılmış olup, " $\pi/2$ " den " $3\pi/2$ " ye kadar olan yayı kullanılmamıştır. Koordinat düzleminin (-1,0) noktasında çizilen teğetin birim çemberin $\pi/2$ den $3\pi/2$ ye kadar olan yay için tanjant teğeti olarak alınması uygun olacaktır. Benzer şekilde birim çember yardımı ile kotanjant teğeti tanımlanırken çemberin "0" dan " π " ye kadar olan yayları kullanılmış olup, " π " den " 2π " ye kadar olan yayı kullanılmamıştır. Koordinat düzleminin (0,-1) noktasında çizilen teğetin

birim çemberin “ π ” den “ 2π ” ye kadar olan yay için kotanjant teğeti olarak alınması uygun olacaktır. Daha sonra her iki durum negatif yönlü açılar için incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

- Akkoç, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 39 (7), 857–878.
- Altun, M. (1998). *Matematik Öğretimi* (6. Baskı). Bursa: Alfa Yayın.
- Arslan, M., Öner, F. (2006). Türkiye’de İlköğretimden Orta Öğretime Geçişin Düzenlenmesi Üzerine Düşünceler ve Gelişmiş Ülkelerden Örnekler, *Orta Öğretimde Yeniden Yapılanma Sempozyumu Bildiriler Kitabı*, 30-48, Milli Eğitim Bakanlığı, Ankara. 20-22 Aralık 2004.
- Aydın, N. (1998). Liselerde Matematik Derslerinde Zor Öğrenilen Konular, Zor Öğrenilme Nedenleri ve Bunları Öğretme Yöntemleri, VIII. Eğitim Bilimleri Kongresi Bildiriler Kitabı, Cilt 1, 62-67, KTÜ, Trabzon.
- Baki, A., Bell, A. (1997). *Ortaöğretim Matematik Öğretimi* (1. Cilt).YÖK/Dünya Bankası Milli Eğitimi Geliştirme Projesi, Hizmet Öncesi Öğretmen Eğitimi, Ankara.
- Boyacıoğlu, H., Erduran, A., Alkan, H. (1996). Permütasyon, Kombinasyon ve Olasılık Öğretiminde Rastlanan Güçlüklerin Giderilmesi, II. Ulusal Eğitim Sempozyumu, Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi, İstanbul.
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., Demirel, F. (2008). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Pegem Akademi.
- Çetin, Ö. F., Dane, A. (2004). Sınıf öğretmenliği 3. sınıf öğrencilerinin geometrik bilgilere erişimi düzeyleri üzerine. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12(2),427-436.
- Dane, A. (2008). İlköğretim matematik öğretmenliği programı öğrencilerinin nokta, doğru ve düzlem kavramları algıları, *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(2), 41-58.
- Dikici, R., İşleyen, T. (2004). Bağlantı ve fonksiyon konusundaki öğrenme güçlüklerinin bazı değişkenler açısından incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12(1), 105–116.
- Durmuş, S. (2004). Matematikte öğrenme güçlüklerinin saptanması üzerine bir çalışma, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12 (1), 125-128.
- Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1–16.

-
- Kaplan, E. (2010). Ortaöğretim Matematik 10 Ders Kitabı (3. Baskı), Ankara: Paşa Yayıncılık.
- Karasar, N. (2008). Bilimsel araştırma yöntemleri. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Kutluca, T. Baki A. (2009). 10. Sınıf matematik dersinde zorlanılan konular hakkında öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin görüşlerinin incelenmesi, Kastamonu Eğitim Dergisi, 17(2), 609-624.
- Kültür, M., N., Kaplan, A., Kaplan, N. (2008). Ortaöğretim öğrencilerinde trigonometri öğretiminin değerlendirilmesi, KKEFD, 17, 202-211.
- MEB. (2005). T.C Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12.sınıflar) Dersi Öğretim Programı, Ankara.
- Sağlam, Z., Sevim, M., Yurtseven, T., Oğuz, T., Yıldırım, Y., Sağlam, A, (2007). Matematik 10. Sınıf Ders Kitabı. (2. Baskı). Rotamat Basım, İstanbul.
- Tatar, E., Okur, M., Tuna, A. (2008). Ortaöğretim matematiğinde öğrenme güçlüklerinin saptanmasına yönelik bir çalışma, Kastamonu Eğitim Dergisi, 16 (2), 507-516.
- Tuna, A., Kaçar, A. (2005). İlköğretim matematik öğretmenliği programına başlayan öğrencilerin lise 2 matematik konularındaki hazır bulunuşluk düzeyleri, Kastamonu Eğitim Dergisi, 13 (1), 117-128.
- Yıldırım, A., Şimşek, H. (2005). Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri (5. Baskı). Ankara: Seçkin Yayınevi.

* * * *